



ulm university universität  
**uulm**

# Mathematische Statistik

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Ulm

2024

## Vorwort

Das vorliegende Skript der Vorlesung *Mathematische Statistik* entstand aus dem Zyklus der Vorlesungen über Stochastik, welche ich in den Jahren 2010-2024 an der Universität Ulm gehalten habe. Es gibt eine Übersicht über die typischen Fragestellungen und Methoden der mathematischen Statistik. Insbesondere stellt es einen Versuch dar, einen Mittelweg zwischen praktisch orientierten (aber mathematisch oft sehr dürftigen) Statistik-Monographien einerseits und trockenen Büchern über die mathematische Statistik andererseits einzuschlagen. Ob es mir gelungen ist, soll der Leser beurteilen.

Ich möchte gerne meinen Kollegen aus dem Institut für Stochastik für ihre Unterstützung und anregenden Diskussionen während der Entstehung des Skriptes danken. Herrn Linus Lach und Tobias Brosch haben eine hervorragende Arbeit beim Tippen des Skriptes und bei der Erstellung der Abbildungen, die den Text begleiten, geleistet. Dafür gilt ihnen mein herzlicher Dank.

Ulm, den 8. Oktober 2024  
Evgeny Spodarev

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>1 Punktschätzer</b>	<b>1</b>
1.1 Parametrische Familien von statistischen Prüfverteilungen . . .	2
1.1.1 Gamma-Verteilung . . . . .	2
1.1.2 Student-Verteilung (t-Verteilung) . . . . .	6
1.1.3 Fisher-Snedecor-Verteilung (F-Verteilung) . . . . .	8
1.2 Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern . . . . .	10
1.2.1 Plug-In-Schätzer . . . . .	11
1.2.2 Momentenschätzer . . . . .	13
1.2.3 Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	15
1.2.4 Bayes-Schätzer . . . . .	27
1.2.5 Resampling-Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern . . . . .	30
1.3 Weitere Güteeigenschaften von Punktschätzern . . . . .	35
1.3.1 Ungleichung von Cramér-Rao . . . . .	35
1.3.2 Suffizienz . . . . .	40
1.3.3 Vollständigkeit . . . . .	45
1.3.4 Bester erwartungstreuer Schätzer . . . . .	47
1.3.5 $\delta$ -Methode . . . . .	50
<b>2 Konfidenzintervalle</b>	<b>56</b>
2.1 Einführung . . . . .	56
2.2 Eine-Stichprobe-Probleme . . . . .	58
2.2.1 Normalverteilung . . . . .	58
2.2.2 Konfidenzintervalle aus stochastischen Ungleichungen	60
2.2.3 Asymptotische Konfidenzintervalle . . . . .	62
2.3 Zwei-Stichproben-Probleme . . . . .	68
2.3.1 Normalverteilte Stichproben . . . . .	68
2.3.2 Poissonverteilte Stichproben . . . . .	70

<b>3</b>	<b>Tests statistischer Hypothesen</b>	<b>74</b>
3.1	Allgemeine Philosophie des Testens . . . . .	74
3.2	Nichtrandomisierte Tests . . . . .	84
3.2.1	Parametrische Signifikanztests . . . . .	84
3.3	Randomisierte Tests . . . . .	89
3.3.1	Grundlagen . . . . .	90
3.3.2	Neyman-Pearson-Tests bei einfachen Hypothesen . . .	91
3.3.3	Einseitige Neyman-Pearson-Tests . . . . .	97
3.3.4	Unverfälschte zweiseitige Tests . . . . .	103
3.4	Anpassungstests . . . . .	109
3.4.1	$\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	110
3.4.2	$\chi^2$ -Anpassungstest von Pearson-Fisher . . . . .	116
3.4.3	Anpassungstest von Shapiro . . . . .	123
3.5	Weitere, nicht parametrische Tests . . . . .	124
3.5.1	Binomialtest . . . . .	124
3.5.2	Iterationstests auf Zufälligkeit . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Lineare Regression</b>	<b>130</b>
4.1	Multivariate Normalverteilung . . . . .	131
4.1.1	Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung . .	134
4.1.2	Lineare und quadratische Formen von normalverteil-	
	ten Zufallsvariablen . . . . .	135
4.2	Multivariate lineare Regressionsmodelle mit vollem Rang . . .	144
4.2.1	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	144
4.2.2	Schätzer der Varianz $\sigma^2$ . . . . .	149
4.2.3	Maximum-Likelihood-Schätzer für $\beta$ und $\sigma^2$ . . . . .	151
4.2.4	Tests für Regressionsparameter . . . . .	154
4.2.5	Konfidenzbereiche . . . . .	158
4.3	Multivariate lineare Regression mit Rang $(X) < m$ . . . . .	161
4.3.1	Verallgemeinerte Inverse . . . . .	161
4.3.2	MKQ-Schätzer für $\beta$ . . . . .	163
4.3.3	Erwartungstreu schätzbare Funktionen . . . . .	166
4.3.4	Normalverteilte Störgrößen . . . . .	170
4.3.5	Hypothesentests . . . . .	172
4.3.6	Konfidenzbereiche . . . . .	174
4.3.7	Einführung in die Varianzanalyse . . . . .	177
<b>5</b>	<b>Verallgemeinerte lineare Modelle</b>	<b>180</b>
5.1	Exponentialfamilie von Verteilungen . . . . .	181
5.2	Linkfunktion . . . . .	184
5.3	Maximum-Likelihood-Schätzung von $\beta$ . . . . .	186
5.4	Asymptotische Tests für $\beta$ . . . . .	193
5.5	Kriterien zur Modellwahl bzw. Modellanpassung . . . . .	200

<b>6 Hauptkomponentenanalyse</b>	<b>203</b>
6.1 Einführung	203
6.2 Hauptkomponentenanalyse auf Modellebene	204
6.3 Hauptkomponentenanalyse auf Datenebene	213
6.4 Asymptotische Verteilung von HK bei normalverteilten Stichproben	217
6.5 Ausreißerererkennung	219
6.6 Hauptkomponentenanalyse und Regression	222
6.7 Numerische Berechnung der Hauptkomponenten	228
<b>Literatur</b>	<b>231</b>
<b>Index</b>	<b>234</b>

# Kapitel 1

## Punktschätzer

Sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Stichprobe. Es wird angenommen, dass diese eine Realisierung einer Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  ist, wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit der unbekanntem Verteilungsfunktion  $F$  sind und  $F$  zu einer bekannten parametrischen Familie  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$  gehört. Hier ist  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$  der  $m$ -dimensionale Parametervektor der Verteilung  $F_\theta$  und  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  der sogenannte Parameterraum (eine Borel-Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$ , die die Menge aller zugelassenen Parameterwerte darstellt). Es wird vorausgesetzt, dass die Parametrisierung  $\theta \rightarrow F_\theta$  identifizierbar ist, indem  $F_{\theta_1} \neq F_{\theta_2}$  für  $\theta_1 \neq \theta_2$  gilt.

Eine wichtige Aufgabe der Statistik, die wir in diesem Kapitel betrachten werden, besteht in der Schätzung des Parametervektors  $\theta$  (oder eines Teils von  $\theta$ ) an Hand von der konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ . In diesem Fall spricht man von einem Punktschätzer  $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , der eine gültige Stichprobenfunktion ist. Meistens wird angenommen, dass

$$P(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \in \Theta) = 1,$$

wobei zu dieser Regel auch Ausnahmen existieren. Bisher haben wir den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , auf dem unsere Zufallsstichprobe definiert ist, nicht näher spezifiziert. Dieser kann aber leicht spezifiziert werden, indem man den sogenannten *kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum* angibt, wobei

$$\Omega = \mathbb{R}^\infty, \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}_\mathbb{R}^\infty = \mathcal{B}_\mathbb{R} \times \mathcal{B}_\mathbb{R} \times \dots$$

und das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  durch

$$P(\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : \omega_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, \omega_{i_k} \leq x_{i_k}\}) = \prod_{j=1}^k F_\theta(x_{i_j})$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq i_1 < \dots < i_k$  gegeben sei. Um zu betonen, dass  $P$  vom Parameter  $\theta$  abhängt, werden wir Bezeichnungen  $P_\theta$ ,  $E_\theta$  und  $\text{Var}_\theta$  für das Maß  $P$ , den Erwartungswert und die Varianz bzgl.  $P$  verwenden.

Auf dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$  gilt  $X_i(\omega) = \omega_i$  (Projektion auf die Koordinate  $i$ ),  $i = 1, \dots, n$ ,

$$P_\theta(X_i \leq x_i) = P_\theta(\{\omega \in \Omega : \omega_i \leq x_i\}) = F_\theta(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

## 1.1 Parametrische Familien von statistischen Prüfverteilungen

In der Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden bereits einige parametrische Familien von Verteilungen eingeführt. Hier geben wir weitere Verteilungsfamilien an, die in der Statistik eine besondere Stellung einnehmen, weil sie als Referenzverteilungen in der Schätztheorie, statistischen Tests und Konfidenzintervallen ihre Anwendung finden.

