Dr. Patricia Alonso-Ruiz
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2014/15
14.02.2015

# Stochastik für WiWi - 1. Klausur

**Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein nicht programmierbarer Taschenrechner; Ein von Hand beschriftetes DIN A4 Blatt.
- **Bewertung:** Es gibt 110 Punkte; 100 Punkte entsprechen 100%. Der Lösungsweg muss stets nachvollziehbar sein; gemachte Aussagen müssen begründet werden. **Ergebnisse** sind auf vier Nachkommastellen zu runden!
- **Tabellen** für Standardnormalverteilung, t-Verteilung und $\chi^2$-Verteilung sind auf der Rückseite zu finden.

**Aufgabe 1** (10 + 8 Punkte)

Dein Aktienportfolio besteht aus 1000 Aktien des Unternehmens A, 3000 Aktien des Unternehmens B und 1500 Aktien des Unternehmens C. Um Kursprognosen einzuholen gehst du regelmäßig zu dem Börsenanalysten Hans Glaubimol. Von diesem ist bekannt, dass er den Kurs von Unternehmen A mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%, den von Unternehmen B mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% und den von Unternehmen C mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% richtig prognostiziert.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit prognostiziert Herr Glaubimol den Kurs einer aus deinem Portfolio zufällig ausgewählten Aktie falsch?

(b) Der Kurs einer deiner Aktien wurde richtig prognostiziert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war es eine Aktie des Unternehmens A?

**Aufgabe 2** (8 + 7 Punkte)

Die Fakultät für Wirtschaftswissenschaften an der Universität von Alt-Ulm besteht aus den drei Instituten "Controlling", "Finanzwirtschaft" und "Wirtschaftsprüfung". Folgendes Tableau zeigt die Anzahl der jeweiligen Mitarbeiter der Institute.

| Institut | Controlling | Finanzwirtschaft | Wirtschaftsprüfung |
|---|---|---|---|
| Professoren | 2 | 1 | 1 |
| Doktoranden | 6 | 4 | 3 |
| Studenten | 5 | 2 | 4 |

Bei einer Konferenz im März sollen vier Mitarbeiter eines der Institute Teilnehmen, die durch folgendes Losverfahren bestimmt werden. Im ersten Schritt wird das Institut bestimmt. Dazu wird aus allen Mitarbeitern zufällig einer ausgewählt. Das Institut, bei dem dieser Mitarbeiter angestellt ist, darf vier Mitarbeiter zur Konferenz schicken. Die Professoren des auf diese Weise bestimmten Instituts fahren sicher mit. Die noch verbleibenden Personen werden schließlich zufällig aus den Doktoranden und Studenten (des im ersten Schritt bestimmten Instituts) ausgewählt.

(a) Es bezeichne $X$ die Anzahl der Doktoranden, die zur Konferenz mitfahren dürfen. Bestimme die Verteilung von $X$ und skizziere die Verteilungsfunktion.

(b) Bestimme Erwartungswert und Varianz von $X$.

**Aufgabe 3** (8 Punkte)

Ein Insekt legt 2000 Eier. Aus jedem Ei entsteht (unabhängig von allen anderen Eiern) mit Wahrscheinlichkeit $10^{-2}$ ein Nachkomme. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als 30 Nachkommen gibt mittels einer geeigneten Approximation.

**Aufgabe 4** (6 + 8 + 10 Punkte)

Die gemeinsame Zähldichte des Zufallsvektors $(X, Y)$ ist durch folgendes Tableau gegeben:

| $Y \setminus X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0,6 | $p_1$ | 0,12 |
| 2 | $p_2$ | 0,01 | 0,005. |

Es sei bekannt, dass $\mathbb{E}X = 0.5$ ist.

(a) Bestimme $p_1$ und $p_2$.

(b) Nimm nun an, dass $p_1 = 0,24$ und $p_2 = 0,025$ gilt. Berechne die Kovarianz von $X$ und $Y$.

(c) Sind $X$ und $Y$ unabhängig?

**Aufgabe 5** (8 + 10 + 5 Punkte)

Für $\alpha > 0$ habe die Verteilung $F_\alpha$ die Dichte $f_\alpha$, gegeben durch

$$f_\alpha(t) := c \cdot (\alpha - t)^2 \mathbb{1}_{(0,\alpha)}(t).$$

(a) Bestimme $c$ so, dass $f_\alpha$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Es sei nun $c = 3 \cdot \alpha^{-3}$ und $X \sim F_\alpha$. Bestimme $\alpha > 0$ so, dass $\mathbb{E}_\alpha X = 0.25$.

(c) Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe zur Verteilung $F_\alpha$. Bestimme mittels der Momentenmethode einen Schätzer für den (unbekannten) Parameter $\alpha$.

**Aufgabe 6** (6 + 5 + 5 + 6 Punkte)

In einem Krankenhaus wurde an 6 zufällig ausgewählten Tagen die Anzahl der ambulant operierten Patienten gezählt. Nachfolgendes Tableau zeigt das Resultat der Zählungen.

25; 5; 15; 9; 10; 8.

Es kann davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei um die Realisierung einer Zufallsstichprobe zur Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$ handelt. Die Parameter $\mu$ und $\sigma^2$ sind nicht bekannt.

(a) Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.

(b) Bestimme ein 95%-Konfidenzintervall für $\mu$.

(c) Nimm nun an, dass $\sigma^2 = 125$ gilt. Wie groß müsste die Stichprobe sein, damit in diesem Fall das 95%-Konfidenzintervall höchstens Länge 1 hat?

(d) Ein Krankenhausverwalter meint, dass die Standardabweichung der Anzahl ambulant operierter Patienten pro Tag bei mehr als 10 liegt. Teste seine Behauptung zum Niveau 0.01.

## Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

| | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,5279 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,5438 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,6293 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,6591 | 0,66276 | 0,6664 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,7054 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,7673 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,7823 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,8665 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,879 | 0,881 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,9222 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,94738 | 0,94845 | 0,9495 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,9608 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,9732 | 0,97381 | 0,97441 | 0,975 | 0,97558 | 0,97615 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,9803 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,983 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,985 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,9884 | 0,9887 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,9901 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,9943 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,9956 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,9972 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,9976 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,999 |
| 3,1 | 0,99903 | 0,99906 | 0,9991 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2 | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,9994 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,9996 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4 | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,9997 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| 3,5 | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,9998 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| 3,6 | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| 3,7 | 0,99989 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| 3,8 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| 3,9 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |
| 4,0 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 |

Erklärung: Die Tabelle enthält auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte von $\Phi(x)$, wobei $0 \leq x \leq 4{,}09$ gilt und $\Phi$ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte den Wert, der bis zur ersten Nachkommastelle $x$ entspricht. Dann geht man bis zur Spalte der zweiten Nachkommastelle von $x$ nach rechts. Beispielsweise steht $\Phi(0{,}12)$ in der zweiten Zeile und dritten Spalte: $\Phi(0{,}12) \approx 0{,}54776$. Für negative $x$ verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Für $x \geq 4{,}1$ verwenden wir die Näherung $\Phi(x) \approx 1$.

Erstellt mit Hilfe der Software R, Version 1.40, siehe `http://www.r-project.org`
Vergleiche `https://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_Standardnormalverteilung`

## Quantile $x_{n;\beta}$ der Chi – Quadrat –Verteilung $\chi_n$

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $x_{9;0.95} \approx 16.92$

| n / β | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.001 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.09 | 0.21 | 0.38 | 0.60 | 0.86 | 1.15 | 1.48 |
| 0.005 | 0.00 | 0.01 | 0.07 | 0.21 | 0.41 | 0.68 | 0.99 | 1.34 | 1.73 | 2.16 |
| 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.11 | 0.30 | 0.55 | 0.87 | 1.24 | 1.65 | 2.09 | 2.56 |
| 0.025 | 0.00 | 0.05 | 0.22 | 0.48 | 0.83 | 1.24 | 1.69 | 2.18 | 2.70 | 3.25 |
| 0.05 | 0.00 | 0.10 | 0.35 | 0.71 | 1.15 | 1.64 | 2.17 | 2.73 | 3.33 | 3.94 |
| 0.1 | 0.02 | 0.21 | 0.58 | 1.06 | 1.61 | 2.20 | 2.83 | 3.49 | 4.17 | 4.87 |
| 0.25 | 0.10 | 0.58 | 1.21 | 1.92 | 2.67 | 3.45 | 4.25 | 5.07 | 5.90 | 6.74 |
| 0.5 | 0.45 | 1.39 | 2.37 | 3.36 | 4.35 | 5.35 | 6.35 | 7.34 | 8.34 | 9.34 |
| 0.75 | 1.32 | 2.77 | 4.11 | 5.39 | 6.63 | 7.84 | 9.04 | 10.22 | 11.39 | 12.55 |
| 0.9 | 2.71 | 4.61 | 6.25 | 7.78 | 9.24 | 10.64 | 12.02 | 13.36 | 14.68 | 15.99 |
| 0.95 | 3.84 | 5.99 | 7.81 | 9.49 | 11.07 | 12.59 | 14.07 | 15.51 | 16.92 | 18.31 |
| 0.975 | 5.02 | 7.38 | 9.35 | 11.14 | 12.83 | 14.45 | 16.01 | 17.53 | 19.02 | 20.48 |
| 0.99 | 6.63 | 9.21 | 11.34 | 13.28 | 15.09 | 16.81 | 18.48 | 20.09 | 21.67 | 23.21 |
| 0.995 | 7.88 | 10.60 | 12.84 | 14.86 | 16.75 | 18.55 | 20.28 | 21.96 | 23.59 | 25.19 |
| 0.999 | 10.83 | 13.82 | 16.27 | 18.47 | 20.52 | 22.46 | 24.32 | 26.13 | 27.88 | 29.59 |

## Quantile $t_{n;\beta}$ zu Students $t$ -Verteilung $t_n$

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $t_{9;0..95} \approx 1.833$

| n | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.9875 | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 0.727 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 25.452 | 1 |
| 2 | 0.289 | 0.617 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.205 | 2 |
| 3 | 0.277 | 0.584 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.177 | 3 |
| 4 | 0.271 | 0.569 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.495 | 4 |
| 5 | 0.267 | 0.559 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.163 | 5 |
| 6 | 0.265 | 0.553 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 2.969 | 6 |
| 7 | 0.263 | 0.549 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.841 | 7 |
| 8 | 0.262 | 0.546 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.752 | 8 |
| 9 | 0.261 | 0.543 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.685 | 9 |
| 10 | 0.260 | 0.542 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.634 | 10 |
| 11 | 0.260 | 0.540 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.593 | 11 |
| 12 | 0.259 | 0.539 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.560 | 12 |
| 13 | 0.259 | 0.538 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.533 | 13 |
| 14 | 0.258 | 0.537 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.510 | 14 |
| 15 | 0.258 | 0.536 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.490 | 15 |
| 16 | 0.258 | 0.535 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.473 | 16 |
| 17 | 0.257 | 0.534 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.458 | 17 |
| 18 | 0.257 | 0.534 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.445 | 18 |
| 19 | 0.257 | 0.533 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.433 | 19 |
| 20 | 0.257 | 0.533 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.423 | 20 |