Dr. Jürgen Kampf — WS 2015/16
Dipl.-Math. Stefan Roth — 11.12.2015

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 9

Abgabe: 18. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Urne A enthalte 5 weiße und 7 schwarze Kugeln und Urne B enthalte 8 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen zunächst zufällig eine Kugel aus A und fügen diese der Urne B hinzu. Danach wird zufällig eine Kugel aus B gezogen und zu A hinzugefügt. Zum Schluß wird zufällig eine Kugel aus A gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt gezogene Kugel weiß ist?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Eine Urne enthält jeweils 5 rote, blaue und weiße Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander drei Kugeln gezogen. Nach jedem Zug wird die Kugel zurück in die Urne gelegt, und von den beiden Farben, die nicht gezogen wurden, je eine Kugel durch die gezogene Farbe ersetzt.

(a) Die Ziehung welcher Landesfarben ist wahrscheinlicher: Frankreichs (blau, weiß, rot) oder Österreichs (rot, weiß, rot)? Es soll die Zugreihenfolge beachtet werden.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten in (a), wenn die Zugreihenfolge außer Acht gelassen wird.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis aller drei Ziehungen identisch ist?

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)

Ein Basketballspieler trainiert Distanzwürfe. Er beschließt, so lange von einer Position aus zu werfen, bis er einmal getroffen hat. An seinem aktuellen Standort verfehlt er den Korb erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %, unabhängig von den vorherigen Würfen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 5 Versuche benötigt, bis der Ball zum ersten Mal durch das Netz fällt.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens acht Versuche benötigt, wenn die ersten drei Würfe bereits daneben gingen.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, auf $\{1, \dots, k\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen, $k, n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimme[1] die Verteilung der Zufallsvariablen $M := \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(b) Bestimme $\mathbb{E}M$ für die Werte $k = 5$ und $n = 3$.

[1] Bestimme zunächst $P(M \leq j)$, für $j = 1, \dots, k$.

Aufgabe 5 (3 + 2 Punkte)

Im Wasserwerk soll der Salzgehalt des Trinkwassers (in mg/l) bestimmt werden. Die Messung ist fehleranfällig, daher wird mehrmals gemessen (Werte X_i) und dann das arithmetische Mittel der Messwerte ($\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$) berechnet. Die Zufallsvariable X_i sei der Messwert der i-ten Messung. Wir gehen davon aus, dass der tatsächliche Salzgehalt bei allen Messungen derselbe ist und die Messfehler unabhängig voneinander und gemäß derselben Verteilung auftreten. Einen systematischen Fehler schließen wir aus, im Mittel sollte also der wahre Wert gemessen werden. Erfahrungsgemäß ist die Standardabweichung der Messungen 1.

(a) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert $\bar{X}$ der Messungen weniger als 0.1 vom wahren Wert abweicht, mindestens 90 % ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Messung um mehr als die fünffache Standardabweichung neben dem Erwartungswert liegt (wenn man vom schlechtesten Fall der Ungleichung von Tschebyscheff ausgeht)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der in (a) berechneten Anzahl an Messungen mindestens ein solcher Ausreisser auftritt?