### 1.1.1 Gamma-Verteilung

Als erstes führen wir zwei spezielle Funktionen aus der Analysis ein:

1. Die *Gamma-Funktion*:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad \text{für } p > 0.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,
- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  für alle  $p > 0$ ,
- $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Die *Beta-Funktion*:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q > 0.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

- $B(p, q) = B(q, p)$ ,
- $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  für alle  $p, q > 0$ ,

**Definition 1.1.1.** Die *Gamma-Verteilung* mit Parametern  $\lambda > 0$  und  $p > 0$  ist eine absolut stetige Verteilung mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

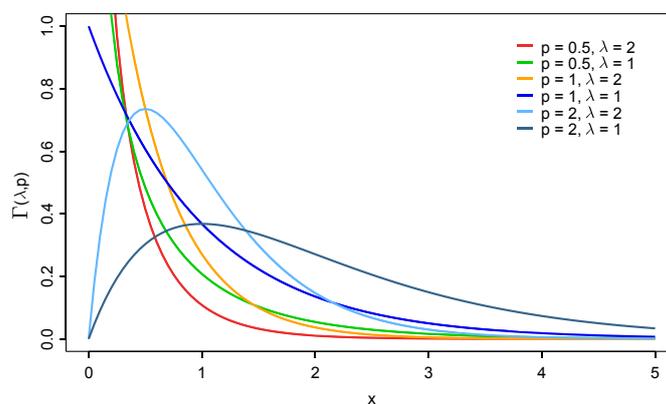


Abbildung 1.1: Dichte der Gammaverteilung

Dabei verwenden wir die Bezeichnung  $X \sim \Gamma(\lambda, p)$  für eine Zufallsvariable  $X$ , die Gamma-verteilt mit Parametern  $\lambda$  und  $p$  ist. Es gilt offensichtlich  $X \geq 0$  fast sicher.

**Übungsaufgabe 1.1.2.** Zeigen Sie, dass (1.1) eine Dichte ist.

**Beispiel 1.1.3.**

1. In der Kraftfahrzeugversicherung wird die Gamma-Verteilung oft zur Modellierung des Gesamtschadens verwendet.
2. Falls  $p = 1$ , dann ist  $\Gamma(\lambda, 1) = \text{Exp}(\lambda)$ .

**Satz 1.1.4.** Falls  $X \sim \Gamma(\lambda, p)$ , dann gilt Folgendes:

1. Die momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung  $\Psi_X(s)$  ist gegeben durch

$$\Psi_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \frac{1}{(1 - s/\lambda)^p}, \quad s < \lambda.$$

Die charakteristische Funktion der Gammaverteilung  $\varphi_X(s)$  ist gegeben durch

$$\varphi_X(s) = \mathbb{E}e^{isX} = \frac{1}{(1 - is/\lambda)^p}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2.  $k$ -te Momente:

$$\mathbb{E}X^k = \frac{p(p+1) \cdots (p+k-1)}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Beweis**

1. Betrachte

$$\begin{aligned}\Psi_X(s) &= \int_0^\infty e^{sx} f_X(x) dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{\overbrace{(s-\lambda)x}^{<0}} dx \\ &\stackrel{-(s-\lambda)x=y}{=} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(-s-\lambda)^p} e^{-y} dy = \frac{\lambda^p \Gamma(p)}{\Gamma(p)(\lambda-s)^p} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)^p = \frac{1}{(1-s/\lambda)^p}, \quad \lambda > s.\end{aligned}$$

Falls  $s \in \mathbb{C}$  und  $\operatorname{Re}(s) < \lambda$ , dann ist  $\Psi_X(s)$  holomorph auf  $D$ , wobei  $D = \{s = x + iy \in \mathbb{C} : x < \lambda\}$ . Es gilt

$$\Psi_X(it) = \varphi_X(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1-it/\lambda)^p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\mathbb{E}X^k = \Psi^{(k)}(0) \implies \mathbb{E}X^k = \frac{p \cdot (p+1) \cdot \dots \cdot (p+k-1)}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

**Folgerung 1.1.5** (Faltungstabilität der  $\Gamma$ -Verteilung). Falls  $X \sim \Gamma(\lambda, p_1)$  und  $Y \sim \Gamma(\lambda, p_2)$ ,  $X, Y$  unabhängig, dann ist  $X + Y \sim \Gamma(\lambda, p_1 + p_2)$ .

**Beweis** Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(s) &= \varphi_X(s) \cdot \varphi_Y(s) \\ &= \frac{1}{(1-is/\lambda)^{p_1}} \cdot \frac{1}{(1-is/\lambda)^{p_2}} \\ &= \left(\frac{1}{1-is/\lambda}\right)^{p_1+p_2} \\ &= \varphi_{\Gamma(\lambda, p_1+p_2)}(s).\end{aligned}$$

Da die charakteristischen Funktionen die Verteilungen eindeutig bestimmen, folgt damit  $X + Y \sim \Gamma(\lambda, p_1 + p_2)$ . □

**Beispiel 1.1.6.** Seien  $X_1, \dots, X_n \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$  unabhängig. Nach der Folgerung 1.1.5 gilt  $X = X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(\lambda, \underbrace{1 + \dots + 1}_n) = \Gamma(\lambda, n)$ , denn

$\operatorname{Exp}(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$ . Dabei heißt  $X$  *Erlang-verteilt* mit Parametern  $\lambda$  und  $n$ . Man schreibt  $X \sim \operatorname{Erl}(\lambda, n)$ .

$$\text{Zusammengefasst:} \quad \operatorname{Erl}(\lambda, n) = \Gamma(\lambda, n)$$

*Interpretation:* In der Risikotheorie z.B. sind  $X_i$  Zwischenankunftszeiten der Einzelschäden. Dann ist  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  die Ankunftszeit des  $n$ -ten Schadens,  $X \sim \text{Erl}(\lambda, n)$ .

**Definition 1.1.7** ( $\chi^2$ -Verteilung).  $X$  ist eine  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable mit  $k$  Freiheitsgraden ( $X \sim \chi_k^2$ ), falls  $X \stackrel{d}{=} X_1^2 + \dots + X_k^2$ , wobei  $X_1, \dots, X_k \sim N(0, 1)$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen sind.

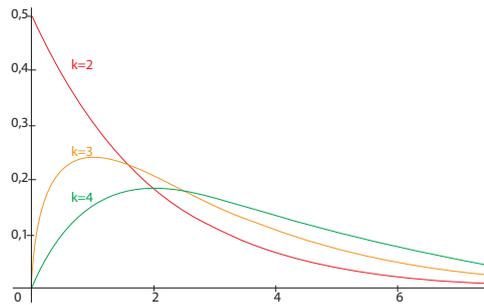


Abbildung 1.2: Dichte der  $\chi^2$ -Verteilung für  $k = 2, 3, 4$

**Satz 1.1.8** ( $\chi^2$ -Verteilung: Spezialfall der  $\Gamma$ -Verteilung mit  $\lambda = 1/2$ ,  $p = k/2$ ). Falls  $X \sim \chi_k^2$ , dann gilt:

1.  $X \sim \Gamma(1/2, k/2)$ , d.h.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{k/2-1} e^{-x/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (1.2)$$

2. Insbesondere ist  $EX = k$ ,  $\text{Var } X = 2k$ .

**Beweis**

1. Sei  $X = X_1^2 + \dots + X_k^2$  mit  $X_i \sim N(0, 1)$  u.i.v. verteilte Zufallsvariablen. Berechnen wir zunächst die Verteilung der  $X_i^2$  nach [?, Satz 3.6.4]:

$$\begin{aligned} P(X_1^2 \leq x) &= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \int_{-\sqrt{x}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_0^x \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \int_0^x \frac{(1/2)^{-1/2} t^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} e^{-t/2} dt, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Somit folgt  $X_1^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2) \implies X \sim \Gamma(1/2, \underbrace{1/2 + \dots + 1/2}_k) = \Gamma(1/2, k/2)$

und daher gilt der Ausdruck (1.2) für die Dichte.

2. Wegen der Additivität des Erwartungswertes und der Unabhängigkeit von  $X_i$  gilt

$$EX = k \cdot EX_1^2, \quad \text{Var } X = k \text{Var } X_1^2, \quad E(X_1^2) = E(\Gamma(1/2, 1/2)).$$

Bitte zeigen Sie selbstständig, dass  $EX_1^2 = 1$ ,  $\text{Var } X_1^2 = 2$ .

□

### 1.1.2 Student<sup>1</sup>-Verteilung (t-Verteilung)

**Definition 1.1.9.** Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariablen, wobei  $X \sim N(0, 1)$  und  $Y \sim \chi_r^2$ . Dann heißt die Zufallsvariable

$$U \stackrel{d}{=} \frac{X}{\sqrt{Y/r}}$$

Student- oder  $t$ -verteilt mit  $r$  Freiheitsgraden. Wir schreiben  $U \sim t_r$ .

**Satz 1.1.10** (Dichte der  $t$ -Verteilung). Falls  $X \sim t_r$ , dann gilt:

1.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{r} B\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{\frac{r+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.  $EX = 0$ ,  $\text{Var } X = \frac{r}{r-2}$ ,  $r \geq 3$ .

**Bemerkung 1.1.11.**

1. Die  $t_r$ -Verteilung ist symmetrisch. Insbesondere gilt:

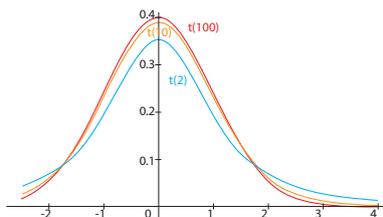


Abbildung 1.3: Dichte  $\hat{f}$  der  $t$ -Verteilung für  $r = 2, 10, 100$

$$t_{r,\alpha} = -t_{r,1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

wobei  $t_{r,\alpha}$  das  $\alpha$ -Quantil der Student-Verteilung mit  $r$  Freiheitsgraden ist.

<sup>1</sup>Genannt nach dem Entdecker William Sealy Gosset, der seine Arbeiten mit Student unterzeichnete.

2. Falls  $r \rightarrow \infty$ , dann  $f_r(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (Übungsaufgabe)
3. Für  $r = 1$  gilt:  $t_1 = \text{Cauchy}(0, 1)$  mit Dichte  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Der Erwartungswert von  $t_1$  existiert nicht.

