ulm university universität uulm

Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
28. November 2016

Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 7

Besprechung: 5. Dezember im **R**-Tutorium.

Aufgabe 1 (8 + 6 Punkte)

Die inflations- und bestandsbereinigten Jahresschäden einer Feuerversicherung können als paretoverteilt angenommen werden, d.h. die Jahresschäden haben die Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$$

für unbekannte Parameter $\alpha, \beta > 0$. Folgendes ist bekannt:

1.) Die Quantilfunktion $F^{-1}_{\alpha,\beta}$ der Paretoverteilung ist gegeben durch

$$F^{-1}_{\alpha,\beta}(u) = \frac{\alpha}{(1-u)^{1/\beta}},\ u \in \mathbb{R}$$

2.) Die Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$ für α und β sind gegeben durch

$$\widehat{\alpha} = \min_{i=1,\dots,n} X_i \quad \text{und} \quad \widehat{\beta} = -\frac{n}{n\log\left(\min\limits_{i=1,\dots,n} X_i\right) - \sum\limits_{i=1}^{n} \log(X_i)}.$$

Um festzustellen, wieviel Risikokapital vorgehalten werden muss, um die spartenspezifische Ruinwahrscheinlichkeit unter 0.005 zu halten, soll der Value-at-Risk $\mathrm{VaR}_{0.995}(X) = F^{-1}_{\alpha,\beta}(0.995)$ bestimmt werden, wobei X der paretoverteilte Jahresschaden ist. Daten liegen dabei lediglich aus den letzten 50 Jahren vor. Deshalb sollen in einer Simulationsstudie zunächst verschiedene Schätzmethoden verglichen werden.

a) Schreibe ein Programm, das folgende Funktionalitäten aufweist:
   - Simulation von paretoverteilten Zufallszahlen.
     Hinweis: Sei F^{-1} die Inverse einer Verteilungsfunktion F und $Y \sim U[0,1)$ gleichverteilt auf $[0,1)$, dann hat $F^{-1}(Y)$ die Verteilungsfunktion F.
   - Berechnung des oben genannten ML-Schätzers.
   - Berechnung eines empirischen Quantils[1] mittels des **R**-Befehls `quantile`.

b) Führe 10000 Simulationsruns durch, in denen jeweils 50 Realisierungen einer paretoverteilten Zufallsvariablen erzeugt werden, wobei $\alpha = 1$ und $\beta = 3$ ist (für die Versicherung sind die Werte in Mio. Euro zu interpretieren). Berechne $\mathrm{VaR}_{0.995}(X)$ empirisch mit Hilfe des Befehls `quantile` und theoretisch als Werte des Schätzers $F^{-1}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}$. Visualisiere die Differenz der beiden berechneten Schätzwerte für $\mathrm{VaR}_{0.995}(X)$ in einem Histogramm.

[1]Für $\alpha \in (0,1)$ ist das empirische α-Quantil $\hat{q}_\alpha$ einer Stichprobe $(x_1,\dots,x_n)$ definiert durch

$$\hat{q}_\alpha = \hat{q}_\alpha(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{(n\alpha)} + x_{(n\alpha+1)}) & ;\ n\alpha \text{ ganzzahlig} \\ x_{(\lceil n\alpha \rceil)} & ;\ n\alpha \text{ nicht ganzzahlig,} \end{cases}$$

wobei $(x_{(1)},\dots,x_{(n)})$ die (aufsteigend) geordnete Stichprobe sei (siehe auch Aufgabe 3 von Blatt 4).