Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 10

Abgabe am 7.1.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable. Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}\, X$ von X, falls

(a) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,

(b) $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ mit Parameter $p \in (0,1)$,

(c) $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ mit Parametern $a < b$,

(d) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,

(e) X Pareto-verteilt ist mit Parametern $\alpha, k > 0$,

(f) X Rayleigh-verteilt ist mit Parameter $\sigma > 0$.

(g) $F_X(x) = (1 - 0.8e^{1-x})\, \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$.

Hinweis: Eine absolutstetige Zufallsvariable X heißt Pareto-verteilt mit Parametern $\alpha, k > 0$, falls ihre Dichte durch $f_X(x) = \frac{\alpha}{k} \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha+1} \mathbb{1}_{[k,\infty)}(x)$ gegeben ist.

Aufgabe 2 (2 + 1 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ beliebige integrierbare Zufallsvariablen. Seien ferner $a_1, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen.

(a) Zeige $\mathbb{E}(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n) = a_1\, \mathbb{E}\, X_1 + \ldots + a_n\, \mathbb{E}\, X_n$.

(b) Sei $k \geq 1, \lambda > 0$. Sei Y Erlang-verteilt mit Parametern k und λ. Bestimme $\mathbb{E}\, Y$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $r > 0$ und X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X^r) < \infty, P(X \geq 0) = 1$ und Verteilungsfunktion F. Zeige, dass

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_0^\infty r x^{r-1} (1 - F(x))\, \mathrm{d}x.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeige $\lim_{x \to -\infty} x \cdot F(x) = 0$.

Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{1}_B(X)$ *für alle* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable ist und berechne deren Erwartungswert.*