Dr. Jürgen Kampf — WS 2015/16
Dipl.-Math. Stefan Roth — 12.02.2016

Stochastik für WiWi - 1. Klausur

Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein nicht programmierbarer Taschenrechner; Ein beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt.
- **Bewertung:** Es gibt 110 Punkte; 50 Punkte reichen zum Bestehen; 100 Punkte reichen für eine 1,0. Der Lösungsweg muss stets nachvollziehbar sein; gemachte Aussagen müssen begründet werden.
- **Tabellen** für Standardnormalverteilung und t-Verteilung sind auf der Rückseite zu finden.

Aufgabe 1 (3 + 4 + 3 + 5 + 5 Punkte)

Die Termine der Veranstaltung "Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler" sollen geändert werden. Die neuen Termine werden rein zufällig ausgewählt, d.h. es liegt ein Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum vor.
Zunächst soll daran festgehalten werden, dass eine Vorlesung dienstags, eine mittwochs und die Übung freitags stattfindet. Mögliche Uhrzeiten sind jeweils die 5 an der Universität Ulm üblichen Zeitschienen.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es?

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Vorlesungen am gleichen Termin wie bisher stattfinden?

Nun können auch die Tage variiert werden. Es stehen also an 5 Tagen pro Woche jeweils 5 Zeitschienen zur Verfügung. Die Veranstaltungen dürfen am selben Tag, nicht jedoch gleichzeitig stattfinden.

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es nun?

(d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass weiterhin eine Vorlesung dienstags, eine mittwochs und die Übung freitags stattfindet (möglicherweise aber mit anderen Uhrzeiten)?

(e) Wie wahrscheinlich ist es, dass alle 3 Termine an einem Wochentag stattfinden?

Aufgabe 2 (2 + 4 + 3 + 6 Punkte)

Gegeben seien drei Ereignisse A, B und C in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Die Ereignisse A und B seien unvereinbar, A und C seien unabhängig und es gelte

$$\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(C|B) = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(C) = 0,4.$$

Bestimme

(a) $\mathbb{P}(A)$, (b) $\mathbb{P}(B)$, (c) $\mathbb{P}(A \cup C)$, (d) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

Aufgabe 3 (9 + 4 + 3 + 3 + 6 Punkte)

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf dem selben diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Ihre gemeinsame Verteilung sei gegeben durch

X \ Y	0	1	2	$X\downarrow$
0	a	$\frac{3}{10}$	b	$\frac{2}{5}$
π	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	c	$\frac{3}{5}$
$\xrightarrow{Y}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

(a) Bestimme $\mathbb{E}\,Y$, $\mathsf{Var}(Y)$ und $\mathbb{E}[\cos X]$.

(b) Skizziere die Verteilungsfunktion von Y.

(c) Bestimme die Konstanten a, b und c.

(d) Sind X und Y unabhängig?

(e) Berechne $\mathbb{E}[X^2Y^3]$.

Aufgabe 4 (5 + 9 + 6 Punkte)

Die Funktion $f_\alpha(x)$ sei für jedes $\alpha < 2$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) = c \cdot (x-1)^{-\alpha/2}\,\mathbb{1}_{(1,2]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $f_\alpha(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

(b) Sei nun X eine absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte $f_\alpha(x) = (1-\alpha/2)(x-1)^{-\alpha/2}\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\mathbb{E}_\alpha X = \frac{6-2\alpha}{4-\alpha}$$

und bestimme einen Momentenschätzer für α.

(c) Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer für α.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei $X \sim N(1,2)$ und $Y = X+2$. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $\{\omega \in \Omega:\ X(\omega) \le 3\}$ und $\{\omega \in \Omega:\ Y(\omega) \in [1,3]\}$.

Aufgabe 6 (8 + 7 + 5 Punkte)

In einem Krankenhaus werden die Geburtsgewichte (in Gramm) von 4 Babys ermittelt:

$$3300 \quad 2700 \quad 3800 \quad 3000$$

Wir nehmen an, dass die Geburtsgewichte $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt und unabhängig sind.
Teste

$$H_0: \mu \le 3000 \quad \text{gegen} \quad H_1: \mu > 3000$$

zum Niveau 5%, wenn

(a) ... bekannt ist, dass die Standardabweichung 700 Gramm beträgt.

(b) ... wenn die Standardabweichung unbekannt ist.

(c) Gib ein Konfidenzintervall zum Niveau 99% an, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung 700 Gramm beträgt.

Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Erklärung: Die Tabelle enthält auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte von $\Phi(x)$, wobei $0 \leq x \leq 4{,}09$ gilt und Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte den Wert, der bis zur ersten Nachkommastelle x entspricht. Dann geht man bis zur Spalte der zweiten Nachkommastelle von x nach rechts. Beispielsweise steht $\Phi(0{,}12)$ in der zweiten Zeile und dritten Spalte: $\Phi(0{,}12) \approx 0{,}54776$. Für negative x verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Für $x \geq 4{,}1$ verwenden wir die Näherung $\Phi(x) \approx 1$.

Quantile $x_{n;\beta}$ der Chi – Quadrat –Verteilung χ_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $x_{9;0.95} \approx 16.92$

n / β	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.001	0.00	0.00	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.83	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

Quantile $t_{n;\beta}$ zu Students t -Verteilung t_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $t_{9;0..95} \approx 1.833$

n	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.9875	n
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	1
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	2
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.177	3
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.163	5
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	2.969	6
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.841	7
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.752	8
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.685	9
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.634	10
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.593	11
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.560	12
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.533	13
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.510	14
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.490	15
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.473	16
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.458	17
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.445	18
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.433	19
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.423	20