Dipl.-Math. Stefan Roth 25.01.2016

Stochastik für WiWi - 1. Klausur WS14/15
Musterlösung

Aufgabe 1

(a) # Aktien insgesamt: $1000 + 3000 + 1500 = 5500$.

A: "Aktie A ausgewählt"
B: "Aktie B ausgewählt"
C: "Aktie C ausgewählt"

$$P(A) = \frac{1000}{5500} = \frac{2}{11}, \quad P(B) = \frac{3000}{5500} = \frac{6}{11}, \quad P(C) = \frac{1500}{5500} = \frac{3}{11}$$

F: "falsche Prognose", $\quad R = F^c$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} \boxed{P(F)} &= P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) \\ &= 0.4 \cdot \frac{2}{11} + 0.7 \cdot \frac{6}{11} + 0.6 \cdot \frac{3}{11} \\ &= \frac{6.8}{11} \quad \boxed{\approx 0.62} \end{aligned}$$

(b) Nach der Formel von Bayes und mit $P(R|A) = 0.6$ gilt:

$$\boxed{P(A|R)} = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} \overset{(a)}{=} \frac{0.6 \cdot \frac{2}{11}}{1 - \frac{6.8}{11}} = \frac{1.2}{4.2} \quad \boxed{\approx 0.286}$$

Aufgabe 2

(a) # Mitarbeiter Controlling: $2 + 6 + 5 = 13$
Mitarbeiter Finanzwirtschaft: $1 + 4 + 2 = 7$
Mitarbeiter Wirtschaftsprüfung: $1 + 3 + 4 = 8$
Mitarbeiter insgesamt: $13 + 7 + 8 = 28$.

C: "Controlling nimmt an Konferenz teil"
F: "Finanzwirtschaft nimmt an Konferenz teil"
W: "Wirtschaftsprüfung nimmt an Konferenz teil"

X: # Doktoranden die mitfahren dürfen, $\quad X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} \boxed{P(X=0)} &= P(X=0|C)P(C) + P(X=0|F)P(F) + P(X=0|W)P(W) \\ &= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} \cdot \frac{13}{28} + 0 \cdot \frac{7}{28} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{8}{28} \\ &= \frac{1262}{10780} \quad \boxed{\approx 0.12} \end{aligned}$$

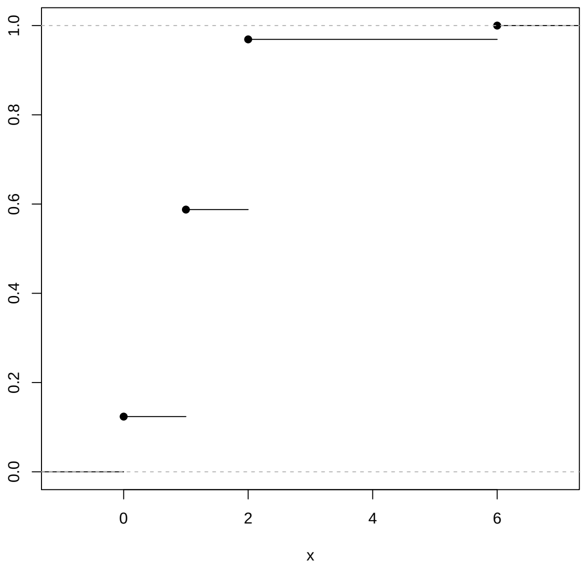
$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(X=1|C)P(C) + P(X=1|F)P(F) + P(X=1|W)P(W) \\
&= \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} \cdot \frac{13}{28} + \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{7}{28} + \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{8}{28} \\
&= \frac{19412}{43120} \quad \approx 0.45
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(X=2|C)P(C) + P(X=2|F)P(F) + P(X=2|W)P(W) \\
&= \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} \cdot \frac{13}{28} + \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{7}{28} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{8}{28} \\
&= \frac{16152}{43120} \quad \approx 0.37
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) \\
&= 1 - \frac{40612}{43120} = \frac{2508}{43120} \quad \approx 0.06
\end{aligned}
$$

$$
\text{Damit ist } F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x < 0 \\ 0.12 & ;\ 0 \leq x < 1 \\ 0.57 & ;\ 1 \leq x < 2 \\ 0.94 & ;\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & ;\ x \geq 3 \end{cases}
$$

Skizze:



(b) Mit den in (a) berechneten Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$
\mathbb{E}X = \frac{19412 + 2 \cdot 16152 + 3 \cdot 2508}{43120} = \frac{59240}{43120} \quad \approx 1.37
$$

Aufgabe 3

X: # Nachkommen unter 2000 Eiern, $n = 2000$, $p = 0.01$, $X \sim Bin(n,p)$

Verwende den zentralen Grenzwertsatz um $P(X > 30)$ zu approximieren:

$$\begin{aligned}
P(X > 30) &= 1 - P(X \leq 30) \\
&= 1 - P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{30 - 20}{\sqrt{19.8}}\right) \\
&\overset{\text{ZGWS}}{\approx} 1 - \phi\left(\frac{10}{\sqrt{19.8}}\right) \\
&\approx 1 - \phi(2.25) \\
&\overset{\text{Tabelle}}{=} 1 - 0.98778 \quad = \ 0.012222
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) $0.5 = \mathbb{E}X = p_1 + 0.01 + 2 \cdot (0.12 + 0.005) \ \Leftrightarrow \ p_1 = 0.24$
$1 = 0.6 + p_1 + 0.12 + p_2 + 0.01 + 0.005 \ \Leftrightarrow \ p_2 = 0.025$

