Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 13

Abgabe am 28.1.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable.

(a) Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ eine beliebige nicht-negative sowie monoton wachsende Funktion. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige die Markov-Ungleichung:

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|))}{f(\varepsilon)}.$$

(b) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $p > 0$. Zeige, dass für beliebiges $\delta > 0$ die Bernstein-Chernov-Abschätzung

$$P(X \geq (1+\delta)np) \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^{np}$$

gilt.
Hinweis: Wähle $f(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda > 0$ und wende die Markov-Ungleichung an.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $X, X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen über ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X - X_n| > \varepsilon) < \infty$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Zeige $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ für $n \to \infty$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen und $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$.

(a) Es sei $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/2+1/n]}(Y)$ und $X = \mathbb{1}_{[1/2,1]}(Y)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{P} X$ für $n \to \infty$.

(b) Es sei $X_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}(Y)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ für $n \to \infty$.

(c) Es sei $X_n \sim \mathrm{U}[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ und $X = 1/2$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$, und **nicht** $F_{X_n}(1/2) \to F_X(1/2) = 1$ für $n \to \infty$. Ist dies ein Widerspruch zur Aussage $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$?

(d) Es sei $X_n \sim \mathrm{Bin}\left(1, \frac{1}{n}\right)$ und $X_1, X_2, \dots$ seien unabhängig. Zeige, $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ für $n \to \infty$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$.
Hinweis: Betrachte den Limes Superior der Folge $\{A_n\}$ mit $A_n = \{X_n = 1\}$ und nutze Th. 2.7.

Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Es seien $X, X_1, X_2, \dots$ reellwertige Zufallsvariablen und $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von Ereignissen.

(a) Sei $X_n \sim \mathrm{Exp}(n)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$.

(b) Sei $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ und $P(A_n) = \frac{1}{n}$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$.

(c) Sei $X_n \sim \mathrm{Poi}(1/n)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ für $n \to \infty$.

(d) Sei X_n diskret gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$ und $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Zeige, dass $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$.

(e) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und $X_n \sim \mathrm{U}(-a, a)$, $a > 0$. Zeige, dass $\max\{|X_1|, \dots, |X_n|\} \xrightarrow{P} a$ für $n \to \infty$.

(f) Es habe X_n die Verteilungsfunktion $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)^n \mathbb{1}_{(1,\infty)(x)}$ mit $\alpha > 0$ und X habe die Verteilungsfunktion $G(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^\alpha}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Zeige, dass $n^{-\frac{1}{\alpha}} X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$.