



Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 8

Besprechung: 12. Dezember in der Übung (16-18 Uhr in H14).

Aufgabe 1 (1 + 2 + 5 Punkte)

Im weiteren Verlauf des Semesters werden sogenannte *statistische Prüfverteilungen* eine Rolle spielen, von denen eine durch die sogenannte *t-Verteilung* gegeben ist. In dieser Aufgabe wollen wir deren Eigenschaften näher untersuchen. Sei nun $X \sim t_r$. *Zur Erinnerung*: X besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige:

- (a) Die Dichte der t -Verteilung ist achsensymmetrisch.
- (b) $\mathbb{E}[X] = 0$, falls $r \geq 2$ (begründe auch, warum $\mathbb{E}[X]$ existiert!).
- (c) $\text{Var}(X) = \frac{r}{r-2}$, falls $r \geq 3$.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

Die jährliche Milchleistung von Kühen eines Bauernhofes kann als normalverteilt angesehen werden. Gemessen wurden folgende Milchleistungen von 5 Kühen in Litern:

35.1, 36.7, 33.0, 34.5, 35.6

- (a) Bestimme ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 1.5$ Liter beträgt.
- (b) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, damit man mit 95%-iger Sicherheit darauf vertrauen kann, dass der Fehler bei der Schätzung des Mittelwerts höchstens 0.5 Liter ist?

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Bei der Entnahme von 5 Bechern Latte Macchiato am Kaffeeautomaten der Cafeteria Southside werden folgende Füllmengen in ml gemessen:

299.7, 298.5, 301.0, 293.9, 309.3

Es wird davon ausgegangen, dass die Füllmengen unabhängig und $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt sind.

- (a) Bestimme ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0.95 bei unbekannter Varianz.
- (b) Von einem Mitarbeiter erfährst du, dass die Standardabweichung 5ml beträgt. Konstruiere unter Einbeziehung dieser Information ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0.95.
- (c) Du vertraust dem Mitarbeiter nicht, dass die Standardabweichung so gering ist. Konstruiere ein Konfidenzintervall für die Varianz zum Niveau 0.95 bei unbekanntem Erwartungswert.