Prof. Dr. Volker Schmidt
Daniel Westhoff

WS 2015/2016
07.04.2016

Angewandte Stochastik II – 2. Klausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Ergebnisse sollen auf 4 Nachkommastellen gerundet werden. Alle Antworten sind zu begründen!
Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, ein beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (10+10 Punkte)
Gegeben sei eine Zufallsstichprobe $(X_1, ..., X_n)$ von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \Gamma(b, p)$, d.h., X_1 ist gammaverteilt mit Parametern $b, p > 0$ folgt. Die Dichte der Gammaverteilung lautet

$$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ die aus der Übung bekannte Gammafunktion ist.

(a) Bestimme den Momenten-Schätzer für (b, p).
Hinweis: Es darf verwendet werden, dass

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{p}{b} \text{ und } \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{p(p+1)}{b^2}.$$

(b) Sei nun der Parameter p bekannt. Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer für b.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Schreibe eine Funktion $test(mu, var, values)$ in R, welche Zahlen $mu \in \mathbb{R}$ und $var > 0$ sowie einen Vektor *values* mit ganzzahligen Werten übergeben bekommt, die für jeden Eintrag n in *values* jeweils n Realisierungen einer $N(mu, var)$-verteilten Zufallsvariablen erzeugt, den Parameter *mu* als Mittelwert der Realisierungen schätzt und dann den Absolutbetrag des Schätzfehlers gegen die Werte in *values* plottet.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Eine Investmentbank kauft seit Jahren Aktien von frisch an die Börse gekommenen Unternehmen und nimmt hierbei eine (in %) $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Aktienrendite, mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, an. Die Bank möchte nun auf Basis ihrer Aktienrenditen der letzten 4 Jahre überprüfen, ob ihre Annahme, dass für die Varianz der Aktienrenditen $\sigma^2 = 1$ gilt, auch weiterhin gerechtfertigt ist. Die Aktienrenditen der letzten 4 Jahre (in %) betrugen:

9.5	13	10	9.5.

Prüfe, ob das Datenmaterial mit der Hypothese

$$H_0 : \sigma^2 = 1 \text{ gegen die Alternative } H_1 : \sigma^2 \neq 1$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ vereinbar ist. Dazu darf angenommen werden, dass die Messwerte Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen sind, wobei der Erwartungswert unbekannt sei. Folgende Quantile seien gegeben: $\chi^2_{4,0.975} = 6.25, \chi^2_{3,0.95} = 7.81, \chi^2_{3,0.975} = 9.35, \chi^2_{4,0.025} = 0.48, \chi^2_{3,0.05} = 0.35, \chi^2_{3,0.025} = 0.21$.

Aufgabe 4 (10+10 Punkte)

(a) Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim U(\theta, \theta + 2)$, mit $\theta > 0$. Bestimme mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein zweiseitiges, asymptotisches Konfidenzintervall für θ zum Niveau $1 - \alpha$.

(b) Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Wei}(\lambda, 2)$, d.h., X_1 ist Weibull-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und festem zweiten Parameter. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Wei}(\lambda, k)$ lautet

$$P(X \leq x) = (1 - e^{-(\lambda x)^k}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimme ein Konfidenzintervall für λ. Zeige hierfür zunächst, dass $\lambda \min(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathrm{Wei}(\sqrt{n}, 2)$. Konstruiere darauf basierend ein exaktes zweiseitiges Konfidenzintervall für λ zum Niveau $1 - \alpha$.
Hinweis: Die Quantile der Weibull-Verteilung müssen dazu nicht berechnet werden, sondern können mit $\mathrm{Wei}_{\sqrt{n},2,\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $\mathrm{Wei}_{\sqrt{n},2,1-\frac{\alpha}{2}}$ bezeichnet werden.

Aufgabe 5 (8+4+8+4 Punkte)
Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 verteilt ist mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) e^{-\frac{1}{\theta}x}}{\theta e^{-\frac{1}{\theta}}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

für einen Parameter $\theta > 0$.

(a) Konstruiere mit Hilfe der Momentenmethode einen Schätzer für θ.

(b) Zeige, dass der Schätzer aus (a) erwartungstreu für θ ist.

(c) Berechne die erwartete quadratische Abweichung (mean squared error, MSE) des Schätzers aus (a).

(d) Zeige, dass der Schätzer aus (a) stark konsistent für θ ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch Pareto-verteilte Zufallsvariablen, d.h. $X_1 \sim \mathrm{Par}(k, l)$, mit Parametern $k, l > 0$, wobei l bekannt sei. Beobachtbar sei allerdings nur $X_{(1)}$, also das Minimum von $X_1, \ldots, X_n$. Zeige zunächst, dass $lX_{(1)} \sim Par(kn, l^2)$ und konstruiere dann basierend auf $X_{(1)}$ einen Test zum Niveau α für die Nullhypothese $H_0 : k = k_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : k < k_0$.
Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Pareto-Verteilung ist gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{l}{x}\right)^k, & \text{falls } x \geq l \\ 0, & \text{falls } x < l. \end{cases}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Was macht folgende R-Funktion (siehe Rückseite), wenn sie mit einem Vektor x, einer Zahl $\sigma > 0$ und einer Zahl $0 < \alpha < 1$ aufgerufen wird?

```
confInt=function(x, sigma, alpha){
        lower=mean(x)-qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(length(x))
        upper=mean(x)+qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(length(x))
        return(c(lower, upper))
}
```