Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 8

Abgabe am 10.12.2015 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Sei $n \geq 2$ und $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen über ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Wenn $X_1, \ldots, X_n$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen ist, dann ist auch $cX_1, \ldots, cX_n$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen.

(b) Sei $n = 3$. Wenn X_1, X_2, X_3 eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen ist, dann sind auch X_1X_3 und X_2X_3 unabhängig.

(c) Wenn X_i und X_j unabhängig sind für alle $i \neq j$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist $X_1, \ldots, X_n$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen über ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Seien $p, q \in (0, 1)$, sei $X \sim \text{Geo}(p)$ und $Y \sim \text{Geo}(q)$. Zeige $\min\{X, Y\} \sim \text{Geo}(p+q-pq)$.

(b) Seien X, Y identisch verteilte absolutstetige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_X, F_Y und Wahrscheinlichkeitsdichten f_X, f_Y. Bestimme die Verteilungsfunktion sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\min\{X, Y\}$.

(c) Sei $\lambda > 0$ und $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Bestimme die Verteilung von $\min\{X, Y\}$.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

(a) Sei $X \sim \text{N}(0, 1)$ und $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Zeige, dass $\sigma X + \mu \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$.

(b) Sei $\lambda > 0$ und $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Berechne die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichte von X^4.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei $\rho \in [0,1)$. Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit der multivariaten Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right),$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Bestimme die bedingte Dichte $f_{X_1|X_2=x_2}$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (1 + 3 + 2 Punkte)
Sei $c > 0$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$ mit

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} cx_1x_2 + \exp(-x_1), & \text{falls } 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme c so, dass f eine multivariate Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit der multivariaten Wahrscheinlichkeitsdichte f.

(b) Bestimme die bedingten Dichten $f_{X_1|X_2=x_2}$ und $f_{X_2|X_1=x_1}$ für alle $x_1, x_2 \in (0,1)$.

(c) Sind X_1, X_2 unabhängig?