(b) $\mathbb{E}X = 0.5$ nach Vorgabe.
$\mathbb{E}Y = -(0.6 + 0.24 + 0.12) + 2 \cdot (0.025 + 0.01 + 0.005) = -0.88$
$\mathbb{E}XY = -0.24 - 2 \cdot 0.12 + 2 \cdot 0.01 + 4 \cdot 0.005 = -0.44$
$Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = -0.44 + 0.5 \cdot 0.88 \ = 0$

(c) $P(X = 0, Y = -1) = 0.6 = 0.625 \cdot 0.96 = P(X = 0)P(Y = -1)$
$P(X = 0, Y = 2) = 0.025 = 0.625 \cdot 0.04 = P(X = 0)P(Y = 2)$
$P(X = 1, Y = -1) = 0.24 = 0.25 \cdot 0.96 = P(X = 1)P(Y = -1)$
$P(X = 1, Y = 2) = 0.01 = 0.25 \cdot 0.04 = P(X = 1)P(Y = 2)$
$P(X = 2, Y = -1) = 0.12 = 0.125 \cdot 0.96 = P(X = 2)P(Y = -1)$
$P(X = 2, Y = 2) = 0.005 = 0.125 \cdot 0.04 = P(X = 2)P(Y = 2)$

Also sind X und Y unabhängig.

Aufgabe 5

(a) $f_\alpha(t) \geq 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$. Es soll gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)dt = c \cdot \int_0^\alpha (\alpha - t)^2 dt = c\left[-\frac{1}{3}(\alpha - t)^3\right]_{t=0}^{\alpha} = c \cdot \frac{1}{3}\alpha^3 \Leftrightarrow c = \tfrac{3}{\alpha^3} \ (> 0)$$

Also ist $f_\alpha(t) = \frac{3}{\alpha^3}(\alpha - t)^2 \mathbb{1}_{(0,\alpha)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

(b) Sei $X \sim F_\alpha$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\alpha X &= \int_0^\alpha t \frac{3}{\alpha^3}(\alpha - t)^2 dt \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{3}{\alpha^3}\left(-\frac{t}{3}(\alpha - t)^3 \ \Big|_{t=0}^{\alpha} + \frac{1}{3}\int_0^\alpha (\alpha - t)^3 dt\right) \\
&= \frac{1}{\alpha^3}\int_0^\alpha (\alpha - t)^3 dt \\
&= \frac{\alpha}{4}
\end{aligned}$$

d.h. $\frac{\alpha}{4} = 0.25 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

(c) Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe zur Verteilung F_α.

$$\mathbb{E}_\alpha X = \bar{x} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \bar{x} \Leftrightarrow \alpha = 4 \cdot \bar{x}$$

Ein Momentenschätzer für $\alpha > 0$ ist also gegeben durch $\hat{\alpha}(X_1, \dots, X_n) = 4\bar{X}$.

Aufgabe 6

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{25+5+15+9+10+8}{6} = 12 \\ s^2 &= \frac{13^2+7^2+3^2+3^2+2^2+4^2}{5} = 51.2 \end{aligned}$$

(b) Konfidenzintervall bei unbekannter Varianz:

$$I_1 = \left[\bar{X} - \frac{cS}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{cS}{\sqrt{n}}\right].$$

$n = 6$, $s = 7.16$, $\bar{x} = 12$, $c = t_{5,0.975} = 2.571$ (Tabelle). Also gilt

$$I_1 = \left[12 - \frac{2.571 \cdot 7.16}{\sqrt{6}}, 12 + \frac{2.571 \cdot 7.16}{\sqrt{6}}\right] \approx [4.48, 19.52].$$

(c) Konfidenzintervall bei bekannter Varianz:

$$I_2 = \left[\bar{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

$\sigma = \sqrt{125}$, $c = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$ (Tabelle). Es bezeichne $L(I_2)$ die Länge des Intervalls I_2. Dann gilt

$$L(I_2) = 2\frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq (2c\sigma)^2 = 4 \cdot 125 \cdot 1.96^2 = 1920.8$$

Also muss $n \geq 1921$ gelten.

(d) Test der Varianz bei unbekanntem Erwartungswert:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

wobei $\sigma_0 = 10$. Hypothesenpaar:

$$H_0 : \sigma \leq 10 \quad vs. \quad H_1 : \sigma > 10$$

bzw. äquivalent:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 100 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 > 100$$

H_0 wird abgelehnt, falls T "zu groß" ist, d.h. falls $T > \chi^2_{n-1,0.99} = \chi^2_{5,0.99} = 15.09$ (Tabelle). Es gilt

$$T(25, 5, 15, 9, 10, 8) = 5 \cdot \frac{51.2}{100} = 2.56 < 15.09,$$

d.h. H_0 wird nicht verworfen.