

Dr. Patricia Alonso-Ruiz Dipl.-Math. Stefan Roth WS 2014/15 01.04.2015

Stochastik für WiWi - 2. Klausur

Hinweise:

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein nicht programmierbarer Taschenrechner; Ein von Hand beschriftetes DIN A4 Blatt.
- Bewertung: Es gibt 110 Punkte; 100 Punkte entsprechen 100%. Der Lösungsweg muss stets nachvollziehbar sein; gemachte Aussagen müssen begründet werden. Ergebnisse sind auf vier Nachkommastellen zu runden!
- Tabellen für Standardnormalverteilung, t-Verteilung und χ^2 -Verteilung sind auf der Rückseite zu finden.

Aufgabe 1 (10 + 7 Punkte)

Betrachte folgendes Zufallsexperiment: In einer Urne befinden sich zu Beginn sechs rote Kugeln. Wir würfeln mit einem fairen Würfel und tauschen anschließend in Höhe der Augenzahl des Würfels rote durch blaue Kugeln aus (z.B. wurde eine vier geworfen werden vier der roten Kugeln durch blaue ausgetauscht). Danach ziehen wir zufällig eine Kugel aus der Urne. Es bezeichne X die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

- (a) Bestimme die Verteilung von X und skizziere die Verteilungsfunktion.
- (b) Bestimme Erwartungswert und Varianz von X.

Aufgabe 2 (12 + 8 Punkte)

An der ersten Klausur zu Stochastik für WiWi's haben 166 Studenten teilgenommen. Nach Auswertung der korrigierten Klausuren ergab sich, dass 50 Studenten eine Note besser als 2,0 und 40 eine Note schlechter als 3,0 hatten. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Aufgabe bearbeitet wurde in der jeweiligen Gruppe durch folgende Tabelle gegeben.

Note	besser als 2,0	Noten von 2,0 bis 3,0	schlechter als 3,0	
P(,Aufgabe bearbeitet")	0,8	0,5	0,3	

Insgesamt bestand die Klausur aus sechs Aufgaben.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Student vier der sechs Aufgaben bearbeitet?
- (b) Ein Student hat genau vier der sechs Aufgaben bearbeitet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war seine Note schlechter als eine 3.0?

Aufgabe 3 (5 + 14 + 5 Punkte)

Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) & \text{, falls } 0 \le x, y \le 1\\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

- (a) Zeige, dass es sich bei f tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.
- (b) Bestimme Var(X), Var(Y) und Cov(X,Y) und entscheide, ob X und Y unabhängig sind.
- (c) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $P(X \ge 0)$, $P(X \ge 1/4, Y \le 1/2)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Anzahl der Nebeltage pro Jahr in Ulm $\mathsf{geom}(p)$ -verteilt ist, wobei p=0,01. Die Anzahl der Nebeltage pro Jahr sind dabei unabhängig vom betrachteten Jahr. Berechne mit einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in den nächsten 150 Jahren mindestens 16000 Nebeltage in Ulm gibt.

Aufgabe 5 (10 + 5 Punkte)

Die Dichte der absolut stetigen Zufallsvariable X sei wie folgt gegeben:

$$f(t) = 2t\sqrt{\lambda}e^{-t^2\sqrt{\lambda}}, \quad t \ge 0, \ \lambda > 0$$

Es sei X_1, \ldots, X_n eine Zufallsstichprobe zu der oben gegebenen Verteilung.

- (a) Bestimme einen Maximum-Likelihood Schätzer für λ .
- (b) Bestimme den Wert des Schätzers aus (a) für die Stichprobe $(x_1, \ldots, x_5) = (0, 5, 1, 2, 0, 7, 0, 3, 1, 5)$.

Aufgabe 6 (6 + 8 + 8 Punkte)

Die Kosten (in Mio. Euro) von 5 zufällig ausgewählten Hollywoodfilmen, die im Jahr 2014 produziert wurden sind wie folgt gegeben:

Es kann davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei um die Realisierung einer Zufallsstichprobe zur Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 handelt. Die Parameter μ und σ^2 sind nicht bekannt.

- (a) Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.
- (b) Bestimme ein 90%-Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 .
- (c) Eine renommierte Fachzeitschrift schrieb in ihrer ersten Ausgabe des Jahres 2015, dass die erwarteten Produktionskosten eines Hollywoodfilms produziert in 2014 bei 63,5 Millionen Euro lagen. Teste dieses Behauptung zum Niveau 0.05.

Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

	0,00	0,01	0,02	0,03	0.04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5	0.50399	0,50798	0,51197	0,51595	0.51994	0.52392	0.5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0.5438	0,54776	0.55172	0,55567	0,55962	0,56356	0.56749	0,57142	0,57535
0.2	0.57926	0,58317	0.58706	0.59095	0,59483	0,59871	0,60257	0.60642	0,61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6293	0,63307	0.63683	0.64058	0.64431	0,64803	0.65173
0.4	0.65542	0.6591	0.66276	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0,5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0.73237	0,73565	0,73891	0,74215	0.74537	0.74857	0,75175	0.7549
0.7	0,75804	0.76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0.80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Erklärung: Die Tabelle enthält auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte von $\Phi(x)$, wobei $0 \le x \le 4,09$ gilt und Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte den Wert, der bis zur ersten Nachkommastelle x entspricht. Dann geht man bis zur Spalte der zweiten Nachkommastelle von x nach rechts. Beispielsweise steht $\Phi(0,12)$ in der zweiten Zeile und dritten Spalte: $\Phi(0,12) \approx 0,54776$. Für negative x verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Für $x \ge 4,1$ verwenden wir die Näherung $\Phi(x) \approx 1$.

Erstellt mit Hilfe der Software R, Version 1.40, siehe http://www.r-project.org Vergleiche https://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_Standardnormalverteilung

Quantile $x_{n;\beta}$ der Chi – Quadrat – Verteilung χ_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $x_{9;0..95} \approx 16.92$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β		1000			5000	0.007				
0.001	0.00	0.00	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.83	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

Quantile $t_{n:\beta}$ zu Students t-Verteilung t_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $t_{9,0..95} \approx 1.833$

n	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.9875	n
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	1
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	2
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.177	3
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.163	5
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	2.969	6
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.841	7
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.752	8
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.685	9
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.634	10
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.593	11
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.560	12
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.533	13
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.510	14
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.490	15
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.473	16
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.458	17
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.445	18
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.433	19
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.423	20