Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
24. Oktober 2016

Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 2

Besprechung: 31. Oktober in der Übung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die durchschnittliche CO_2-Emission eines Fahrzeugtyps soll bestimmt werden. Dazu werden n Fahrzeuge dieses Typs zufällig ausgewählt und deren Emissionswerte $x_1, \ldots, x_n$ gemessen. Die Emissionswerte seien Realisierungen der unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mu = \mathbb{E}X_j$ und $\sigma^2 = \mathsf{Var}X_j \in (0, \infty)$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Wieviele Messungen sind mindestens notwendig, damit das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um höchstens $0.3\,\sigma$ vom Erwartungswert μ abweicht? Beantworte diese Frage mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe mit $\mathbb{E}X_j^4 < \infty$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Es bezeichne $\mu = \mathbb{E}X_j$ und $\sigma^2 = \mathsf{Var}X_j$. Außerdem sei $\tilde{S}_{n,c}$ definiert durch

$$\tilde{S}_{n,c} = c \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)^2 , \quad c > 0.$$

(a) Bestimme $c_0 > 0$ so, dass $\mathbb{E}\tilde{S}_{n,c_0} = \sigma^2$.

(b) Es bezeichne nun $\tilde{S}_n = \tilde{S}_{n,c_0}$, mit c_0 aus (a). Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \sigma^2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte, Wiederholungsaufgabe)

Sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge von Zufallsvariablen. Man sagt, dass diese Folge *in Wahrscheinlichkeit* gegen eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| > \epsilon) = 0$. Weiterhin sagt man, dass die Folge *fast sicher* gegen μ konvergiert, falls $P(\lim_{n\to\infty} X_n = \mu) = 1$ gilt.
Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$, wobei $\mathcal{B}([0,1))$ die Borel-σ-Algebra auf $[0,1)$ ist und λ das Lebesguemaß. Für $n = 2^k + l$, mit $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \{0, 1, ...2^k - 1\}$ sei

$$X_n(\omega) = \mathbb{1}_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right)}(\omega).$$

Zeige, dass X_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, aber nicht fast sicher konvergiert.