Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 2

Abgabe am 29.10.2015 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in \mathcal{F}$ Ereignisse.

(a) Zeige
$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B).$$

(b) Zeige die folgende Dreiecksungleichung:
$$P(A \triangle C) \leq P(A \triangle B) + P(B \triangle C).$$

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

(a) Sei $\lambda \geq 0, \Omega = \mathbb{Z}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und sei die Abbildung $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch
$$P(A) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \sum_{k \in A} \lambda^{|k|}.$$
Für welche Werte von λ ist das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Sei $N \in \mathbb{N}, \Omega = \{1, \ldots, N\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und sei die Abbildung $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch
$$P(A) = \frac{1}{N!} \prod_{k \in A} k, \text{ für } A \neq \emptyset$$
und $P(\emptyset) = 0$. Für welche Werte von N ist das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $n \geq 1$ und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Zeige, dass folgende Bonferroni-Ungleichung gilt:
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - n + \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 Punkte)
Sei der Meßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ gegeben. Definiere die Abbildung $P : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ durch

$$P(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n(n+1)},$$

für jedes $A \subset \mathbb{N}$ und betrachte die Folge $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ mit $A_n = \{n+1, n+2, \ldots\}$ für jedes $n \geq 1$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Es gilt $P(\limsup_n A_n) = 0$.

(c) Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

Beachte: In Aufgabe 4 wurde gezeigt, dass die Rückrichtung des Borel-Cantelli-Lemmas (Korollar 2.3) im Allgemeinen nicht gilt. Später wird man sehen, dass unter zusätzlichen Bedingungen an die Folge $A_1, A_2, \ldots$ auch die Rückrichtung gilt (s. Theorem 2.7).

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ beliebig. Zeige die Siebformel

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)
N Studierende schreiben eine Klausur in einem Hörsaal. Jeder von ihnen legt seine Jacke und seinen Rucksack im Eingangsbereich des Hörsaals ab. Nach einer halben Stunde ertönt der Feueralarm und in der Hektik nimmt sich jeder Student und jede Stundentin rein zufällig irgendeine Jacke und irgendeinen Rucksack. Berechne nun mit Hilfe der Siebformel die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass kein Student sowohl die eigene Jacke als auch den eigenen Rucksack erwischt.