



Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 3

Besprechung: 10. Oktober im Kurs.

1 Tests statistischer Hypothesen

Aufgabe 1

Die „WischiWaschi KG“ bestellt zur Herstellung ihrer Waschmaschinen elektrische Bauteile bei einem Lieferanten. Mit diesem wurde vereinbart, dass eine Charge mit 10000 Bauteilen höchstens 50 defekte Bauteile enthalten darf. Andernfalls hat die „WischiWaschi KG“ kostenlosen Anspruch auf eine neue Lieferung. Um zu testen ob eine Charge mehr als 50 defekte Bauteile enthält werden in der Qualitätskontrolle der „WischiWaschi KG“ einer Charge zufällig 5 Teile entnommen. Enthält die Stichprobe ein defektes Bauteil, so wird reklamiert.

- Formuliere das beschriebene Vorgehen formal als Test. Benenne insbesondere die Hypothese und die Alternative und bestimme den Annahmebereich und den kritischen Bereich.
- Bestimme die Gütefunktion des Tests.

Aufgabe 2

Die Messung der Körpergrößen von 200 nach der Geburt zufällig ausgewählten Säuglingen ergab einen Durchschnittswert von 49.35cm. Wir fassen die Daten als Beobachtung (x_1, \dots, x_{200}) einer i.i.d. Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_{200}) auf.

- Nimm an, dass $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu = 48.8\text{cm}$ und $\sigma^2 = 5.3\text{cm}^2$. Bestimme $P(\bar{X}_{200} > \bar{x}_{200})$ sowie das 90%-Quantil der Verteilung von \bar{X}_{200} .
- Nimm nun an, dass X_1 exponentialverteilt ist mit Erwartungswert 48.8cm. Bestimme mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für $P(\bar{X}_{200} > \bar{x}_{200})$ sowie für das 90%-Quantil der Verteilung von \bar{X}_{200} .

Aufgabe 3

Ein Getränkehersteller füllt seine Limonade auf zwei unterschiedlichen Maschinen in 0.5 Liter Flaschen ab. Die erwartete Abfüllmenge bei Maschinen 1 beträgt 0.48 Liter, bei Maschine 2 hingegen 0.52 Liter. Bei beiden Maschinen ist die Standardabweichung $\sigma = 0.01$ Liter. Nach Auskunft des Maschinenherstellers sind die Abfüllmengen der Maschinen normalverteilt. Zwecks Qualitätskontrolle wurden von beiden Maschinen jeweils acht Flaschen (zufällig) entnommen. Dabei fand sich bei einer der beiden Stichproben eine erhöhte Anzahl von gesundheitsschädlichen Keimen. Unglücklicherweise wurde nach entnahme vergessen zu notieren welche Stichprobe von Maschine 1 bzw. welche von Maschine 2 stammt. Dies soll nun mit Hilfe eines Tests des Erwartungswertes θ geklärt werden. Betrachte dazu das Hypothesenpaar

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{0.48\} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \{0.52\}.$$

Der kritische Bereich des Tests sei gegeben durch $K = \{(x_1, \dots, x_n) : T(x_1, \dots, x_n) > c\}$, wobei

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - 0.48}{\sigma}.$$

- (a) Nimm an, dass H_0 richtig ist. Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so, dass $P_\theta(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) = \alpha$ für beliebiges aber fest vorgegebenes $\alpha \in (0, 1)$?
- (b) Bestimme die Macht des Tests φ .
- (c) Die mit Keimen belastete Stichprobe besitze die Abfüllmengen (in Litern)

$$(x_1, \dots, x_8) = (0.473, 0.521, 0.485, 0.451, 0.465, 0.533, 0.512, 0.501).$$

Teste zum Niveau $\alpha = 0.01$, ob die Stichprobe von Maschine 1 stammt.

Aufgabe 4

Das Gewicht von 1000g Zuckerpaketen, die auf einer bestimmten Maschine abgefüllt werden, genüge einer $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung. Das folgende Tableau zeigt die Gewichtswerte einer Stichprobe von 15 zufällig entnommenen Zuckerpaketen.

984.51	990.22	992.07	999.23	996.17
992.49	998.79	989.09	993.15	991.42
1003.75	993.03	982.76	996.67	991.90

Teste zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese $H_0 : \mu = 1000$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \neq 1000$, falls

- (a) $\sigma^2 = 15$.
- (b) σ^2 unbekannt ist.

Gib jeweils auch die Schlussfolgerungen an. Teste schließlich noch $H_0 : \sigma^2 = 15$ gegen die Alternative $H_1 : \sigma^2 \neq 15$.

Aufgabe 5

In einer Teigfabrik steht eine Befüllungsanlage. Die Fabrik gibt an, dass die Einfüllmenge des Teiges in die Pakete durch diese Befüllungsanlage normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 6.1$ kg und Varianz $\sigma^2 = 0.01$ kg² sei.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 6 kg eingefüllt werden?
- (b) Kontrolleur Kleinlich ist heute in der Fabrik zu Besuch, um mehrere Pakete zu überprüfen. Es wird vorausgesetzt, dass die Messungen unabhängig sind. Wie viele Pakete muss Kleinlich mindestens wiegen, um den Mittelwert des Paketgewichts auf 10 g genau angeben zu können (das heißt, dass die Standardabweichung des Mittelwerts 10 g ist)?
- (c) Herr Kleinlich hat jetzt insgesamt 25 Pakete ausgewogen und erhält als Mittelwert 6.05 kg. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Mittelwert der Gewichte unter den oben gemachten Annahmen noch kleiner ausfällt?