**Beweis des Satzes 1.1.10:**

1. Es gilt  $X := \varphi(Y, Z)$ , wobei  $\varphi(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y/r}}$  und  $V = (Y, Z)$  ein zweidimensionaler Zufallsvektor ist,  $Y \sim N(0, 1)$ ,  $Z \sim \chi_r^2$ ,  $Y$  und  $Z$  unabhängig.

Wir wollen den sogenannten *Dichtetransformationssatz für Zufallsvektoren* [?, Satz 3.6.6] verwenden, der besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen

$$f_{\varphi(V)}(x) = f_V(\varphi^{-1}(x))|J|$$

gilt, wobei  $|J| = |\det J|$ ,  $J = \left( \frac{\partial \varphi_i^{-1}(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$  und  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Berechnen wir hier  $\varphi^{-1}$  von  $\varphi : (x, y) \mapsto (v, w)$ , wobei  $v = \frac{x}{\sqrt{y/r}}$ ,  $w = y$ :

$$v = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{r}}} \Rightarrow x = v\sqrt{\frac{y}{r}} = v\sqrt{\frac{w}{r}}. \text{ Somit } \varphi^{-1} : (v, w) \mapsto \left( v\sqrt{\frac{w}{r}}, w \right)$$

und für die Jacobi-Matrix gilt

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{w}{r}} & \frac{v}{2\sqrt{wr}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Falls  $V = (Y, Z)$ ,  $Y$  und  $Z$  unabhängig, dann

$$f_V(x, y) = f_Y(x) \cdot f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{y^{r/2-1} e^{-y/2}}{\Gamma(r/2) 2^{r/2}} = \frac{y^{r/2-1} e^{-\frac{y+x^2}{2}}}{2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(1/2) \Gamma(r/2)}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $y > 0$ . Nach dem Dichtetransformationssatz gilt

dann

$$\begin{aligned}
 f_X(v) &= \int_0^\infty f_{\varphi(V)}(u, w) dw = \int_0^\infty f_V(\varphi^{-1}(v, w)) |J| dw \\
 &= \int_0^\infty \frac{e^{-(v^2 \frac{w}{r} + w)/2} w^{r/2-1}}{2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(1/2) \Gamma(r/2)} \sqrt{w/r} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{r} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(1/2) \Gamma(r/2)} \cdot \int_0^\infty w^{\frac{r-1}{2}} e^{-\overbrace{\frac{v^2}{r} + 1}^{=t} \cdot w} dw \\
 &\stackrel{w = \frac{v^2}{r} t}{=} \frac{1}{\sqrt{r} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(1/2) \Gamma(r/2)} \cdot \int_0^\infty \frac{2^{\frac{r-1}{2} + 1} t^{\frac{r-1}{2}}}{(v^2/r + 1)^{\frac{r-1}{2} + 1}} e^{-t} dt \\
 &= \frac{2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{(v^2/r + 1)^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{r} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(1/2) \Gamma(r/2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{r} B(r/2, 1/2) (1 + v^2/r)^{\frac{r+1}{2}}}
 \end{aligned}$$

2. Übungsaufgabe

□

### 1.1.3 Fisher-Snedecor-Verteilung (F-Verteilung)

**Definition 1.1.12.** Falls  $X \stackrel{d}{=} \frac{U_r/r}{U_s/s}$ , wobei  $U_r \sim \chi_r^2$ ,  $U_s \sim \chi_s^2$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $U_r, U_s$  unabhängig, dann hat  $X$  eine F-Verteilung mit Freiheitsgraden  $r, s$ . Bezeichnung:  $X \sim F_{r,s}$ .

**Lemma 1.1.13.** Falls  $X \sim F_{r,s}$ , dann ist  $X$  absolut stetig verteilt mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{x^{r/2-1}}{B(r/2, s/2) (r/s)^{-r/2} (1 + (r/s) \cdot x)^{\frac{r+s}{2}}} \cdot I(x > 0).$$

**Beweis** Da  $U_r \sim \chi_r^2$ , gilt für ihre Dichte

$$f_{U_r}(x) = \frac{x^{r/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(r/2) 2^{r/2}}, \quad x > 0, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Somit

$$P(U_r/r \leq x) = P(U_r \leq rx) = F_{U_r}(rx)$$

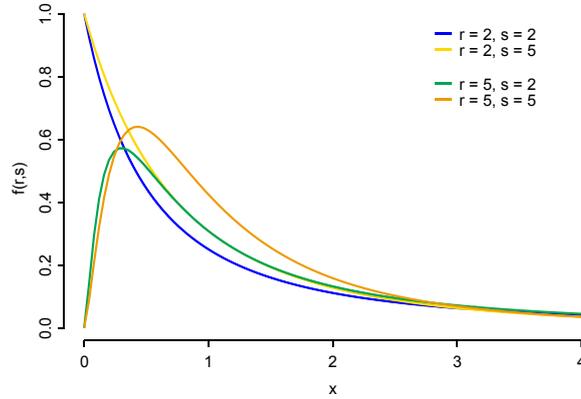


Abbildung 1.4: Dichte der F-Verteilung für verschiedene Parameter  $r$  und  $s$ .

und deshalb

$$\begin{aligned} f_{U_{r/r}}(x) &= (F_{U_r}(rx))' = r \cdot f_{U_r}(rx) = \frac{r(rx)^{r/2-1} e^{-rx/2}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} \cdot I(x > 0) \\ &= \frac{r^{r/2} x^{r/2-1} e^{-r/2 \cdot x}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} \cdot I(x > 0). \end{aligned}$$

Nach dem Dichtetransformationssatz für das Verhältnis von zwei Zufallsvariablen [?, Satz 3.6.9] gilt

$$f_{\frac{U_{r/r}}{U_{s/s}}}(x) = \int_0^\infty t f_{U_{r/r}}(xt) \cdot f_{U_{s/s}}(t) dt \cdot I(x > 0).$$

Somit

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty t \frac{r^{r/2} (tx)^{r/2-1} e^{-rtx/2}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} \cdot \frac{s^{s/2} t^{s/2-1} e^{-st/2}}{\Gamma(s/2)2^{s/2}} dt \\ &= \frac{r^{r/2} s^{s/2} x^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)2^{\frac{r+s}{2}}} \cdot \int_0^\infty t^{r/2+s/2-1} e^{-\overbrace{rx+s}^y} t dt \\ &= \frac{r^{r/2} s^{s/2} x^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} \cdot \int_0^\infty \frac{y^{\frac{r+s}{2}-1}}{(rx+s)^{\frac{r+s}{2}}} \cdot e^{-y} dy \\ &= \frac{r^{r/2} s^{s/2} x^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2) s^{\frac{r+s}{2}} \left(1 + \frac{r}{s} \cdot x\right)^{\frac{r+s}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right) \\ &= \frac{(r/s)^{r/2} x^{r/2-1}}{B(r/2, s/2) \left(1 + \frac{r}{s} x\right)^{\frac{r+s}{2}}} \cdot I(x > 0). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.1.14.** Sei  $X \sim F_{r,s}$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  mit Dichte  $f_X$ .

1. Einige Graphen der F-Verteilung sind in Abbildung 1.4 dargestellt.
2. Einige Eigenschaften der F-Verteilung:

**Lemma 1.1.15.** Es gilt:

$$(a) \quad EX = \frac{s}{s-2}, \quad s \geq 3.$$

$$(b) \quad \text{Var } X = \frac{2s^2(r+s-2)}{r(s-4)(s-2)^2}, \quad s \geq 5.$$

(c) Falls  $F_{r,s,\alpha}$  das  $\alpha$ -Quantil der  $F_{r,s}$ -Verteilung ist, dann gilt

$$F_{r,s,\alpha} = \frac{1}{F_{s,r,1-\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

**Übungsaufgabe 1.1.16.** Beweisen Sie Lemma 1.1.15!

3. Für Quantile  $F_{r,s,\alpha}$  gilt folgende Näherungsformel (Abramowitz, Stegun (1972)):

$F_{r,s,\alpha} \approx e^\omega$ , wobei

$$\omega = 2 \left( \frac{\alpha(h+a)^{1/2}}{h} - \left( \frac{1}{r-1} - \frac{1}{s-1} \right) \cdot \left( a + \frac{5}{6} - \frac{2}{3h} \right) \right),$$

$$h = 2 \left( \frac{1}{r-1} + \frac{1}{s-1} \right)^{-1},$$

$$a = \frac{z_\alpha^2 - 3}{6}$$

und  $z_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der  $N(0, 1)$ -Verteilung ist.

## 1.2 Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern

Aus der Elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ist bereits bekannt:

**Definition 1.2.1.**

1. Die Funktion  $\hat{F}_n(x) = \#\{x_i : x_i \leq x, i = 1, \dots, n\}/n$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  heißt *empirische Verteilungsfunktion der konkreten Stichprobe*  $(x_1, \dots, x_n)$ . Dabei gilt  $\hat{F}_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow [0, 1]$ , weil  $\hat{F}_n(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n, x)$ .

2. Die mit  $x \in \mathbb{R}$  indizierte Zufallsvariable  $\hat{F}_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  heißt *empirische Verteilungsfunktion der Zufallsstichprobe*  $(X_1, \dots, X_n)$ , wenn

$$\hat{F}_n(x, \omega) = \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \#\{X_i, i = 1, \dots, n : X_i(\omega) \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent zur Definition 1.2.1 kann man

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

schreiben, wobei

$$I(x \in A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq x_{(n)}, \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 0, & x < x_{(1)}. \end{cases}$$

für  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ . Dabei ist die Höhe des Sprungs an Stelle  $x_{(i)}$  gleich der relativen Häufigkeit  $f_i$  des Wertes  $x_{(i)}$ . Falls  $x_{(i)} = x_{(i+1)}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so tritt der Wert  $i/n$  nicht auf (vgl. ElemWR Abschnitt 6.3.2).

