Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
27.11.2015

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 7

Abgabe: 4. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein fairer Würfel wird so lange geworfen, bis jede Zahl mindestens einmal gefallen ist. Es bezeichne R die Anzahl der benötigten Würfe. Berechne $\mathbb{E}R$.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf der Menge $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Sei $Y = (X + 1)^2$.

(a) Bestimme die Zähldichte des Zufallsvektors (X, Y).

(b) Bestimme $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

Y	$X = 1$	2	3
1	p_1	p_2	p_3
2	p_4	0	p_5
3	0	p_6	0

Für $k = 1, 2, 3$ sei weiterhin bekannt, dass

- $\mathbb{P}(Y = 1 \,|\, X = k) = 2/3$.
- $\mathbb{P}(X = k \,|\, Y = 1) = k/6$.

Bestimme $p_1, \ldots, p_6$.

Aufgabe 4 (2 + 3 Punkte)

Beim Spiel „5-Finger-Morra“ zeigen beide Spieler zugleich ein bis fünf Finger. Gleichzeitig geben sie einen Tipp ab, wie viele Finger insgesamt gezeigt werden (also 2-10). Ruft ein Spieler die korrekte Anzahl, bekommt er einen Punkt. Wir gehen davon aus, dass beide Spieler die Anzahl der Finger die sie zeigen zufällig wählen, ohne eine Strategie zu bevorzugen. Es sei X die Anzahl der Finger, die Spieler 1 zeigt und Y sei die Anzahl der Finger, die Spieler 2 zeigt. Z sei die Gesamtzahl der gezeigten Finger.

(a) Bestimme die Zähldichte des Zufallsvektors (X, Z).

(b) Besteht eine Korrelation zwischen der Gesamtzahl und der Anzahl der Finger die Spieler 1 zeigt? Berechne $\mathrm{Cov}(X, Z)$.

Aufgabe 5 (3 + 1 + 3 Punkte)

Betrachte folgendes Experiment: In einer Urne befindet sich zu Beginn eine rote Kugel. Wir werfen eine faire Münze so lange, bis sie „Kopf“ zeigt. Fällt im X-ten Versuch zum ersten mal „Kopf“, so legen wir anschließend X blaue Kugeln dazu. Wir mischen die Kugeln in der Urne durch und ziehen eine Kugel. Y sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

(a) Bestimme die Zähldichten von Y und (X, Y).

(b) Begründe ohne Rechnung, welches Vorzeichen die Kovarianz von X und Y haben wird.

(c) Bestimme $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Hinweis: Verwende in Teil (a) folgende Identität:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t x^k dx = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} x^k dx = \int_0^t \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx = -\log(1-t) - t$$

für $t \in (0, 1)$.