Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 7

Abgabe am 3.12.2015 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1 + 2 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ eine rechtsseitig stetige und monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(a) Zeige, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass F die Verteilungsfunktion von X ist.

(b) Wie lässt sich die Aussage von Teilaufgabe (a) für Zufallsvektoren verallgmeinern.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit multivariater Verteilungsfunktion $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ und mit univariaten (Rand-)Verteilungsfunktionen $F_X, F_Y : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$. Zeige, dass

$$\max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\} \leq H(x,y) \leq \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Ein fairer Würfel mit Ziffern von 1 bis 6 wird 4 mal geworfen. Sei X die Anzahl der gewürfelten Einsen und sei Y die Anzahl der unterschiedlichen Ziffern. Bestimme die multivariate Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) sowie die Verteilung von X und die Verteilung von Y.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (4 + 2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Betrachte die Totalvariation d_{TV} zwischen den Verteilungen P_X und P_Y, die durch

$$d_{\mathrm{TV}}(P_X, P_Y) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P_X(B) - P_Y(B)|$$

definiert ist.

(a) Sei $P_X(\mathbb{N}_0) = P_Y(\mathbb{N}_0) = 1$. Zeige, dass gilt:

$$d_{\mathrm{TV}}(P_X, P_Y) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |P(X = n) - P(Y = n)|.$$

Hinweis: Sei $D = \{n \in \mathbb{N}_0 : P(X = n) \geq P(Y = n)\}$. Zeige zunächst $P_X(A) - P_Y(A) \leq P_X(D) - P_Y(D)$ für jedes $A \subset \mathbb{N}$.

(b) Sei $\theta > 0, X \sim \mathrm{Bin}(1, \theta)$ und $Y \sim \mathrm{Poi}(\theta)$. Berechne $d_{\mathrm{TV}}(P_X, P_Y)$.

Aufgabe 5 (2 + 2 + 3 + 2 Punkte)

Sei $\alpha > 0$. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha xy, & \text{falls } x, y \geq 0, x + y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme α so, dass f die Dichte einer zweidimensionalen Zufallsvariablen ist.

Sei nun (X, Y) ein absolutstetiger Zufallsvektor mit der multivariaten Dichte f aus (a).

(b) Berechne die multivariate Verteilungsfunktion $F_{(X,Y)}$ des Zufallsvektors (X, Y).

(c) Berechne die Randdichten f_X und f_Y.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X > Y)$.