Dipl.-Math. Stefan Roth WiSe 2017
2. Oktober 2017

Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 1

Besprechung: 4. Oktober im Kurs.

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Aufgabe 1

Im Folgenden sei stets Ω eine nichtleere Menge. Begründe, ob es sich bei den Ereignissystemen $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4$ um σ-Algebren handelt.

(a) $\Omega = \{23, U, \varepsilon, ☺, \square, ☼\}$ und $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{23, U, \varepsilon, ☺\}, \{23, \square, ☼\}, \{U, \varepsilon, ☺\}, \{23\}\}$

(b) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ für eine nichtleere Teilmenge A von Ω.

(c) $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F}_3 = \{A \subset \mathbb{N} : \ A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$

(d) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_4 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\}$

Aufgabe 2

Betrachte folgende Ereignisse bzgl. der Wertentwicklung des Dollarkurses nach einem Jahr:

1.) A = "Der Kurs steigt um weniger als 5%, fällt aber nicht"

2.) B = "Der Kurs steigt um 5-10%"

3.) C = "Der Kurs steigt um über 10%"

Betrachte die folgenden Ereignisse:

(a) $A \cup B$

(b) $(A \cup B \cup C)^c$

(c) $(A \cup B)^c \cup C$

(d) $B^c \cap C^c$

Beschreibe die Ereignisse in (a)-(d) jeweils zunächst in Worten und bestimme ihre Wahrscheinlichkeiten, falls bekannt ist, dass $\mathbb{P}(A) = 0.4$ und $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 0.05$

Aufgabe 3

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{F})$ stets ein Meßraum und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen Fällen ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

(a) $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{0\})$ und $\mathbb{P}(\{k\}) = (1/2)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}(A) = \mathbb{1}_A(0)$, $A \in \mathcal{F}$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in A} 2j(n(n+1))^{-1}$, $A \in \mathcal{F}$.

2 Totale Wkt. und der Satz von Bayes

Aufgabe 4

Frau Müller bringt ihrem Sohn jeden Tag nach der Arbeit eine rotationssymmetrische schokoladige Leckerei mit, die ein wechselndes Spielzeug als Beigabe im Inneren enthält. Da sich ihr Sohn am meisten freut, wenn es sich bei dieser Beigabe um ein Auto handelt, hat Frau Müller darauf geachtet, bei welchem Supermarkt die Wahrscheinlichkeit dafür am höchsten ist. Sie hat dabei folgende Vermutung bzgl. der Wahrscheinlichkeiten für ein Auto aufgestellt:

Supermarkt A: 20 %, Supermarkt B: 30 %, Supermarkt C: 10 %, Supermarkt D: 5 %.

Da Frau Müller an ständig wechselnden Orten arbeitet, kauft sie mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten in den Supermärkten A-D ein:

Supermarkt A: 20 %, Supermarkt B: 40 %, Supermarkt C: 25 %, Supermarkt D: 15 %.

Nimm nun an, dass die von Frau Müller geschätzten Zahlen stimmen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Müllers Sohn ein Auto findet?

(b) Er hat heute ein Auto gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frau Müller im Supermarkt C eingekauft?

3 Zufallsvariablen

Aufgabe 5

Für welche $c \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, um Wahrscheinlichkeitsdichten?

(a) $f_1(x) = \frac{c}{\sqrt{x-1}} \mathbb{1}_{(1,2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = ce^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f_3(x) = \frac{c}{2} |\sin(cx)| \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6

Zeige, dass es sich bei folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, jeweils um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt und bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion $F_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = (2 - \alpha)x^{-\alpha+1} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha < 2$ fix.

(c) $f_3(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ fix.

(d) $f_4(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\alpha)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fix. (Beachte Fußnote[1])

[1] Hinweis: Es ist $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4 Momente von Zufallsvariablen

Aufgabe 7

Es sei f_p gegeben durch

$$f_p(x) = \begin{cases} 2p & \text{, falls } x \in \{-1, 1\} \\ p & \text{, falls } x = 0 \\ 1 - 5p & \text{, falls } x = 2 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche p ist f_p eine Zähldichte?

(b) Es sei nun X eine Zufallsvariable mit Zähldichte f_p, p wie in (a). Bestimme $\mathbb{E}[X^r]$ für $r \in \mathbb{N}$ sowie $\mathsf{Var}(X)$.

Aufgabe 8

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega)$. Sei weiterhin $Y = g(X)$. Bestimme in den folgenden Fällen $\mathbb{E}[Y^r]$, $r \in \mathbb{N}$, und $\mathsf{Var}(Y)$:

(a) $X(\Omega) = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \ldots, 4\pi\} = \{k\pi/2,\ k = 0, \ldots, 8\}$ und X ist gleichverteilt[2], $g(x) = \sin(x)$.

(b) $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$, $p \in (0, 1)$, $g(x) = 2^x$.

(c) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ und $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = e^{2x}$. Beachte Fußnote[3].

Aufgabe 9

Bestimme jeweils $\mathbb{E}[X]$ und $\mathsf{Var}(X)$, falls

(a) $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(b) $X \sim U(a, b)$, $0 < a < b < \infty$.

(c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

---

[2] d.h. X nimmt alle Werte in $X(\Omega)$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an.

[3] Hinweis: Verwende $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.