ulm university universität uulm

Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 9

Abgabe am 17.12.2015 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3 + 2 Punkte)
Eine Maschine produziert Holzkugeln mit zufälligem Radius R, wobei R eine auf dem Intervall $(a_0 - a, a_0 + a)$ gleichverteilte Zufallsvariable sei mit $a_0 > a > 0$.

(a) V bezeichne das (zufällige) Volumen der produzierten Holzkugeln. Berechne die Dichte von V.

(b) Sei $a_0 = 2$ und $a = 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass V zwischen $8\pi/3$ und $40\pi/3$ liegt?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $n \geq 1, \lambda > 0$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Zeige, dass $X = X_1 + \ldots + X_n$ Erlang-verteilt ist mit den Parametern n und λ.
Hinweis: Eine absolutstetige Zufallsvariable X heißt Erlang-verteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$, falls ihre Dichte durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \textit{falls } x > 0 \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x + 1)(2y + 1), & \text{falls } 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Bestimme die Dichten der Zufallsvariablen $U = XY$ und $V = X/Y$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

In Aufgabe 4 von Blatt 6 wurde die Rayleighverteilung eingeführt. Sei $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Eine Zufallsvariable $Y = \sigma\sqrt{-2\log(X)}$ heißt Rayleigh-verteilt mit Parameter $\sigma > 0$. Wir werden nun weitere Eigenschaften dieser Verteilung herleiten.

(a) Bestimme die Dichte und Verteilungsfunktion der Rayleigh-Verteilung.

(b) Seien Z_1, Z_2 unabhängig und standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariable $\sigma\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$ Rayleigh-verteilt ist mit Parameter σ.
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass das Integral

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{tz - t^2}} \,\mathrm{d}t$$

existiert für alle $z > 0$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gib ein Beispiel für einen Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ an, sodass X_1^2 und X_2^2 unabhängig sind, aber X_1 und X_2 nicht unabhängig sind.