Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
23. Januar 2017

Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 12

Besprechung: 23. Januar in der Übung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $(X_1,\dots,X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe zur logarithmischen Normalverteilung[1] mit Parametern $\mu\in\mathbb{R}$ und $\sigma^2>0$. Bestimme den ML-Schätzer für den unbekannten Parametervektor (μ,σ^2).

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Die „WischiWaschi KG“ bestellt zur Herstellung ihrer Waschmaschinen elektrische Bauteile bei einem Lieferanten. Mit diesem wurde vereinbart, dass eine Charge mit 10000 Bauteilen höchstens 50 defekte Bauteile enthalten darf. Andernfalls hat die „WischiWaschi KG“ kostenlosen Anspruch auf eine neue Lieferung. Um zu testen ob eine Charge mehr als 50 defekte Bauteile enthält werden in der Qualitätskontrolle der „WischiWaschi KG“ einer Charge zufällig 5 Teile entnommen. Enthält die Stichprobe ein defektes Bauteil, so wird reklamiert.

(a) Formuliere das beschriebene Vorgehen formal als Test. Benenne insbesondere die Hypothese und die Alternative und bestimme den Annahmebereich und den kritischen Bereich.

(b) Bestimme die Gütefunktion des Tests.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Ein Getränkehersteller füllt seine Limonade auf zwei unterschiedlichen Maschinen in 0.5 Liter Flaschen ab. Die erwartete Abfüllmenge bei Maschinen 1 beträgt 0.48 Liter, bei Maschine 2 hingegen 0.52 Liter. Bei beiden Maschinen ist die Standardabweichung $\sigma=0.01$ Liter. Nach Auskunft des Maschinenherstellers sind die Abfüllmengen der Maschinen normalverteilt. Zwecks Qualitätskontrolle wurden von beiden Maschinen jeweils acht Flaschen (zufällig) entnommen. Dabei fand sich bei einer der beiden Stichproben eine erhöhte Anzahl von gesundheitsschädlichen Keimen. Unglücklicherweise wurde nach entnahme vergessen zu notieren welche Stichprobe von Maschine 1 bzw. welche von Maschine 2 stammt. Dies soll nun mit Hilfe eines Tests des Erwartungswertes θ geklärt werden. Betrachte dazu das Hypothesenpaar

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0=\{0.48\}\quad \text{vs.}\quad H_1:\ \theta\in\Theta_1=\{0.52\}.$$

Der kritische Bereich des Tests sei gegeben durch $K_1=\{(x_1,\dots,x_n):\ T(x_1,\dots,x_n)>c\}$, wobei

$$T(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{n}\frac{\bar{x}_n-0.48}{\sigma}.$$

(a) Wie muss $c\in\mathbb{R}$ gewählt werden, so, dass $P(\varphi(X_1,\dots,X_n)=1)=\alpha$ für beliebiges aber fest vorgegebenes $\alpha\in(0,1)$?

(b) Bestimme die Macht des Tests φ.

(c) Die mit Keimen belastete Stichprobe besitze die Abfüllmengen (in Litern)

$$(x_1,\dots,x_8)=(0.473,0.521,0.485,0.451,0.465,0.533,0.512,0.501).$$

Teste zum Niveau $\alpha=0.01$ ob die Stichprobe von Maschine 1 stammt.

Aufgabe 4 (4 + 3 Punkte)

Es seien $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\sim N(0,\sigma^2)$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\sigma^2>0$. Für gegebene $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ definiere

$$Y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i,\quad i=1,\dots,n,$$

mit Parametern α, $\beta\in\mathbb{R}$.

(a) Es sei $g:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ definiert durch

$$g(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n(y_i-\alpha-\beta x_i)^2,\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,$$

wobei $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ fix. Bestimme $(\hat\alpha,\hat\beta)$ so, dass $g(\hat\alpha,\hat\beta)=\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}}g(\alpha,\beta)$.

(b) Bestimme den ML-Schätzer[2] für (α,β,σ^2). Hinweis: Bestimme zunächst einen ML-Schätzer für den Vektor (α,β) mit fixem $\sigma^2>0$. Es kann darauf verzichtet werden das hinreichende Kriterium für lokale Extrema zu überprüfen.

[1] Eine Zufallsvariable X heißt logarithmisch normalverteilt mit Parametern $\mu\in\mathbb{R}$ und $\sigma^2>0$ (kurz: $X\sim LN(\mu,\sigma^2)$), falls $X=e^Y$ mit $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$.

[2] Im Falle von unabhängigen aber nicht identisch verteilten Zufallsvariablen $Z_1,\dots,Z_n$ mit Dichten $f_{Z_i}(z;\theta)$, $i=1,\dots,n$, ist die Likelihoodfunktion definiert durch

$$L(z_1,\dots,z_n;\theta)=\prod_{i=1}^n f_{Z_i}(z_i;\theta),$$

$z_1,\dots,z_n\in\mathbb{R}$.