



Stochastik für WiWi - Übungsblatt 9

Abgabe: 23. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Betrachte erneut Beispiel 8.2 aus der Vorlesung. Zeige, dass die Funktionen ρ und f_X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definieren, d.h. zeige, dass es sich bei ρ um eine Dichte sowie bei f_X um eine Zähldichte handelt.

Aufgabe 2 (3 + 4 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Zufallsvektor mit folgender Zähldichte:

X_1	$X_2 = 0$	1	2	3
0	1/8	1/4	1/8	0
1	0	1/8	1/4	1/8

- (a) Bestimme die Zähldichten von X_1 und X_2 .
- (b) Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Bestimme in folgenden Fällen jeweils $\mathbb{E}[h(X)]$:
 - i) $h(x_1, x_2) = x_1$.
 - ii) $h(x_1, x_2) = x_2$.
 - iii) $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 2 + 1 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2, X_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Zufallsvektor mit Dichte $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12} e^{-\frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{3}} \mathbb{1}_{(0, \infty)^2}(x_1, x_3) \mathbb{1}_{[1, 3]}(x_2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Bestimme die Randdichten von X_1 , X_2 und X_3 .
- (b) Bestimme $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2]$, $\mathbb{E}[X_3]$ sowie $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3]$.
- (c) Bestimme die Dichte des Zufallsvektors (X_2, X_3) .
- (d) Bestimme $P(X_2 \geq 3/2, X_3 < 5)$.

Aufgabe 4 (4 + 3 Punkte)

Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_K(x_1, x_2),$$

wobei $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe um den Punkt $(0, 0)$ mit Radius 1 sei.

- (a) Bestimme die Randverteilungen von X_1 und X_2 sowie deren Erwartungswerte.
- (b) Bestimme $P((X_1, X_2) \in B)$ für $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2\}$.