Stochastische Geometrie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2016

ulm university universität uulm

4. Übungsblatt
Abgabe: 16. Dezember, 12:15

Aufgabe 1: Die Auswahl-Erwartung von u.i.v. Punkten
(4+1=5 Punkte)

a) Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ unabhängige Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^d$, die multivariat normalverteilt sind mit dem Nullvektor als Erwartungswertvektor und der Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix. Zeige, dass für die Auswahl-Erwartung der zufälligen abgeschlossenen Menge $\{X_1, \dots, X_n\}$ gilt

$$\mathbb{E}\{X_1, \dots, X_n\} = B_{R(n)}(0),$$

wobei $R(n) := \mathbb{E}[\max\{Y_1, \dots, Y_n\}]$ für unabhängige (univariate) Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Hinweis: Verwende, dass für zwei konvexe und kompakte Mengen $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$h(K, v) = h(L, v), \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

bereits $K = L$ gilt.

b) Bestimme durch Simulation mit R Näherungswerte für $R(n)$, $n = 2, 5, 10, 100$.

Aufgabe 2: Approximation von Auswahlen
(5 Punkte)

Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ und $1 \leq p < \infty$. Sei weiter $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}^p(Z)$ eine abzählbare Kollektion von Auswahlen mit

$$\mathbb{P}\big(cl(\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = Z\big) = 1$$

und sei schließlich $\eta \in \mathcal{S}^p(Z)$ eine Auswahl.
Sei $\epsilon > 0$. Zeige, dass es eine endliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gibt mit

$$\|\eta - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{1}_{A_i}\|_p < \epsilon,$$

wobei $\|X\|_p := \sqrt[p]{\mathbb{E}[X^p]}$ die $\mathcal{L}^p$-Norm einer Zufallsvariablen X bezeichnet.
Hinweis: Zeige zunächst

$$\|\eta - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbf{1}_{B_i}\|_p < \epsilon$$

für unendlich viele Ereignisse $B_1, B_2, \dots$.

Aufgabe 3: Die Hausdorff-Metrik
(2+4+1=7 Punkte)

a) Berechne den Abstand $d_H(C^d, B^d)$ von Einheitsball $B^d = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$ und Einheitswürfel $C^d = [0,1]^d$.

b) Zeige, dass die Hausdorff-Metrik eine Metrik ist.

c) Seien Z und Z' zwei integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Mengen. Zeige $d_H(\mathbb{E}Z, \mathbb{E}Z') \leq \mathbb{E}\, d_H(Z, Z')$.