



## Stochastik für WiWi - Übungsblatt 8

Abgabe: 16. Dezember vor Beginn der Übung.

### Aufgabe 1 (3 + 5 Punkte)

Es sei  $X \sim U(a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , eine auf dem Intervall  $(a, b)$  gleichverteilte Zufallsvariable.

- Bestimme  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}(X)$ .
- Es seien nun  $a = -1$  und  $b = 3$ .
  - Bestimme  $P(X \leq 2)$ ,  $P(0 \leq X < 1)$  sowie  $P(X \geq 0.5)$ .
  - Bestimme das 40%- sowie das 70%-Quantil der Verteilung von  $X$ .

### Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

Die sogenannte Gammafunktion  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Zeige mittels partieller Integration, dass  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  gilt, für beliebige  $x > 0$ .
- Verwende (a) und vollständige Induktion um zu zeigen, dass für beliebige  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

### Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)

Verwende Aufgabe 2 um folgende Resultate zu zeigen:

- Es sei  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Verwende Aufgabe 2 um zu zeigen, dass für  $r \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{r!}{\lambda^r}.$$

- Es sei  $X$  gammaverteilt mit den Parametern  $\lambda$ ,  $p > 0$ , d.h.  $X$  besitze die Dichte

$$\rho_X(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige:  $\mathbb{E}[X] = \frac{p}{\lambda}$ .

### Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Zu Forschungszwecken wurde ein mittelalterliches Katapult nachgebaut. Es steht 7,40m vom Ufer eines Baches entfernt, der 5,20m breit ist. Die Munition besteht aus Steinkugeln, die einen Durchmesser von 20cm aufweisen. Nach einigen Probeschüssen wurde die Theorie aufgestellt, dass die Schussweite normalverteilt ist, im Mittel 10m beträgt und eine Standardabweichung von 5m hat.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geschossene Kugel in vollem Umfang im Bach landet?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel über den Bach geschossen wird und (zumindest teilweise) am gegenüberliegenden Ufer aufschlägt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss nach hinten los geht (d.h., dass die Kugel nicht zum Bach, sondern in die entgegengesetzte Richtung fliegt)?
- Elf Meter hinter dem Katapult befindet sich ein geparkter Wagen. Ist es ausgeschlossen, dass eine Kugel den Wagen beschädigt? Begründe deine Antwort.

