ulm university universität uulm

Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
31. Januar 2017

Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 14

Besprechung: 6. Februar in der Übung.

Hinweis: Dies ist das letzte Übungsblatt, das für die Vorleistung gewertet wird! Um die Vorleistung zu bestehen sind mindestens 130 aller Übungspunkte nötig.

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Die Abfüllhöhe von Marmeladengläsern einer bestimmten Sorte soll untersucht werden. Als sicher gilt, dass die Abfüllhöhe $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt ist, wobei jedoch die Varianz unbekannt ist. Der Hersteller behauptet, dass die erwartete Füllhöhe $\mu_0 = 12$ cm beträgt.

(a) Teste die Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1: \mu \neq \mu_0$ für die Stichprobe $11, 11.2, 14, 15.2, 10, 12, 12.5, 11.4, 12$ zum Niveau Signifikanzniveau 5%.

(b) Berechne für $n = 25$ die Macht des einseitigen t-Tests zum Signifikanzniveau 5% mit der Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1: \ \mu > \mu_0$, falls in Wahrheit $\mu = 10$ cm und $s_X^2 = 1.6$ cm.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 Punkte)

Es sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe zur Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. In dieser Aufgabe soll ein Test für das Hypothesenpaar $H_0: \ \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1: \ \mu > \mu_0$ hergeleitet werden, falls die Varianz σ^2 unbekannt ist. Betrachte als Ablehnungsbereich $K_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \ T(x_1, \dots, x_n) > c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s_X},$$

wobei s_X die Stichprobenstandardabweichung der Stichprobe $(x_1, \dots, x_n)$ bezeichne.

(a) Bestimme ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $P_\mu(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) \leq \alpha$ unter H_0, für beliebiges aber fest vorgegebenes $\alpha \in (0, 1)$.

(b) Ist der Test mit dem in (a) berechneten Wert für c unverfälscht, d.h. gilt $P_\mu(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) \geq \alpha$ unter H_1?

(c) Die folgende Stichprobe enthält die Wasserstände (in Meter) eines Flusses für den Monat April in den Jahren 2000 - 2015:

3.1 3.5 4.0 3.9 3.3 6.7 2.3 3.4 9.2 3.2 3.3 3.1 3.7 5.0 2.1 5.0

Nimm an, dass es sich dabei um Beobachtungen einer i.i.d. normalverteilten Stichprobe handelt. Teste zum Signifikanzniveau 5% ob der erwartete Wasserstand höchstens 3.2 Meter beträgt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachte erneut Aufgabe 2, (c) von Übungsblatt 10: Die folgenden Werte geben die Blutdruckwerte von 10 Patienten an. Dabei entsprechen die Werte in der ersten Zeile jeweils ihren Blutdruckwerten zu Beginn der Behandlung, die Werte in der zweiten Zeile den Blutdruckwerten nach zwei Monaten Behandlung mit einem Medikament.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{1i}	144.20	139.10	139.50	139.00	138.20	141.40	138.10	137.30	140.30	138.70
x_{2i}	124.60	120.20	125.10	119.10	120.80	118.50	118.50	115.40	121.60	119.20

Nimm nun an, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5$ und $\sigma_{12} = 0.5$ gilt. Verwende die gleiche Vorgehensweise wie in Aufgabe 1 um einen Test für $H_0: \ \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ vs. $\mu_1 - \mu_2 > 0$ zum Signifikanzniveau 5% zu konstruieren[1] und wende diesen auf die Daten an.

Nochmals Aufgabe 2 von Blatt 13:

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 Punkte)

Mit dem t-Test kann man nicht nur den Erwartungswert von normalverteilten Stichprobenvariablen testen, sondern auch die Erwartungswerte zweier Zufallsstichproben miteinander vergleichen. Informiere dich mit der **R**-Hilfe über den Befehl *t.test()* .
Betrachte nun den `schlaf.txt`-Datensatz und führe mit ihm die folgenden Tests durch (siehe Teilaufgaben (a) bis (c)). Verwende dafür ausschließlich die in **R** implementierte `t.test()`-Methode. Die Daten sind dabei wie folgt erhoben worden:

Ergebnis einer Studie zu Schlafmedikamenten. Die Erhöhung der Schlafdauer in Stunden wird für je 10 Patienten in zwei Gruppen (die jeweils verschiedene Medikamente erhalten haben) angegeben.

Die Bezeichnung der Variablen ist dabei die folgende:

Schlafzunahme: Erhöhung der Schlafdauer in Stunden;
Gruppe: erhaltenes Medikament;

Alle Tests sollen zum Niveau $a = 0.05$ durchgeführt werden. Die Stichprobenvariablen seien unabhängig[2] und normalverteilt. Ferner seien die Stichprobenvariablen innerhalb jeder Gruppe jeweils identisch verteilt.

(a) Fasse zunächst beide Gruppen zu einem Datensatz zusammen, d.h., es wird zusätzlich angenommen, dass die Stichprobenvariablen beider Gruppen identisch verteilt sind. Teste H_0: der Erwartungswert ist Null gegen H_1: der Erwartungswert ist nicht Null.

(b) Teste H_0: die Erwartungswerte der Gruppen sind gleich gegen H_1: der Erwartungswert der zweiten Gruppe ist größer.

(c) Wiederhole den Test aus Teil (b) unter der zusätzlichen Annahme, dass die Varianzen der Stichprobenvariablen für beide Gruppen gleich sind.

Hinweise:

- Aufgabe 4 ist erneut bei Tobias abzugeben bis spätestens zum 6. Februar, 16:15 Uhr. Die Abgabe soll per Mail und Gruppenweise erfolgen (d.h. eine Lösung pro Gruppe!). Die Lösung ist dabei so mit Kommentaren zu versehen, dass sie verständlich wird (besser zu viel als zu wenig!).
- Am Montag, 13. Februar wird eine Fragestunde in H14 stattfinden, in der ihr die Gelegenheit bekommt vor der Klausur noch etwaige Unklarheiten zu beseitigen.
- In der Vorlesung am Dienstag, 14. Februar wird eine Probeklausur vorgerechnet, die bis kommenden Montag (6. Februar) auf der Homepage bereitgestellt wird.

[1] Berücksichtige dabei auch die Erkenntnisse aus Aufgabe 2 von Blatt 10!
[2] d.h. insbesondere sind die nach Gruppen eingeteilten Stichproben nicht gepaart!