### 1.2.1 Plug-In-Schätzer

Mit Hilfe von  $\hat{F}_n$  lassen sich sehr viele Schätzer durch die sogenannte *Plug-in-Methode* konstruieren. Dies werden wir jetzt näher erläutern: Sei dazu  $M = \{F : F \text{ ist eine Verteilungsfunktion}\}$ .

**Definition 1.2.2.** Sei ein Parameter  $\theta$  der Verteilungsfunktion  $F$  als ein messbares Funktional  $T : M \rightarrow \mathbb{R}$  von  $F$  gegeben:  $\theta = T(F)$ . Dann heißt  $\hat{\theta} = T(\hat{F}_n)$  der *Plug-in-Schätzer* für  $\theta$ .

**Definition 1.2.3.** Das Funktional  $T : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *linear*, falls

$$T(aF_1 + bF_2) = aT(F_1) + bT(F_2) \quad \forall a, b \geq 0 : a + b = 1, \quad F_1, F_2 \in M.$$

Betrachten wir eine spezielle Klasse der linearen Funktionale

$$T(F) = \int_{\mathbb{R}} r(x) dF(x), \quad F \in M,$$

wobei  $r(x)$  eine beliebige stetige Funktion mit  $\mathbb{E}(r(X)) < \infty$  ist. Beispiele für solche  $T$  sind

$$\mathbb{E}X^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Lemma 1.2.4.** Der Plug-in Schätzer für  $\theta = \int_{\mathbb{R}} r(x) dF(x)$  ist durch

$$\hat{\theta} = \int_{\mathbb{R}} r(x) d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r(x_i)$$

gegeben.

**Übungsaufgabe 1.2.5.** Beweisen Sie Lemma 1.2.4!

**Beispiel 1.2.6** (Plug-in-Schätzer).

1.  $\bar{X}_n$  ist ein Plug-in Schätzer für den Erwartungswert  $\mu$ .
2. *Plug-in Schätzer* für  $\sigma^2 = \text{Var } X$ : Es gilt  $\text{Var } X = \text{E}X^2 - (\text{E}X)^2$  und somit folgt

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2.$$

3. *Schätzer für Schiefe und Wölbung*  $\hat{\gamma}_1$  und  $\hat{\gamma}_2$  (vgl. ElemWR Abschnitt 6.4.4) sind Plug-in Schätzer: Da der Koeffizient der Schiefe als

$$\gamma_1 = \text{E} \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3$$

definiert ist, wobei  $\mu = \text{E}X$ ,  $\sigma^2 = \text{Var } X$ , folgt

$$\hat{\gamma}_1 \stackrel{\mu \rightarrow \bar{X}_n}{\sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}^2} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^3}{(\hat{\sigma}_n^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right)^{3/2}}.$$

Die Konstruktion von  $\hat{\gamma}_2$  erfolgt analog.

4. Der *empirische Korrelationskoeffizient*  $\varrho_{XY}$  ist ein Plug-in Schätzer:

$$\hat{\varrho}_{XY} = \frac{S_{XY}^2}{\sqrt{S_{XX}^2} \sqrt{S_{YY}^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}};$$

in der Tat ist

$$\varrho_{XY} = \frac{\text{E}(X - \text{E}X)(Y - \text{E}Y)}{\sqrt{\text{Var } X} \cdot \sqrt{\text{Var } Y}} = \frac{\text{E}(XY) - \text{E}X \cdot \text{E}Y}{\sqrt{(\text{E}X^2 - (\text{E}X)^2)(\text{E}Y^2 - (\text{E}Y)^2)}}$$

und somit gilt für die linearen Funktionale

$$T_1(F) = \int x dF(x), T_2(F) = \int x^2 dF(x), T_{12}(G) = \int xy dG(x, y)$$

$$\varrho_{XY} = \frac{T_{12}(F_{XY}) - T_1(F_X) \cdot T_1(F_Y)}{\sqrt{(T_2(F_X) - (T_1(F_X))^2)(T_2(F_Y) - (T_1(F_Y))^2)}}.$$

$\hat{\varrho}_{XY}$  bekommt man, in dem man  $F_X$ ,  $F_Y$  und  $F_{XY}$  in  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_{12}$  durch  $\hat{F}_{n,X}$ ,  $\hat{F}_{n,Y}$  und  $\hat{F}_{n,XY}$  ersetzt:

$$\hat{\varrho}_{XY} = \frac{T_{12}(\hat{F}_{n,XY}) - T_1(\hat{F}_{n,X}) \cdot T_1(\hat{F}_{n,Y})}{\sqrt{\left(T_2(\hat{F}_{n,X}) - \left(T_1(\hat{F}_{n,X})\right)^2\right) \left(T_2(\hat{F}_{n,Y}) - \left(T_1(\hat{F}_{n,Y})\right)^2\right)}}.$$

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F \in \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  (Parametrisches Modell). Sei die Parametrisierung  $\theta \mapsto F_\theta$  unterscheidbar, d.h.  $F_\theta \neq F_{\theta'} \iff \theta \neq \theta'$ .

### 1.2.2 Momentenschätzer

*Zielstellung:* Konstruiere einen Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ . Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Satz 4.8) folgt, dass unter gewissen Voraussetzungen (z.B. Gleichverteilung auf einem kompakten Intervall) an die Verteilung  $F$  diese Verteilung aus der Kenntnis von Momenten  $EX^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  wiedergewonnen werden kann. Auf dieser Idee der Schätzung von  $F$  aus den Momenten basiert die von Karl Pearson am Ende des XIX. Jh. vorgeschlagene *Momentenmethode*.

*Annahme:* Es existiert ein  $r \geq m$ , so dass  $E_\theta |X_i|^r < \infty$ . Seien die Momente  $E_\theta X_i^k = g_k(\theta)$ ,  $k = 1, \dots, r$  als Funktionen des Parametervektors  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$  gegeben.

*Momenten-Gleichungssystem:*  $\hat{\mu}_k = g_k(\theta)$ ,  $k = 1, \dots, r$ , wobei  $\hat{\mu}_k$  die  $k$ -ten empirischen Momente definiert durch  $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$  sind.

**Definition 1.2.7.** Falls das obige Gleichungssystem eindeutig lösbar bzgl.  $\theta$  ist, so heißt die Lösung  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  *Momentenschätzer (M-Schätzer)* von  $\theta$ .

**Lemma 1.2.8.** Falls die Funktion  $g = (g_1, \dots, g_r) : \Theta \rightarrow C \subset \mathbb{R}^r$  eindeutig und ihre Inverse  $g^{-1} : C \rightarrow \Theta$  stetig ist, dann ist der M-Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  von  $\theta$  stark konsistent.

**Beweis** Es gilt  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = g^{-1}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_r) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \theta$ , weil  $\hat{\mu}_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} g_k(\theta)$ ,  $k = 1, \dots, r$  (starke Konsistenz der empirischen Momente) und  $g^{-1}$  stetig.  $\square$

### Bemerkung 1.2.9.

1. Unter gewissen Regularitätsbedingungen an  $F_\theta$  ist der M-Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta$  asymptotisch normalverteilt:

$$\sqrt{n} \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma),$$

wobei  $N(0, \Sigma)$  die multivariate Normalverteilung mit Kovarianzmatrix

$$\Sigma = G^T E(Y Y^T) G \quad \text{ist mit} \quad Y = (X, X^2, \dots, X^r)^T, \quad X \stackrel{d}{=} X_i,$$

und

$$G = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial g_i^{-1}}{\partial \theta_j} \\ \end{array} \right)_{\substack{i=1 \dots r, \\ j=1 \dots m}}.$$

2. Andere Eigenschaften gelten für M-Schätzer im Allgemeinen nicht. Zum Beispiel sind nicht alle M-Schätzer erwartungstreu (vgl. Beispiel 1.2.10, 1)).
3. Manchmal sind  $r > m$  Gleichungen im Momentensystem notwendig, um einen M-Schätzer zu bekommen. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn manche Funktionen  $g_i = \text{const}$  sind, d.h. sie enthalten keine Information über  $\theta$  (vgl. Beispiel 1.2.10, 2)).

**Beispiel 1.2.10.**

1. *Normalverteilung:*  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ; Gesucht ist ein M-Schätzer für  $\mu$  und  $\sigma^2$ , also  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} g_1(\mu, \sigma^2) &= E_\theta X = \mu, \\ g_2(\mu, \sigma^2) &= E_\theta X^2 = \text{Var}_\theta X + (E_\theta X)^2 = \sigma^2 + \mu^2. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \mu^2 + \sigma^2. \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \bar{X}_n^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2. \end{aligned}$$

Das heißt, dass die M-Schätzer  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ ,  $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2$  sind. Dabei ist  $\hat{\sigma}^2$  nicht erwartungstreu:

$$E_\theta \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} \cdot E_\theta S_n^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

2. Gleichverteilung:  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $X \sim U[-\theta, \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Gesucht wird ein Momentenschätzer für  $\theta$ . Es gilt

$$g_1(\theta) = E_\theta X = 0,$$

$$g_2(\theta) = E_\theta X^2 = \text{Var}_\theta X = \frac{(\theta - (-\theta))^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}.$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0 & \text{unbrauchbar,} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{\theta^2}{3}. \end{cases}$$

Es folgt, dass  $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$  der Momentenschätzer für  $\theta$  ist. Wir haben somit 2 Gleichungen für die Schätzung eines einzigen Parameters  $\theta$  benötigt, d.h.  $r = 2 > m = 1$ .

