Einschub: Der große Umordnungssatz

Wir wollen hier den großen Umordnungssatz der Analysis kennenlernen, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wiederholt benötigt wird.

Zunächst beginnen wir mit einem Beispiel, das vor voreiligen Schlüssen warnt. Mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k}$ sollte man nicht folgendes machen:

$$\begin{aligned} 0 &= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}) + (\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}) + (\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}) + \dots \\ &= \tfrac{1}{2} + \underbrace{(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3})}_{>0} + \underbrace{(-\tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4})}_{>0} + \underbrace{(-\tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5})}_{>0} + \dots \\ &> \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das Assoziativgesetz gilt nämlich nur für endliche Summen und nicht für Reihen. Ebenso gilt das Kommutativgesetz nicht für Reihen. Anders sieht es für sog. absolut konvergente Reihen aus.

Definition 1. *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.*

Da die exakte Formulierung des großen Umordnungssatzes sehr technisch ist, verzichten wir darauf. Wir fassen nur seine wesentliche Aussage in Worte:

Konvergiert eine Reihe absolut, können wir die Reihenglieder beliebig zu Gruppen zusammenfassen und vertauschen, d.h. "Assoziativ- und Kommutativgesetz gelten".

Bemerkung 1. Will man den großen Umordnungssatz auf obiges Beispiel anwenden, reicht es nicht die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k} = 0$ nachzuweisen, denn der große Umordnungssatz erlaubt es nicht, ein Reihenglied in mehrere Summanden zu zerlegen. Vielmehr müsste man die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit

$$b_k = \begin{cases} \frac{m-1}{m} & \text{für } k = 2m - 1 \\ -\frac{m-1}{m} & \text{für } k = 2m \end{cases}$$

nachweisen. Da diese Reihe aber nicht absolut konvergent ist, darf man den großen Umordnungssatz nicht auf obiges Beispiel anwenden.