Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
18. November 2016

Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 6

Besprechung: 28. November in der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 3 + 2 Punkte)

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe. Bestimme mit der Maximum-Likelihood Methode einen Punktschätzer $\widehat{\theta}_n$ für den Parameter θ, falls

(a) X_1 die Dichte $f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x)$ für $\theta > 0$ hat,

(b) X_1 die Dichte $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta_1} \exp\left(\frac{-(x-\theta_2)}{\theta_1}\right) \mathbb{1}_{[\theta_2,\infty)}(x)$ hat, wobei $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ mit $\theta_1 > 0$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$,

(c) $P(X_1 = x) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \mathbb{1}_{\{-1,0,1\}}(x)$ und $\theta \in [0,1]$.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe, wobei die X_i absolutstetige Zufallsvariablen seien mit Dichte $f(x) = (\theta - 1)(x+1)^{-\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, wobei $\theta > 1$ ist.

a) Für welche θ lässt sich der Momentenschätzer $\widehat{\theta}_n^{(M)}$ berechnen, und wie ist seine Formel?

b) Berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\theta}_n^{(ML)}$ für θ.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 4 Punkte)

Sei $(X_1, ..., X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe, wobei $X_i \sim U(\theta, \theta + 1)$ mit Parameter $\theta > 0$.

(a) Bestimme einen Momentenschätzer für θ.

(b) Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer für θ.

(c) Überprüfe, ob die Schätzer aus (a) und (b) erwartungstreu sind.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe zur Exp(λ)-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt sei.

a) Zeige: $\min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i \sim \text{Exp}(n\lambda)$.

b) Zeige, dass $n \cdot \min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für $1/\lambda$ ist.

c) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Schätzers aus b) für $1/\lambda$.

d) Zeige, dass der Schätzer aus b) weder stark noch schwach konsistent für $1/\lambda$ ist.