Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

ulm university universität uulm

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 11

Abgabe am 14.1.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Berechne das 2. Moment und die Varianz von X, falls

(a) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,

(b) $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ mit Parametern $a < b$,

(c) X Erlang-verteilt ist mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$,

(d) $F_X(x) = (1 - 0.8e^{1-x})\,\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1 = e^{-X}$ und $X_2 = \max\{X, 1\}$.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 Punkte)
Für eine Zufallsvariable X mit $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1$ heißt $m_X : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, wobei $m_X(t) = \mathbb{E}\, t^X$, die momenterzeugende Funktion von X.

(a) Zeige, dass m_X für jede Zufallsvariable X mit $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1$ wohldefiniert ist und m_X auf $(0,1)$ zwei mal differenzierbar ist.

(b) Sei nun zusätzlich $\mathbb{E}\, X^2 < \infty$. Zeige

$$\mathbb{E}\, X = \lim_{t \uparrow 1} m_X'(t) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}\, X = \lim_{t \uparrow 1}\left(m_X''(t) + m_X'(t) - (m_X'(t))^2\right).$$

(c) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Berechne $m_X(t)$ für jedes $t \in [0,1]$ und bestimme $\mathrm{Var}\, X$.

Beachte: Zusätzlich kann gezeigt werden, dass die Verteilung jeder Zufallsvariablen X mit $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1$ eindeutig durch ihre momenterzeugende Funktion m_X gegeben ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (2 + 4 Punkte)

Seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen. Berechne den Korrelationskoeffizienten von X und Y und überprüfe ob X und Y unabhängig sind, falls

(a) X und Y diskret verteilt sind mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x,y) = \frac{1}{12}(x^2 y + x) \qquad \text{für } x \in \{-1, 1\} \text{ und } y \in \{1, 2, 3\}$$

,

(b) X und Y absolutstetig verteilt sind mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + xy(x^2 - y^2)\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Seien X, Y, Z quadratisch integrierbare Zufallsvariablen. Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z)$$

.