### 1.2.3 Maximum-Likelihood-Schätzer

Diese wurden von Carl Friedrich Gauss (Anfang des XIX. Jh.) und Sir Ronald Fisher (1922) entdeckt. Seien entweder alle Verteilungen aus der parametrischen Familie  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$  diskret oder alle absolut stetig.

#### Definition 1.2.11.

1. Falls die Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  absolut stetig verteilt mit Dichte  $f_\theta(x)$  sind, dann heißt

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \Theta$$

die *Likelihood-Funktion* der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ .

2. Falls die Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  diskret verteilt mit Zähldichte  $p_\theta(x) = P_\theta(X_i = x)$ ,  $x \in C$  sind ( $C$  ist der Wertebereich von  $X$ ), dann heißt

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i), \quad (x_1, \dots, x_n) \in C^n, \quad \theta \in \Theta$$

die *Likelihood-Funktion* der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Nach dieser Definition gilt im

- *diskreten Fall*  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$

- *absolut stetigen Fall*

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \theta) \prod_{i=1}^n \Delta x_i &= \\ &= f_{(X_1, \dots, X_n), \theta}(x_1, \dots, x_n) \Delta x_1 \cdot \dots \cdot \Delta x_n \\ &\approx P_\theta(X_1 \in [x_1, x_1 + \Delta x_1], \dots, X_n \in [x_n, x_n + \Delta x_n]) \end{aligned}$$

für  $\Delta x_i \rightarrow 0, i = 1, \dots, n$ .

Nun wird ein Schätzer für  $\theta$  so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit

$$P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \text{ bzw. } P_\theta(X_i \in [x_i, x_i + \Delta x_i], i = 1, \dots, n)$$

maximal wird.  $\implies$  Maximum-Likelihoodmethode:

**Definition 1.2.12.** Angenommen das Maximierungsproblem gegeben durch  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) \mapsto \max_{\theta \in \Theta}$  sei eindeutig lösbar. Dann heißt

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$$

der *Maximum-Likelihood-Schätzer* von  $\theta$  (*ML-Schätzer*).

**Bemerkung 1.2.13.**

1. In relativ wenigen Fällen ist ein ML-Schätzer  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  explizit auffindbar. In diesen Fällen wird meistens der konstante Faktor der Likelihood-Funktion weggelassen und vom Rest der Logarithmus gebildet:

$$\log L(x_1, \dots, x_n, \theta) \quad (\text{die sog. Loglikelihood-Funktion}).$$

Dadurch wird

$$\prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$$

zu einer Summe

$$\sum_{i=1}^n \log f_\theta(x_i) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n \log p_\theta(x_i),$$

die leichter bzgl.  $\theta$  zu differenzieren ist. Danach betrachtet man

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dies ist die notwendige Bedingung eines Extremums von  $\log L$  (und somit von  $L$ , weil  $\log \nearrow$ ). Falls dieses System eindeutig lösbar ist, und die Lösung eine Maximum-Stelle ist, dann wird sie zum ML-Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  erklärt.

2. In den meisten praxisrelevanten Fällen sind ML-Schätzer jedoch nur numerisch auffindbar.

**Beispiel 1.2.14.**

1. *Bernoulli-Verteilung*:  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ , für ein  $p \in [0, 1]$ . Da

$$X = \begin{cases} 1, & \text{mit Wkt. } p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Zähldichte

$$p_\theta(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\},$$

ist die *Likelihood-Funktion der Stichprobe*  $(X_1, \dots, X_n)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \theta) &= \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \stackrel{\text{def.}}{=} h(p). \end{aligned}$$

- (a) Falls  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  ( $\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ), es folgt  $h(p) = (1-p)^n \rightarrow \max_{p \in [0,1]} h(p)$  bei  $p = 0$ . Dann ist der ML-Schätzer  $\hat{p}(0, \dots, 0) = 0$ .
- (b) Falls  $\sum_{i=1}^n x_i = n$  ( $\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ ), es folgt  $h(p) = p^n \rightarrow \max_{p \in [0,1]} h(p)$  bei  $p = 1$ . Dann ist der ML-Schätzer  $\hat{p}(1, 1, \dots, 1) = 1$ .
- (c) Falls  $0 < \sum_{i=1}^n x_i < n$ , dann gilt

$$\log L(x_1, \dots, x_n, p) = n\bar{x}_n \log p + n(1 - \bar{x}_n) \log(1 - p) = n \cdot g(p).$$

Da  $g(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0,1} -\infty$  und

$$\frac{\partial g(p)}{\partial p} = \frac{\bar{x}_n}{p} + \frac{1 - \bar{x}_n}{1 - p} \cdot (-1) = \frac{\bar{x}_n}{p} + \frac{\bar{x}_n - 1}{1 - p} = 0$$

$\iff (1-p)\bar{x}_n + (\bar{x}_n - 1)p = 0 \iff p = \bar{x}_n$ , folgt aufgrund der Stetigkeit von  $g$ , dass  $g$  genau ein Extremum  $\text{argmax}_p g(p) = \bar{x}_n$  besitzt.

Der ML-Schätzer ist also gegeben durch  $\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n$ .

2. *Gleichverteilung*:  $X \sim U[0, \theta]$ ,  $\theta > 0$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  unabhängig identisch verteilt, gesucht ist ein ML-Schätzer für  $\theta$ . Es gilt

$$f_{X_i}(x) = 1/\theta \cdot I(x \in [0, \theta]), \quad i = 1, \dots, n.$$

Somit ist die Likelihood-Funktion durch

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_n, \theta) &= \begin{cases} (1/\theta)^n, & 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (1/\theta)^n, & \text{falls } \min\{x_1, \dots, x_n\} \geq 0 \\ & \text{und } \max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \theta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= g(\theta), \quad \theta > 0
 \end{aligned}$$

gegeben. Damit folgt  $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta > 0} g(\theta) = \max\{x_1, \dots, x_n\} = x_{(n)}$ ,

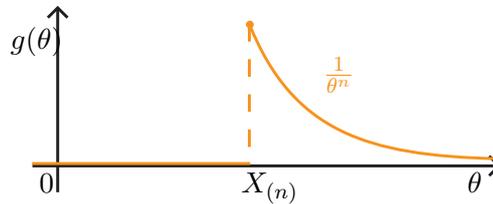


Abbildung 1.5: Illustration der Funktion  $g$ .

wodurch der ML-Schätzer durch  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$  gegeben ist.

Nun wollen wir zeigen, dass ML-Schätzer unter gewissen Voraussetzungen schwach konsistent und asymptotisch normalverteilt sind.

**Definition 1.2.15.** Sei

$$L(x, \theta) = \begin{cases} f_\theta(x), & \text{im absolut stetigen Fall,} \\ p_\theta(x), & \text{im diskreten Fall} \end{cases}$$

die Likelihood-Funktion von  $x$ . Für  $\theta, \theta' \in \Theta$  und  $X \stackrel{d}{=} X_i$ ,  $P_\theta(L(X, \theta') = 0) = 0$  definieren wir die *Information* (Abstand)  $H(P_\theta, P_{\theta'})$  von *Kullback-Leibler* im absolut stetigen Fall als

$$H(P_\theta, P_{\theta'}) = E_\theta \log L(X, \theta) - E_\theta \log L(X, \theta') = \int_{\mathbb{R}} \log \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta')} \cdot L(x, \theta) dx.$$

Für den Fall  $P_\theta(L(X, \theta') = 0) > 0$  setzen wir  $H(P_\theta, P_{\theta'}) = \infty$ . Im diskreten Fall betrachte statt des Integrals die Summe über die nicht trivialen  $p_\theta(x)$ .

Wir werden gleich zeigen, dass  $H(\cdot, \cdot)$  die Eigenschaften  $H(P_\theta, P_{\theta'}) = 0 \iff \theta = \theta'$  und  $H(P_\theta, P_{\theta'}) \geq 0 \quad \forall \theta, \theta' \in \Theta$  besitzt. Es ist allerdings offensichtlich, dass  $H(P_\theta, P_{\theta'})$  nicht symmetrisch bzgl.  $\theta$  und  $\theta'$  ist. Somit ist  $H(\cdot, \cdot)$  keine Metrik.

**Lemma 1.2.16.** Es gilt

1.  $H(P_\theta, P_{\theta'})$  ist wohldefiniert und  $\geq 0$ .
2. Falls  $H(P_\theta, P_{\theta'}) = 0$ , dann gilt  $\theta = \theta'$ .

**Beweis** Wir betrachten zum Beispiel den Fall absolut stetiger  $P_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$  (diskreter Fall folgt analog).

1. Definieren wir

$$f(x) = \begin{cases} \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta')}, & \text{falls } L(x, \theta') > 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten wir den Fall  $P_\theta(L(X, \theta') = 0) = 0$ , so folgt  $P_\theta(L(X, \theta') > 0) = 1$ . Ansonsten ist  $H(P_\theta, P_{\theta'}) = \infty > 0$ , also positiv und wohldefiniert. Dann folgt mit Wahrscheinlichkeit 1, dass  $L(x, \theta) = f(x) \cdot L(x, \theta')$ . Sei  $g(x) = 1 - x + x \log x$ ,  $x > 0$ . Man kann zeigen, dass  $g$  konvex mit  $g(x) \geq 0$  ist. Tatsächlich, es gilt

$$g'(x) = -1 + \log x + 1 = \log x, g''(x) = 1/x > 0.$$

Somit besitzt  $g$  genau eine Nullstelle bei  $x = 1$ , die gleichzeitig ihr Minimum ist. Betrachten wir  $g(f(X))$ ,  $X \sim L(x, \theta')$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_{\theta'} g(f(X)) = 1 - E_{\theta'} f(X) + E_{\theta'} (f(X) \log f(X)) \\ &= 1 - \int \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta')} \cdot L(x, \theta') dx + \int \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta')} \cdot \log \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta')} \cdot L(x, \theta') dx \\ &= H(P_\theta, P_{\theta'}). \end{aligned}$$

Somit gilt  $H(P_\theta, P_{\theta'}) \geq 0$ , was zu zeigen war.

