ulm university universität uulm

Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
23. Dezember 2016

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 10

Abgabe: 13. Januar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 1 Punkte)

Es sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $Y = X^2$.

(a) Bestimme[1] die Kovarianz von X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 2 (3 + 4 Punkte)

Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\rho(x_1, x_2) = c\frac{1}{(1+x_1+x_2)^6}\mathbb{1}_{[0,\infty)^2}(x_1, x_2)$.

(a) Bestimme $c \in \mathbb{R}$ so, dass ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Sei nun c wie in (a) bestimmt und $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit Dichte ρ. Bestimme (siehe Fußnote 1) die Kovarianz von X_1 und X_2 und entscheide, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

(a) Zeige, dass $\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(b) Zeige, dass die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ genau dann unkorreliert sind, wenn $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(Y)$.

(c) Finde Beispiele für X und Y mit $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(Y)$ so, dass $X + Y$ und $X - Y$ nicht unabhängig sind.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

Y	$X = 1$	2	3
1	p_1	p_2	p_3
2	p_4	0	p_5
3	0	p_6	0

Für $k = 1, 2, 3$ sei weiterhin bekannt, dass

- $\mathbb{P}(Y = 1 \,|\, X = k) = f_{Y|X=k}(1) = 2/3$.
- $\mathbb{P}(X = k \,|\, Y = 1) = f_{X|Y=1}(k) = k/6$.

Bestimme $p_1, \ldots, p_6$.

[1]Hinweis: Verwende Aufgabe 3, (a).

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)

Es sollen 100.000 € in Aktien investiert werden. Dabei stehen 2 Aktien zur Auswahl: Aktie 1 kostet 80 €, der erwartete Kurs in einem Jahr beträgt 90 €, bei einer Standardabweichung von 2 €. Aktie 2 kostet 120 €, der erwartete Kurs in einem Jahr beträgt 150 €, bei einer Standardabweichung von 10 €. Das Geld soll mit minimalem Risiko investiert werden. Als Risikomaß verwenden wir die Varianz, d.h. wir wollen die 100.000 € so investieren, dass der Wert unseres Portfolios in einem Jahr minimale Varianz hat. Wie ist das Geld zu investieren, wenn

(a) die Kurse in einem Jahr unabhängig sind?

(b) die Kurse in einem Jahr einen Korrelationskoeffizienten von $-0,4$ besitzen?

Die Stückzahlen müssen hier nicht notwendigerweise ganzzahlig sein. Zusätzlich wird stets davon ausgegangen, dass Leerverkäufe nicht erlaubt sind und dass die 100.000 € restlos investiert werden.

Wiederholungsaufgaben: (Separate Abgabe am 20.01.2017! Alle Punkte sind Bonuspunkte!)

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Urne A enthalte 5 weiße und 7 schwarze Kugeln und Urne B enthalte 8 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen zunächst zufällig eine Kugel aus A und fügen diese der Urne B hinzu. Danach wird zufällig eine Kugel aus B gezogen und zu A hinzugefügt. Zum Schluß wird zufällig eine Kugel aus A gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt gezogene Kugel weiß ist?

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 Punkte)

Eine Urne enthält jeweils 5 rote, blaue und weiße Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander drei Kugeln gezogen. Nach jedem Zug wird die Kugel zurück in die Urne gelegt, und von den beiden Farben, die nicht gezogen wurden, je eine Kugel durch die gezogene Farbe ersetzt.

(a) Die Ziehung welcher Landesfarben ist wahrscheinlicher: Frankreichs (blau, weiß, rot) oder Österreichs (rot, weiß, rot)? Es soll die Zugreihenfolge beachtet werden.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten in (a), wenn die Zugreihenfolge außer Acht gelassen wird.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis aller drei Ziehungen identisch ist?

Aufgabe 8 (2 + 2 Punkte)

Die Haltbarkeitsdauer (in Stunden) einer neuen Glühbirne sei $\mathsf{Exp}(0.001)$-verteilt.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine neue Glühbirne mindestens 200 Stunden hält.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Glühbirne noch weitere 500 Stunden hält, falls sie bereits 300 Bestriebsstunden hinter sich hat?

Aufgabe 9 (3 + 4 Punkte)

Für $c > 0$ sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\rho(x) = \ln(x^c)\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$.

(a) Bestimme $c > 0$ so, dass ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Es sei nun c wie in (a) bestimmt und X eine Zufallsvariable mit Dichte ρ. Bestimme $\mathbb{E}[X]$ und $\mathsf{Var}(X)$.

Wir wünschen euch allen schöne Weihnachten und einen guten Rutsch nach 2017!