Stochastische Geometrie II
Dr. Jürgen Kampf
WS 2016/17

ulm university universität uulm

5. Übungsblatt
Abgabe: 13. Januar, 12:15

Aufgabe 1: Die Brunn-Minkowski-Ungleichung für zufällige Mengen
(4+3+6=13 Punkte)

Die Brunn-Minkowski-Ungleichung für zufällige Mengen sagt, dass

$$\sqrt[d]{\lambda_d(\mathbb{E}\, Z)} \geq \mathbb{E}\, \sqrt[d]{\lambda_d(Z)}$$

für jede integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$. Diese wollen wir hier, im Spezialfall, dass der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum atomfrei ist, zeigen.

a) Zeige, dass das Volumen als Funktional $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ halbstetig nach oben ist, d.h. dass für jede Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in der Hausdorff-Metrik gegen einen Grenzwert K konvergiert, gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_d(K_n) \leq \lambda_d(K).$$

Hinweis: Verwende das Lemma von Fatou.

b) Zeige, dass das Volumen als Funktional $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ nicht halbstetig nach unten ist. Zeige hierfür, dass es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlichen Mengen gibt, die in der Hausdorff-Metrik gegen die Kugel $K = B(0,1)$ konvergiert. Dabei ist $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x-y\| \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r. Offensichtlich gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_d(K_n) < \lambda_d(K).$$

c) Zeige die Brunn-Minkowski-Ungleichung für zufällige Mengen im Fall, dass der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum atomlos ist. Verwende hierzu (ohne Beweis) die klassische Brunn-Minkowski-Ungleichung: Für zwei kompakte Mengen $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mu \in [0,1]$ gilt

$$\sqrt[d]{\lambda_d(\mu K + (1-\mu)L)} \geq \mu \sqrt[d]{\lambda_d(K)} + (1-\mu) \sqrt[d]{\lambda_d(L)}.$$

Verwende weiter die starken Gesetze großer Zahlen (das für zufällige abgeschlossene Mengen und das für reellwertige Zufallsvariablen) sowie Teil a).

Aufgabe 2: Das Intenstitätsmaß
(4+4=8 Punkte)

a) Sei Λ das Maß auf $\mathbb{R}^2$ mit Lebesgue-Dichte

$$f(x,y) = 2x\mathbf{1}_{[0,2]}(x)\mathbf{1}_{[0,\pi]}(y).$$

Gib einen Punktprozess in $\mathbb{R}^2$ mit Intensitätsmaß Λ an.
Diese Aufgabe ist ohne Verwendung von Stoff aus der Vorlesung am 11. Januar zu lösen.

b) Gib einen Punktprozess an, der nicht stationär ist und dessen Intensitätsmaß das Lebesgue-Maß ist.