Prof. Dr. Volker Schmidt
Daniel Westhoff

WS 2015/2016
25.02.2016

Angewandte Stochastik II – 1. Klausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Ergebnisse sollen auf 4 Nachkommastellen gerundet werden. Alle Antworten sind zu begründen!
Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, ein beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (10+10 Punkte)
Gegeben sei eine Zufallsstichprobe $(X_1, ..., X_n)$ von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Dichte

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

für einen Parameter $\theta > 0$.

(a) Bestimme den Momenten-Schätzer für θ.

(b) Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer für θ.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Schreibe eine Funktion *qqPlot*$(x, lambda)$ in R, die einen Vektor x und eine Zahl *lambda* übergeben bekommt und die empirischen Quantile des Vektors x gegen die theoretischen Quantile einer Exponentialverteilung mit Parameter *lambda* zu den Niveaus 10%, 20%, . . ., 90% plottet.
Hinweis: Das q-Quantil der Exponentialverteilung mit Parameter *lambda* kann in R mit dem Befehl *qexp*$(q, lambda)$ bestimmt werden. Für das empirische q-Quantil eines Vektors x kann der Befehl *quantile*(x, q) verwendet werden. Der Parameter q kann auch vektorwertig sein.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Ein Versicherungsunternehmen möchte auf Basis seiner mittleren Schadenshöhen der letzten 4 Jahren (in tausend Euro) überprüfen, ob seine Annahme, dass für den Erwartungswert μ der mittleren Schadenshöhe $\mu = 500$ gilt, auch weiterhin gerechtfertigt ist. Die mittleren Schadenshöhen der letzten 4 Jahre (in tausend Euro) betrugen:

505   511   495   490.

Prüfe, ob das Datenmaterial mit der Hypothese

$$H_0 : \mu = 500 \text{ gegen die Alternative } H_1 : \mu \neq 500$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ vereinbar ist. Dazu darf angenommen werden, dass die Messwerte Realisierungen von unabhängigen und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen sind mit unbekanntem Parameter $\sigma^2 > 0$.
Hinweis: Für diese Aufgabe wird eines der folgenden Quantile der t-Verteilung benötigt:

$$t_{4,0.975} = 2.776, \qquad t_{3,0.95} = 2.353, \qquad t_{3,0.975} = 3.182.$$

Aufgabe 4 (10+10 Punkte)
Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Par}(k, l)$, d.h. X_1 ist Pareto-verteilt mit Parametern $k > 0$ und $l > 0$. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Par}(k, l)$ lautet

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{l}{x}\right)^k, & \text{falls } x \geq l \\ 0, & \text{falls } x < l. \end{cases}$$

(a) Bestimme mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein zweiseitiges, asymptotisches Konfidenzintervall für l zum Niveau $1 - \alpha$, wobei vorausgesetzt wird, dass $k = 3$.
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für $X \sim \mathrm{Par}(k, l)$, mit $k > 2$, folgendes gilt: $\mathbb{E}\, X = l\frac{k}{k-1}$ und $\mathrm{Var}\, X = l^2\frac{k}{(k-2)(k-1)^2}$.

(b) Zeige, dass es sogar möglich ist, ein exaktes Konfidenzintervall für l anzugeben, wenn k bekannt ist. Zeige hierfür zunächst, dass

$$\left(\frac{\min(X_1, \ldots, X_n)}{l}\right)^k \sim \mathrm{Par}(1, n).$$

Konstruiere dann ein exaktes zweiseitiges Konfidenzintervall für l zum Niveau $1 - \alpha$.
Hinweis: Die Quantile der Pareto-Verteilung müssen dazu nicht berechnet werden, sondern können mit $\mathrm{Par}_{1,n,\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $\mathrm{Par}_{1,n,1-\frac{\alpha}{2}}$ bezeichnet werden.

Aufgabe 5 (8+4+8+4 Punkte)
Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 verteilt ist mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \lambda(2x - 1), & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Konstruiere mit Hilfe der Momentenmethode einen Schätzer für λ.

(b) Zeige, dass der Schätzer aus (a) erwartungstreu für θ ist.

(c) Berechne die erwartete quadratische Abweichung (mean squared error, MSE) des Schätzers aus (a).

(d) Zeige, dass der Schätzer aus (a) stark konsistent für θ ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Ray}(\sigma)$, d.h. X_1 ist Rayleigh-verteilt mit Parameter $\sigma > 0$. Beobachtbar sei allerdings nur $X_{(1)}$, also das Minimum von $X_1, \ldots, X_n$. Zeige zunächst, dass $X_{(1)}$ wiederrum einer Rayleigh-Verteilung genügt, und zwar mit Parameter $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Konstruiere dann basierend auf $X_{(1)}$ einen Test zum Niveau α für die Nullhypothese $H_0 : \sigma = \sigma_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \sigma > \sigma_0$.
Die Verteilungsfunktion der Rayleigh-Verteilung mit Parameter $\sigma > 0$ ist gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Bitte Rückseite beachten!

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Was macht folgendes R-Skript bei Ausführung?

```
n <- c(100,1000,10000)
estimated_lambdas = c()
errors =c()
for (i in 1:3){
        x = rexp(n[i],1)
        estimated_lambdas[i] = 1 / mean(x)
        errors[i] = abs(estimated_lambdas[i]-1)
}
plot(n,errors)
```