Stochastische Geometrie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2016

3. Übungsblatt
Abgabe: 2. Dezember, 12:15

Aufgabe 1: Messbare Auswahlen
(3+3=6 Punkte)

a) Gib eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(Z = [0,1]) = \mathbb{P}(Z = [1,2]) = \frac{1}{2}$ an, die eine auf $[0,2]$ gleichverteilte Auswahl ξ enthält.

b) Gib eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(Z = [0,1]) = \mathbb{P}(Z = [1,2]) = \frac{1}{2}$ an, die keine auf $[0,2]$ gleichverteilte Auswahl enthält.

Aufgabe 2: Atomlose Wahrscheinlichkeitsräume
(3+4=7 Punkte)

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein atomloser Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{A}$ eine endliche Teilmenge. Zeige $\mathbb{P}(A) = 0$.

b) Seien $Z_1, Z_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen auf einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige, dass mindestens eine der Aussagen zutrifft:

   (i) Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist atomlos.

   (ii) Es gibt eine Konstante c mit $\mathbb{P}(Z_1 = c) = 1$.

   Bem.: Dies gilt auch für Zufallsvektoren und zufällige abgeschlossene Mengen $Z_1, Z_2, \ldots$, ist für diese aber schwerer zu zeigen.

Aufgabe 3: Approximation von Auswahlen
(5 Punkte)

Seien Z und Z' zwei zufällige abgeschlossene Mengen auf Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bzw. $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ mit $Z \overset{d}{=} Z'$. Sei ξ eine Auswahl von Z' und η die im Beweis des Satzes über die Approximation von Auswahlen konstruierte Auswahl von Z. Zeige, dass in der Prokhorov-Metrik gilt: $\mathfrak{p}(\xi, \eta) < \epsilon$.