Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
8.1.2015

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 11

Abgabe: 15. Januar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 1 + 3 Punkte)

Es sei f_p gegeben durch

$$f_p(x) = \begin{cases} 2p, & \text{falls } x \in \{-1, 1\} \\ p, & \text{falls } x = 0 \\ 1-5p, & \text{falls } x = 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche p ist f_p eine Zähldichte? Von nun an betrachten wir nur noch solche p und bezeichnen mit F_p die Verteilung mit Zähldichte f_p.

(b) Es sei $X \sim F_p$. Berechne $\mathbb{E}(X)$.

(c) Konstruiere mit der Momentenmethode einen Schätzer für p. Schätze mit diesem Schätzer p basierend auf der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_7) = (2, 1, 2, -1, 1, 2, 2)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die günstige Bolognesesauce von nein! enthält laut Packungsangabe mindestens 30 g Hackfleisch. Bei der Untersuchung von 6 Gläsern ergeben sich folgende Werte:

29g, 32g, 31g, 27g, 31g, 32g.

Bestimme für $\alpha \in \{0.9, 0.95, 0.99\}$ mittels der Tschebyscheff Ungleichung ein α Konfidenzintervall für μ, falls $\sigma = 3$.

Aufgabe 3 (1 + 2 + 3 Punkte)

Es sei $\Omega = \{42, \alpha, \Gamma, \triangleright, \boxdot, \circledast\}$. Begründe [1] ob es sich bei folgenden Mengensystemen Σ_1, Σ_2 und Σ_3 um σ-Algebren auf Ω handelt:

(a) $\Sigma_1 = \{\emptyset, \Omega, \{42, \Gamma, \boxdot, \circledast\}, \{\alpha, \triangleright\}\}$

(b) $\Sigma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{42, \alpha, \Gamma\}, \{\alpha, \Gamma, \triangleright, \boxdot, \circledast\}, \{\triangleright, \boxdot, \circledast\}, \{42\}, \{42, \triangleright, \boxdot, \circledast\}, \{\alpha, \Gamma\}\}$

(c) $\Sigma_3 = \{\emptyset, \Omega, \{42, \alpha, \Gamma, \triangleright\}, \{42, \boxdot, \circledast\}, \{\alpha, \Gamma, \triangleright\}, \{42\}\}$

[1] Für endliche Systeme $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ kann (iii) in Definition 3.1.2 wie folgt ersetzen: *Sind $A, B \in \Sigma$, so ist auch $A \cup B \in \Sigma$.* Es müssen also nicht alle Vereinigungen von Ereignissen betrachtet werden, sondern lediglich paarweise.

Aufgabe 4 (2 + 4 Punkte)

Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ und $A_2 = \{3, 4, 5\}$.

(a) Bestimme $\sigma(A_1, A_2)$.

(b) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, wobei $\Sigma = \sigma(A_1, A_2)$ ist. Sind die folgenden Abbildungen X und Y Zufallsvariablen? (Eine Antwort ist zu begründen!)

(i) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$

(ii) $Y : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \{3, 4, 5\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X mit folgender Zähldichte:

$$f(x, p) = \begin{cases} 3p/4 & \text{falls } x \in \{-3, 0\} \\ 1 - 3p/2 & \text{falls } x = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $p \in (0, 2/3)$.