2. Falls  $H(P_\theta, P_{\theta'}) = 0 \implies E_{\theta'} g(f(X)) = 0$ ,  $g(f(X)) \geq 0$ . Somit folgt  $L(x, \theta')$ -fast sicher  $g(f(X)) = 0 \implies f(X) \stackrel{\theta'\text{-f.s.}}{=} 1$ , damit entweder  $L(X, \theta) = 0$  oder  $L(x, \theta) = L(x, \theta')$  für  $L(x, \theta')$ -fast alle  $x$  und daher  $P_\theta = P_{\theta'}$ .

□

**Satz 1.2.17** (Schwache Konsistenz von ML-Schätzern). Sei  $m = 1$  und  $\Theta$  ein offenes Intervall aus  $\mathbb{R}$ . Sei  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  *unimodal*, d.h. für  $\hat{\theta}$  ML-Schätzer für  $\theta$  gilt

$$\begin{cases} \forall \theta < \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \implies L(x_1, \dots, x_n, \theta) \text{ ist steigend} \\ \forall \theta > \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \implies L(x_1, \dots, x_n, \theta) \text{ ist fallend} \end{cases}$$

(d.h.  $\max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  existiert und ist insbesondere eindeutig). Dann gilt  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ .

**Beweis** Es ist zu zeigen, dass

$$P_\theta \left( \left| \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.3)$$

Wählen wir beliebiges  $\varepsilon > 0$  :  $\theta \pm \varepsilon \in \Theta$ . Dann gilt  $H(P_\theta, P_{\theta \pm \varepsilon}) > \delta > 0$ , wegen der Unterscheidbarkeit der Parametrisierung von  $P_\theta$  und Lemma 1.2.16. Betrachten wir  $\{|\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon\}$ . Um (1.3) zu zeigen, ist es hinreichend, eine untere Schranke für  $P_\theta(|\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon)$  zu konstruieren, die für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1 konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} &\stackrel{\text{Unimod}}{\supseteq} \\ &\stackrel{\text{Unimod}}{\supseteq} \left\{ L(X_1, \dots, X_n, \theta) \in \left( L(X_1, \dots, X_n, \theta - \varepsilon), L(X_1, \dots, X_n, \theta + \varepsilon) \right)^2 \right\} \\ &= \cup \left\{ \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta \pm \varepsilon)} > 1 \right\}^{\delta > 0 \Rightarrow e^{n\delta} > 1} \cup \left\{ \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta \pm \varepsilon)} > e^{n\delta} \right\} \\ &= \cup \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta \pm \varepsilon)} > \delta \right\} = A_+ \cup A_-, \end{aligned}$$

wobei

$$A_\pm = \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta \pm \varepsilon)} > \delta \right\}.$$

Somit gilt also

$$P_\theta \left( |\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon \right) \geq P_\theta(A_+ \cup A_-).$$

Wenn wir zeigen können, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(A_\pm) = 1, \quad (1.4)$$

dann folgt daraus

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(A_+ \cup A_-) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(A_\pm) = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(A_+ \cup A_-) = 1$$

und

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( |\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon \right) \geq 1,$$

womit folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( |\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon \right) \leq 1 - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( |\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon \right)}_{=1} = 0,$$

d.h.  $\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ .

Jetzt zeigen wir, dass  $P_\theta(A_+) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  (für  $P_\theta(A_-)$  ist es analog).

<sup>2</sup>Hier ist ein Intervall mit diesen Endpunkten gemeint, auch wenn nicht direkt klar ist, welcher davon größer ist.

1. Sei  $H(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon}) < \infty$ . Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta + \varepsilon)}, & \text{falls } L(x, \theta + \varepsilon) > 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt aus Definition 1.2.15, dass  $P_\theta(L(X_1, \theta + \varepsilon) > 0) = 1$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta + \varepsilon)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{L(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta + \varepsilon)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f(X_i) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}_\theta \log f(X_1) &= \int L(x, \theta) \cdot \log \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta + \varepsilon)} dx = H(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon}) > \delta > 0 \end{aligned}$$

nach dem starken Gesetz der großen Zahlen, da  $\log f(X_1) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  wegen

$$\mathbb{E}_\theta \log f(X_1) = H(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon}) < \infty \implies P(A_+) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

2. Sei  $H(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon}) = \infty$  und  $P_\theta(L(X_1, \theta + \varepsilon) = 0) = 0$ , dann folgt

$$f(x) \stackrel{\text{f.s.}}{=} \frac{L(x, \theta)}{L(x, \theta + \varepsilon)}$$

bzgl. der Verteilung  $P_{X_1}$ . Es gilt  $\log \min\{f(X_1), c\} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  für alle  $c > 0$ . Somit folgt wie in Punkt 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \min\{f(X_i), c\} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}_\theta \log \min\{f(X_1), c\} \in (0, \infty) \\ &\xrightarrow[c \rightarrow \infty]{} H(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon}) = \infty \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} A_+ &\supset \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \min\{f(X_i), c\} > \delta \right\} \\ \implies P(A_+) &\geq P\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \min\{f(X_i), c\} > \delta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \end{aligned}$$

3. Sei  $H(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon}) = \infty$  und  $P_\theta(L(X_1, \theta + \varepsilon) = 0) = a > 0$ , dann folgt

$$\begin{aligned} P_\theta \left( \frac{1}{n} \log \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta + \varepsilon)} = \infty \right) &= \\ &= 1 - P \left( \frac{1}{n} \log \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta + \varepsilon)} < \infty \right) \\ &= 1 - P \left( \bigcap_{i=1}^n \{L(X_i, \theta + \varepsilon) > 0\} \right) \\ &\stackrel{X_i \text{ u.i.v.}}{=} 1 - (1 - a)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \end{aligned}$$

Insgesamt also  $P(A_+) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

□

**Definition 1.2.18.** Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $L(x, \theta)$  die Likelihood-Funktion von  $X_i$ , die differenzierbar bezüglich  $\theta \in \Theta$  ist. Dann heißt der Ausdruck

$$I(\theta) = E_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \theta) \right)^2, \quad \theta \in \Theta \quad (1.5)$$

die *Fisher-Information* der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Es wird in Zukunft vorausgesetzt, dass  $0 < I(\theta) < \infty$ . Wir stellen nun einige Bedingungen auf, die für die asymptotische Normalverteiltheit von ML-Schätzern notwendig sind.

1.  $\Theta \subset \mathbb{R}$  ist ein offenes Intervall ( $m = 1$ ).
2. Es gelte  $P_\theta \neq P_{\theta'}$  genau dann, wenn  $\theta \neq \theta'$ .
3. Die Familie  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ,  $\theta \in \Theta$  bestehe nur aus diskreten oder nur aus absolut stetigen Verteilungen, also nicht aus Mischungen von diskreten und absolut stetigen Verteilungen.
4.  $B = \text{supp } L(x, \theta) = \{x \in \mathbb{R} : L(x, \theta) > 0\}$  hängt nicht von  $\theta \in \Theta$  ab. Dabei heißt  $\text{supp}$  (von englisch „support“) der „Träger“ einer Funktion  $f$  und ist definiert als

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

und die Likelihood-Funktion  $L(x, \theta)$  ist durch

$$L(x, \theta) = \begin{cases} p(x, \theta), & \text{im diskreten Fall,} \\ f(x, \theta), & \text{im absolut stetigen Fall} \end{cases} \quad (1.6)$$

gegeben, wobei  $p(x, \theta)$  bzw.  $f(x, \theta)$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichte von  $P_\theta$  ist.

5. Die Abbildung  $L(x, \theta)$  ist dreimal stetig differenzierbar bzgl.  $\theta$  und es gilt

$$0 = \frac{d^k}{d\theta^k} \int_B L(x, \theta) dx = \int_B \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} L(x, \theta) dx, \quad k = 1, 2, \theta \in \Theta.$$

Da das Integral über die Dichte  $L(x, \theta)$  gleich 1 ist, ist die Ableitung gleich 0. Dabei sind im diskreten Fall die Integrale durch Summen zu ersetzen.

6. Für alle  $\theta_0 \in \Theta$  existiert eine Konstante  $\delta_{\theta_0} > 0$  und eine messbare Funktion  $g_{\theta_0} : B \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\left| \frac{\partial^3 \log L(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq g_{\theta_0}(x), \quad \forall x \in B, \quad |\theta - \theta_0| < \delta_{\theta_0},$$

wobei  $E_{\theta_0} g_{\theta_0}(X_1) < \infty$ .

**Bemerkung 1.2.19.** Es gilt folgende Relation:

$$n \cdot I(\theta) = \text{Var}_{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right),$$

wobei

$$L(X_1, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n L(X_i, \theta) \quad (1.7)$$

die Likelihood-Funktion der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  ist mit  $L(X_i, \theta)$  nach (1.6).

**Beweis** Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \log L(X_i, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{L'(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta)}. \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} E_{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right) &= \sum_{i=1}^n E_{\theta} \frac{L'(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta)} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_B \frac{L'(X, \theta)}{L(X, \theta)} \cdot L(X, \theta) dx \\ &\stackrel{5)}{=} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right) &= \text{Var}_\theta \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta) \right) \\
 &\stackrel{X_i \text{ u.i.v.}}{=} \sum_{i=1}^n \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta) \right) \\
 &\stackrel{X_i \text{ u.i.v.}}{=} n \cdot \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \theta) \right) \\
 &= n \cdot \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \theta) \right)^2 = n \cdot I(\theta).
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.2.20.** Seien  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Für  $\theta = \mu$  zeigen wir bei bekannten  $\sigma^2$ , dass  $I(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}$ .

