Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
2. Dezember 2016

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 7

Abgabe: 9. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 1 + 1 Punkte)

Es sei $\Omega = \{23, U, \varepsilon, \smiley, \square, \sun\}$. Begründe jeweils, ob es sich bei folgenden Mengesystemen Σ_1, Σ_2 und Σ_3 um σ-Algebren auf Ω handelt.

(a) $\Sigma_1 = \{\emptyset, \Omega, \{23, U, \smiley, \square\}, \{\varepsilon, \sun\}\}$

(b) $\Sigma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{23, U, \varepsilon, \smiley\}, \{23, \square, \sun\}, \{U, \varepsilon, \smiley\}, \{23\}\}$

(c) $\Sigma_3 = \{\emptyset, \Omega, \{23, U, \varepsilon\}, \{U, \varepsilon, \smiley, \square, \sun\}, \{\smiley, \square\}, \{23\}, \{23, \smiley, \square, \sun\}, \{U, \varepsilon\}\}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R};\ A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω ist.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 3 Punkte)

Für welche $c \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei folgenden Funktionen $\rho_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3\}$, um Wahrscheinlichkeitsdichten?

(a) $\rho_1(x) = \frac{c}{\sqrt{x-1}} \mathbb{1}_{(1,2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\rho_2(x) = ce^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\rho_3(x) = \frac{c}{2} |\sin(cx)| \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (Beachte Fußnote[1])

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

Zeige, dass es sich bei folgenden Funktionen $\rho_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, jeweils um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt und bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion[2] $F_i(x)$, $i \in \{1,2,3,4\}$.

(a) $\rho_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\rho_2(x) = (2-\alpha)x^{-\alpha+1} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha < 2$ fix.

(c) $\rho_3(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ fix.

(d) $\rho_4(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\alpha)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fix. (Beachte Fußnote[3])

---

[1] In diesem Fall gibt es unendlich viele Möglichkeiten für geeignete c. Welche?

[2] Zur Erinnerung: Für eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben durch $F(t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(x)dx$, $t \in \mathbb{R}$.

[3] Hinweis: Es ist $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.