Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich

WS 2014/2015

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 9

Abgabe am 18.12.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Hier und in allem Folgenden bezeichnen wir mit $||\cdot||_p : \mathcal{L}^p \to [0, \infty)$, die durch

$$||X||_p := (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

definierte Abbildung.

1.(4 Punkte) Ein fairer Würfel werde 100 mal geworfen, wobei wir annehmen, dass die einzelnen Würfe unabhängig voneinander sind. Ferner modelliere $S : \Omega \to \mathbb{R}$ die aufsummierte Summe der Augenzahlen nach den 100 Würfen. Zeigem Sie mittels der Tschebyschew Ungleichung, dass

$$P\big(\frac{S}{100} \notin [3,4]\big) \leq \frac{7}{60} \tag{2}$$

gilt.

2.(3+3Punkte) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Berechnen Sie die charakteristische Funktion von X für alle nachfolgenden Fälle.

i) $X \sim Poi(\lambda)$, mit $\lambda > 0$.

ii) $X \sim U(a, b)$, mit $a < b$.

3.(3+3Punkte) Zeigen Sie mittels charakteristischer Funktionen, dass sowohl die Normalverteilung als auch die Poisson Verteilung faltungsstabil sind. Das heißt, zeigen Sie:

i) Ist $X_n \sim Poi(\lambda_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\lambda_n > 0$, so gilt $X_1 + ... + X_n \sim Poi(\lambda_1 + ...\lambda_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ unabhängig sind.

ii) Ist $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_n^2 > 0$, so gilt $X_1 + ... + X_n \sim N(\mu_1 + ...\mu_n, \sigma_1^2 + ...\sigma_n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ unabhängig sind.

Hinweis Die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen, bestimmt dessen Verteilung eindeutig. (D.h. wenn zwei Zufallsvariablen die gleiche charakteristische Funktion haben, dann haben sie auch die gleiche Verteilung.) Dies dürfen Sie in dieser und allen folgenden Aufgaben ohne Beweis verwenden.

4.(2+3+2+3Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

i) Gilt $X, Y \in \mathcal{L}^p$, so gilt auch $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}^p$ für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty)$.

ii) Es gilt $||XY||_1 \geq \big(\mathbb{E}|X|^{\frac{1}{p}}\big)^p \big(\mathbb{E}|Y|^{\frac{-1}{p-1}}\big)^{-(p-1)}$ für alle $p \in (1, \infty)$ und für alle Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Y \neq 0$ f.s. und $\mathbb{E}|Y|^{\frac{-1}{p-1}} < \infty$.

iii) Es gilt $||\frac{X+Y}{2}||_p^p + ||\frac{X-Y}{2}||_p^p \leq \frac{1}{2}||X||_p^p + \frac{1}{2}||Y||_p^p$ für alle $p \geq 2$ und $X, Y \in \mathcal{L}^p$.

iv) $\mathcal{L}^p$ ist gleichmäßig konvex für jedes $p \geq 2$, das heißt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall X, Y \in \mathcal{L}^p$: " $||X||_p, ||Y||_p \leq 1,\ ||\frac{X+Y}{2}||_p > 1 - \delta \Rightarrow ||X - Y||_p < \varepsilon$ ".

Bemerkung Mit etwas Aufwanf kann man zeigen, dass $\mathcal{L}^p$ auch für jedes $p \in (1, 2)$ gleichmäßig konvex ist, allerdings nicht für $p = 1$.
Hinweis Nehmen Sie für iii) ohne Beweis an, dass die Ungleichung für reelle Zahlen gilt, das heißt es gilt

$$\Big|\frac{x+y}{2}\Big|^p + \Big|\frac{x-y}{2}\Big|^p \leq \frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p \tag{3}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $p \geq 2$.

5.(3+6Punkte) Seien $X_1, X_2, ... \sim Exp(\lambda)$ verteilte Zufallsvariablen, wobei $\lambda > 0$. Ferner sei $Y \sim Geo(\frac{1}{2})$ und die Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ sei durch

$$Z := \sum_{k=1}^{Y} X_k \tag{4}$$

definiert.

i) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X_1.

ii) Zeigen Sie, dass $Z \sim Exp(\frac{\lambda}{2})$ gilt, falls der Zufallsvektor $(X_1, ...X_n, Y)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängig ist.