In der Tat

$$\begin{aligned}
 L(X_1, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(X_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \\
 \log L(X_1, \mu) &= -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(X_1 - \mu)^2}{(2\sigma^2)}, \\
 \frac{\partial \log L(X_1, \mu)}{\partial \mu} &= -\frac{2(X_1 - \mu)}{2\sigma^2} \cdot (-1) = \frac{X_1 - \mu}{\sigma^2},
 \end{aligned}$$

somit gilt

$$I(\mu) = \mathbb{E}_\mu \left( \frac{\partial \log L(X_1, \mu)}{\partial \mu} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}_\mu (X_1 - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Damit ist  $\text{Var}_\mu \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(X_1, \dots, X_n, \mu) \right) = \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{\text{Var}_\mu(\hat{\mu})}$  nach Bemerkung 1.2.19 und Satz 7.3.2, 4) ElemWR, wobei  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .

Es bedeutet, dass wenig Information über  $\mu$  (kleine Werte von  $I(\mu)$ ) eine große Streuung bei der Schätzung von  $\mu$  bedeutet und umgekehrt.

**Satz 1.2.21.** Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von Zufallsvariablen, für die die Bedingungen 1) bis 6) erfüllt sind und  $0 < I(\theta) < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ . Falls  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein schwach konsistenter ML-Schätzer für  $\theta$  ist, dann ist  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  asymptotisch normalverteilt:

$$\sqrt{n \cdot I(\theta)} \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

**Beweis** Führen wir die Bezeichnung  $l_n(\theta) = \log L(X_1, \dots, X_n, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$  ein. Sei

$$l_n^{(k)}(\theta) = \frac{d^k}{d\theta^k} l_n(\theta), \quad k = 1, 2, 3.$$

Ist  $\hat{\theta}$  ein ML-Schätzer, so folgt  $l_n^{(1)}(\hat{\theta}) = 0$ . Für die Taylor-Entwicklung von  $l_n^{(1)}(\hat{\theta})$  in der Umgebung von  $\theta$  gilt:

$$0 = l_n^{(1)}(\hat{\theta}) = l_n^{(1)}(\theta) + (\hat{\theta} - \theta) \cdot l_n^{(2)}(\theta) + (\hat{\theta} - \theta)^2 \cdot \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2},$$

wobei  $\theta^*$  zwischen  $\theta$  und  $\hat{\theta}$  liegt. Dabei ist

$$-(\hat{\theta} - \theta) \left( l_n^{(2)}(\theta) + (\hat{\theta} - \theta) \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2} \right) = l_n^{(1)}(\theta)$$

und deshalb

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) = \frac{\frac{l_n^{(1)}(\theta)}{\sqrt{n}}}{-\frac{l_n^{(2)}(\theta)}{n} - (\hat{\theta} - \theta) \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2n}}.$$

Falls wir zeigen können, dass

1.  $\frac{l_n^{(1)}(\theta)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, I(\theta)),$
2.  $-\frac{l_n^{(2)}(\theta)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} I(\theta),$
3.  $(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$  und  $\frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2n}$

beschränkt ist, das heißt

$$\exists c > 0 : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \left| \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2n} \right| < c \right) = 1,$$

dann konvergiert der Ausdruck

$$(\hat{\theta} - \theta) \cdot \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

und somit gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) = \frac{\frac{l_n^{(1)}(\theta)}{\sqrt{n}}}{-\frac{l_n^{(2)}(\theta)}{n} - (\hat{\theta} - \theta) \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z_1 \sim N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$$

nach dem Satz von Slutsky. Damit folgt  $\sqrt{n}\sqrt{I(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$

1. Es gilt

$$\frac{l_n^{(1)}(\theta)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y_1 \sim N\left(0, \underbrace{\text{Var}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta)\right)}_{=I(\theta)}\right)$$

nach dem zentralen Grenzwertsatz, weil  $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta)$  unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 (siehe Bemerkung 1.2.19) sind.

2.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} l_n^{(2)}(\theta) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(X_i, \theta) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left(L^{(1)}(X_i, \theta)\right)^2 - L(X_i, \theta) \cdot L^{(2)}(X_i, \theta)}{\left(L(X_i, \theta)\right)^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{L^{(1)}(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta)}\right)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{L^{(2)}(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta)} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}_\theta \left(\frac{L^{(1)}(X_1, \theta)}{L(X_1, \theta)}\right)^2 - \mathbb{E}_\theta \left(\frac{L^{(2)}(X_1, \theta)}{L(X_1, \theta)}\right) = I(\theta) \end{aligned}$$

nach dem Gesetz der großen Zahlen, wobei

$$L^{(k)}(X_i, \theta) = \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} L(X_i, \theta)$$

und

$$\mathbb{E}_\theta \left(\frac{L^{(2)}(X_1, \theta)}{L(X_1, \theta)}\right) = \int_B \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \theta) dx \stackrel{5)}{=} \frac{d^2}{d\theta^2} \int_B L(x, \theta) dx = 0.$$

3.  $\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ , weil  $\hat{\theta}$  schwach konsistent ist. Zeigen wir, dass

$$\frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{n} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Aus  $\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$  folgt für alle  $\varepsilon > 0$

$$P\left(|\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Damit folgt, dass mit asymptotisch großer Wahrscheinlichkeit  $|\hat{\theta} - \theta| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$  gilt, welches aus der Bedingung 6) folgt. Damit gilt, dass für alle  $\theta$ :  $|\hat{\theta} - \theta| < \delta$

$$\left|\frac{l_n^{(3)}(\theta)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left|\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \log L(X_i, \theta)\right|}_{\leq g_\theta(X_i)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\theta(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}_\theta g_\theta(X_1) < \infty.$$

So folgt, dass eine Konstante  $c > 0$  existiert, sodass

$$P_\theta \left( \left| \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{n} \right| < c \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{und somit} \quad \frac{l_n^{(3)}(\theta^*)}{n} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Der Beweis ist beendet. □

### 1.2.4 Bayes-Schätzer

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe, wobei  $X_i$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$  sind. Sei  $F_\theta$  entweder eine diskrete oder eine absolut stetige Verteilung. Sei aber auch  $\theta$  eine Zufallsvariable  $\tilde{\theta}$  mit Verteilung  $Q(\cdot)$  auf dem Messraum  $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ , die entweder diskret mit Zähldichte  $q(\cdot)$  oder absolut stetig mit Dichte  $q(\cdot)$  ist. Nach wie vor werden beide Fälle gemeinsam betrachtet, dabei entsprechen sich die Summation und Integration im diskreten bzw. absolut stetigen Fall.

**Definition 1.2.22.** Die Verteilung  $Q(\cdot)$  heißt *a-priori-Verteilung* des Parameters  $\theta$  (von  $\tilde{\theta}$ ) (a-priori bedeutet hier „vor dem Experiment  $(X_1, \dots, X_n)$ “).

**Definition 1.2.23.** Die *a-posteriori-Verteilung* des Parameters  $\theta$  (von  $\tilde{\theta}$ ) ist gegeben durch die (Zähl-)Dichte  $q_{X_1, \dots, X_n}(\theta, X_1, \dots, X_n)$ , welche definiert ist als

$$\begin{cases} P(\tilde{\theta} = \theta \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), & \text{falls } Q \text{ diskret,} \\ f_{\tilde{\theta} \mid X_1, \dots, X_n}(\theta, x_1, \dots, x_n), & \text{falls } Q \text{ absolut stetig.} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} P(\tilde{\theta} = \theta \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \frac{P(\tilde{\theta} = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) \cdot q(\theta)}{\sum_{\theta_1 \in \Theta} P_{\theta_1}(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) \cdot q(\theta_1)} \end{aligned}$$

die *Bayesche Formel*, bzw.

$$\begin{aligned} f_{\tilde{\theta} \mid X_1, \dots, X_n}(\theta, x_1, \dots, x_n) &= \frac{f_{(\tilde{\theta}, X_1, \dots, X_n)}(\theta, x_1, \dots, x_n)}{f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)} \\ &= \frac{L(x_1, \dots, x_n, \theta) \cdot q(\theta)}{\int_{\Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta_1) \cdot q(\theta_1) d\theta_1}, \end{aligned}$$

mit  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  nach (1.7).

**Definition 1.2.24.** Eine *Verlustfunktion*  $V : \Theta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist eine  $\Theta^2$ -messbare Funktion.

*Verlustfunktionen* spielen in unseren Betrachtungen folgende Rolle:  $E_*V(\tilde{\theta}, a)$  stellt den *erwarteten Verlust* (mittleres Risiko) dar, der bei der Schätzung des Parameters  $\theta$  durch  $a$  entsteht. Dabei stellt  $E_*$  den Erwartungswert bezüglich der *a-posteriori-Verteilung* von  $\tilde{\theta}$  dar. Es sind offensichtlich die konkreten Stichprobenwerte  $x_1, \dots, x_n$  in die a-posteriori-Verteilung eingegangen, deshalb ist  $E_*V(\tilde{\theta}, a)$  eine Funktion von  $a$  und  $x_1, \dots, x_n$ :

$$E_*V(\tilde{\theta}, a) = \varphi(x_1, \dots, x_n, a).$$

**Definition 1.2.25.** Ein Schätzer  $\hat{\theta}$  heißt *Bayes-Schätzer* des Parameters  $\theta$ , falls

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \underset{a}{\operatorname{argmin}} E_*V(\tilde{\theta}, a) \quad (1.8)$$

existiert und eindeutig ist.

