Stochastische Geometrie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2016

2. Übungsblatt
Abgabe: 18. November, 12:15

Aufgabe 1: Die Zahl $C(n,d)$
(4+4+2=10 Punkte)

Betrachte n Hyperebenen $H_1, \ldots, H_n \subseteq \mathbb{R}^d$, die durch 0 gehen, in allgemeiner Position. Wir nennen die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ "Zellen" und bezeichnen die Anzahl der Zellen mit $C(n,d)$.

a) Seien $H_1, \ldots, H_n \subseteq \mathbb{R}^d$ Hyperebenen in allgemeiner Position. Zeige, dass die Unterräume $H_1 \cap H_n, \ldots, H_{n-1} \cap H_n$ in allgemeiner Position sind, wenn man sie als Hyperebenen in H_n auffasst.

b) Zeige für $n \geq 2$ und $d \geq 2$, dass

$$C(n,d) = C(n-1,d) + C(n-1,d-1).$$

c) Zeige für $n \geq 1$ und $d \geq 1$, dass

$$C(n,d) = 2\sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}.$$

Aufgabe 2: Das Lebesgue-Maß von Parallelepipeden mit R
(1+4+3=8 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir durch Simulation die Formel

$$\mathbb{E}\left[\nabla_q(X_1, \ldots, X_q)^k\right] = \frac{\kappa_{d+k}^q}{\kappa_d^q} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\omega_{d-j}}{\omega_{d+k-j}} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^q}{\Gamma(\frac{d+k}{2}+1)^q} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\Gamma(\frac{d+k-j}{2})}{\Gamma(\frac{d-j}{2})}.$$

überprüfen.

a) Schreibe eine Funktion `rball3d(`n`)`, die n unabhängige in $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ gleichverteilte Zufallsvektoren erzeugt.

b) Schreibe drei Funktionen, die für 1, 2 bzw. 3 Vektoren in $\mathbb{R}^3$ das Lebesgue-Maß des von diesen aufgespannten Parallelepipeds berechnen.
Hinweise:

   (i) Es ist bekannt, dass die Länge des Kreuzprodukts zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gleich dem Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelograms ist.

   (ii) Das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds ist gleich dem Betrag der Determinante der Matrix, die diese drei Vektoren als Zeilenvektoren hat. Den selben Wert liefert der Betrag des Skalarprodukt einer der drei Vektoren mit dem Kreuzprodukt der beiden anderen.

c) Erzeuge für $q = 1, 2, 3$ jeweils 1000 unabhängige Realisierungen von $\nabla_q(X_1, \ldots, X_q)$. Nutze diese, um die Momente $\mathbb{E}\left[\nabla_q(X_1, \ldots, X_q)^k\right]$ für $k = 1$ und $k = 4$ zu schätzen. Vergleiche die geschätzen Werte jeweils mit den theoretischen.