Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 12

Abgabe am 21.1.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (4 + 2 Punkte)

Seien $X, Y \in L^4$ unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen. Betrachte die Zuvallsvariablen $U = XY, V = X + Y$ und $W = X - Y$.

(a) Berechne $\operatorname{Cov}(U, V), \operatorname{Cov}(V, W)$ und $\operatorname{Var}(U + V)$.

(b) Seien nun X und Y zusätzlich identisch verteilt mit $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Berechne $\varrho(U, V)$.

Aufgabe 2 (1 + 3 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit $X_1 \sim \mathrm{N}(0, 1)$ und $X_2 = X_1 \mathbb{1}_{\{Z=1\}} - X_1 \mathbb{1}_{\{Z=0\}}$, wobei $Z \sim \operatorname{Bin}(1, 1/2)$ eine von X_1 unabhängige Zufallsvariable ist.

(a) Berechne $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$.

(b) Bestimme die Randverteilung von X_2. Ist X bivariat normalverteilt?

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 Punkte)

(a) Seien $X, Y \in L^2$ Zufallsvariablen mit $X + Y \in L^2$. Zeige

$$\operatorname{Var}(X + Y) \leq 2\left(\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)} - \mathbb{E}\,X\,\mathbb{E}\,Y\right).$$

(b) Seien $r \in [1, \infty)$, $p, q > r$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und $X \in L^p$ sowie $Y \in L^q$ Zufallsvariablen. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\left(\mathbb{E}(|XY|^r)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\mathbb{E}(|X|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}(|Y|^q)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(c) Seien X und Y absolutstetig verteilte Zufallsvariablen mit den Dichten

$$f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,, x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \frac{5}{3} y^{-\frac{8}{3}}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)\,, y \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass $5\,\mathbb{E}(XY) \leq 37$.

Hinweis: Verwende für Teilaufgabe (a) die Minkowski- und für Teilaufgaben (b) und (c) die Hölder-Ungleichung.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Seien $\varepsilon, \delta > 0$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig. Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Definiere die Folge von Zufallsvariablen $S_1, S_2, \dots$ durch

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in B}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wie groß muss $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$P(|S_n - nP(X_1 \in B)| \leq n\varepsilon) \geq \delta$$

gilt?
Hinweis: Verwende die Tschebyschew-Ungleichung.