Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
29.1.2016

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 15

Abgabe: 5. Februar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine absolutstetige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, \quad x \geq 0$$

beschrieben werden kann, wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

(a) Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

(b) Die folgende Tabelle zeigt 15 Brenndauern (in 1000 Stunden) der Glühbirnen die in unabhängigen Versuchen ermittelt wurden.

1.530	1.173	1.832	1.075	1.539
0.998	2.083	0.693	2.529	1.639
1.325	1.487	1.298	1.743	1.432

Welches Ergebnis liefert der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ aus Teil (a) für diese Daten?

Aufgabe 2 (3 + 4 Punkte)

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine u.i.v. Zufallsstichprobe. Bestimme[1] den Maximum-Likelihood Schätzer für θ, falls

(a) $X_1 \sim U([0, \theta])$, $\theta > 0$.

(b) X_1 die Dichte

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} \exp\left(-\frac{(\log t - \theta)^2}{2}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

besitzt.

Aufgabe 3 (3 + 2 + 2 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die Veränderung der Getreidepreise (in Euro) in den Monaten Januar bis Dezember 2012.

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1.15	1.86	-0.37	-0.81	0.73	0.51	2.77	2.76	0.3	0.5	-0.1	0.62

[1] Hinweis zu (a): Bestimme die Maximalstelle der Likelihoodfunktion ohne diese abzuleiten (und auch ohne die Loglikelihoodfunktion zu verwenden).

(a) Wir fassen die Daten in der Tabelle als Realisierungen einer Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{12})$ auf, wobei bekannt sei, dass die zugehörige Verteilung Varianz $\sigma^2 = 1$ hat. Bestimme ein 95 % Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert μ unter Verwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung.

(b) Bestimme ein 95 % Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert μ unter der Annahme, dass die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_{12}$ normalverteilt sind mit Varianz $\sigma^2 = 1$.

(c) Wie groß müsste der Stichprobenumfang gewählt werden, damit das Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 höchstens die Länge 0.1 hat? Vergleiche die Fälle in (a) und (b).

Hinweise:

- Dieses Übungsblatt ist das letzte in diesem Semester.
- Bitte meldet euch **alle** zur Vorleistung an. Auch wenn ihr sie nicht besteht habt ihr keine Nachteile zu befürchten. Wenn ihr die Vorleistung bestanden habt und ich sie euch bestätigt habe, könnt ihr euch damit auch in den kommenden Semestern zur Klausur "Stochastik für WiWi" anmelden ohne diese erneut machen zu müssen.
- Alle Themen, die bis einschließlich 3. Februar in der Vorlesung behandelt wurden sind klausurrelevant.
- Am Dienstag den 9. Februar wird Herr Kampf eine Übungsveranstaltung halten. Am Mittwoch den 10. Februar wird die bereits online verfügbare 2. Klausur aus dem letzten WS vorgerechnet.