**Bemerkung 1.2.26.**

1. Manchmal gilt  $\hat{\theta} \notin \Theta$ , welches auf die Existenz des Minimums von  $\varphi(x_1, \dots, x_n, a)$  auf  $\Theta$  zurückzuführen ist.
2. Der Name „Bayesscher Ansatz“ stammt von dem englischen Mathematiker Thomas Bayes (1702–1761), der die Bayessche Formel

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)} \quad (1.9)$$

nur ideenhaft eingeführt hat. Der eigentliche Entdecker der Formel (1.9) ist Pierre-Simon Laplace (1749–1827) (Ende des XVIII. Jahrhunderts). Diese Formel wurde bei der Herleitung der *a-posteriori-Verteilung* von  $\tilde{\theta}$  implizit benutzt.

3. Die Vorgehensweise in Definition 1.2.25 ist in konkreten praxisrelevanten Fällen meistens nur numerisch möglich. Es gibt sehr wenige Beispiele für analytische Lösungen des in (1.8) gestellten Minimierungsproblems.

**Beispiel 1.2.27** (Quadratische Verlustfunktion). Ist  $V(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)^2$ , so ist

$$\begin{aligned} \underset{a}{\operatorname{argmin}} (\varphi(x_1, \dots, x_n, a)) &= \underset{a}{\operatorname{argmin}} (E_*(\tilde{\theta} - a)^2) \\ &= \underset{a}{\operatorname{argmin}} (E_*\tilde{\theta}^2 - 2aE_*\tilde{\theta} + a^2) \\ &= E_*\tilde{\theta} \end{aligned}$$

und daher der *Bayes-Schätzer*  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  für  $\theta$  durch  $E_*\tilde{\theta}$  gegeben.

**Beispiel 1.2.28** (Bernoulli-Verteilung). Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine unabhängig identisch verteilte Stichprobe von  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Weiter sei die a-priori-Verteilung  $\tilde{p} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , mit Zähldichte

$$q(p) = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot I(p \in [0, 1]),$$

die a-posteriori-Verteilung von  $\tilde{p}$  ist dann gleich

$$q^*(p) = f_{\tilde{p}|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(p) = \frac{P_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \cdot q(p)}{\int_0^1 P_{p_1}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \cdot q(p_1) dp_1}.$$

Es ist immer möglich die a-posteriori-Verteilung nicht bezüglich des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$ , sondern bezüglich einer Funktion  $g(X_1, \dots, X_n)$ , zu berechnen (*Komplexitätsreduktion*).

Hier ist  $Y = g(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$  die Gesamtanzahl aller Erfolge in  $n$  Experimenten, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher gilt für die a-posteriori-Verteilung bzgl.  $Y$ :

$$\begin{aligned} q^*(p) = f_{\tilde{p}|Y=k}(p) &= \frac{P_p(Y = k) \cdot q(p)}{\int_0^1 P_{p_1}(Y = k) q(p_1) dp_1} \\ &\stackrel{Y \sim \text{Bin}(n, p), \text{ falls } \tilde{p}=p}{=} \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot (B(\alpha, \beta))^{-1} \cdot p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}}{\frac{\binom{n}{k}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \int_0^1 p_1^{k+\alpha-1} (1-p_1)^{n-k+\beta-1} dp_1} \\ &= \frac{p^{k+\alpha-1} (1-p)^{n-k+\beta-1}}{B(k+\alpha, n-k+\beta)}, \quad p \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Daher ist die a-posteriori-Verteilung von  $\tilde{p}$  unter der Bedingung  $Y = k$  durch

$$\text{Beta}(k + \alpha, n - k + \beta)$$

gegeben.

Für den *Bayes-Schätzer* gilt:

$$\begin{aligned} \hat{p}(x_1, \dots, x_n) = E_* \tilde{p} &= \int_0^1 p \cdot q^*(p) dp = \frac{\int_0^1 p^{k+\alpha} (1-p)^{n-k+\beta-1} dp}{B(k+\alpha, n-k+\beta)} \\ &= \frac{B(k+\alpha+1, n-k+\beta)}{B(k+\alpha, n-k+\beta)} \\ &= \dots = \frac{k+\alpha}{\alpha+\beta+n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i + \alpha}{\alpha+\beta+n} \\ &= \frac{\alpha + n\bar{x}_n}{\alpha+\beta+n}. \end{aligned}$$

*Interpretation:*

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \underbrace{\frac{n}{\alpha + \beta + n}}_{=:c_1} \bar{X}_n + \underbrace{\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + n}}_{=:c_2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = c_1 \cdot \bar{X}_n + c_2 \cdot E_{apr} \tilde{\theta},$$

wobei  $c_1 + c_2 = 1$  ist. Dies heißt, dass die Bayessche Methode einen Mittelweg zwischen dem Schätzer  $E_{apr} \tilde{\theta}$  (in Abwesenheit der Information über die Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ ) und dem M-Schätzer  $\bar{X}_n$  (in Abwesenheit der a-priori-Information über die Verteilung von  $\tilde{p}$ ) für  $p$  einschlägt.

### 1.2.5 Resampling-Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe im parametrischen Modell. Gesucht ist ein Schätzer  $\hat{\theta}$  für den Parameter  $\theta$ . Um diesen Schätzer zu konstruieren, werden bei Resampling-Methoden neue Stichproben  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$  durch das unabhängige Ziehen mit Zurücklegen aus der alten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  generiert und auf ihrer Basis Mittelwerte, Stichprobenvarianzen und andere Schätzer gebildet. Dabei ist die Dimension  $m$  des Parameterraums  $\Theta$  beliebig.

Wir werden im Folgenden die *Resampling*-Methoden

1. *Jackknife* (dt. „Taschenmesser“, weist auf Mittel, die jedem immer zur Hand sein sollten)
2. *Bootstrap* (engl. „self-sufficient“, dt. „mit eigenen Ressourcen“)

betrachten.

1. *Jackknife-Methoden zur Schätzung der Varianz bzw. der Verzerrung von Schätzern:*

Als einführendes Beispiel betrachten wir  $\theta = EX = \mu$  bzw.  $\theta = \text{Var } X = \sigma^2$  und ihre (erwartungstreue) Schätzer  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$  bzw.  $\hat{\sigma}^2 = S_n^2$ .

Wie wir bereits wissen, gilt

$$\text{Var } \hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{Var } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left( \mu'_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right).$$

Nun ist ein Schätzer für die Varianz von  $\hat{\mu}$  bzw.  $\hat{\sigma}^2$  gesucht. Dazu verwenden wir die Plug-in Methode

$$\widehat{\text{Var}} \hat{\mu} = \frac{S_n^2}{n}, \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left( \hat{\mu}'_4 - \frac{n-3}{n-1} S_n^4 \right),$$

wobei  $\hat{\mu}'_4$  das vierte zentrierte empirische Moment ist.

Im Allgemeinen sind jedoch *keine* Formeln von  $\text{Var } \hat{\theta}$  bekannt. Hier kommt nun die *Jackknife*-Methode zum Einsatz:

- Sei  $X_{[i]}$  die Stichprobe  $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  
Falls

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \varphi_n(X_1, \dots, X_n),$$

so bilden wir

$$\hat{\theta}_{[i]} = \varphi_{n-1}(X_{[i]}), \quad \bar{\theta}_{[\cdot]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{[i]}$$

$$\widehat{\text{Var}}_{jn}(\hat{\theta}) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{[i]} - \bar{\theta}_{[\cdot]})^2.$$

**Definition 1.2.29.** Der Schätzer  $\bar{\theta}_{[\cdot]}$  bzw.  $\widehat{\text{Var}}_{jn}(\hat{\theta})$  heißt *Jackknife-Schätzer* für den Erwartungswert bzw. die Varianz des Schätzers  $\hat{\theta}$  von  $\theta$ .

**Beispiel 1.2.30.** Sei  $\theta = \mu$ ,  $\hat{\theta} = \hat{\mu} = \bar{X}_n$ , so gilt

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

womit folgt, dass

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{[i]} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} X_j = \frac{1}{n-1} \left( -X_i + \sum_{j=1}^n X_j \right) \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{1}{n-1} X_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \bar{\theta}_{[\cdot]} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{[i]} = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \frac{n \cdot \bar{X}_n}{n-1} - \frac{\bar{X}_n}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} \bar{X}_n = \bar{X}_n. \end{aligned}$$

Daher ist ein *Jackknife-Schätzer* für  $\mu$  gleich  $\bar{X}_n$ .

Konstruieren wir nun einen *Jackknife-Schätzer der Varianz*:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}_{jn}(\hat{\theta}) &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{1}{n-1} X_i - \bar{X}_n \right)^2 \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n-1} (\bar{X}_n - X_i) \right)^2 \\ &= \frac{n-1}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, \\ &= \frac{1}{n} S_n^2, \end{aligned}$$

wobei dies genau der Plug-in Schätzer der Varianz von  $\hat{\mu}$  ist.

- *Jackknife-Schätzer für die Verzerrung eines Schätzers*

Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$ . Der Bias von  $\hat{\theta}$  ist  $E_\theta \hat{\theta} - \theta = \text{Bias}(\hat{\theta})$ .

**Definition 1.2.31.** Ein *Jackknife-Schätzer der Verzerrung (Bias)* von  $\hat{\theta}$  ist durch

$$\widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = (n-1)(\bar{\theta}_{[\cdot]} - \hat{\theta})$$

gegeben.

An folgenden Beispielen wird klar, dass der oben beschriebene Vorgang zur Verringerung der Verzerrung beiträgt:

Der *Schätzer*

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\theta}_{[\cdot]} \quad (1.10)$$

hat in der Regel einen *kleineren Bias* als  $\hat{\theta}$ . Dabei ist wiederum

$$\hat{\theta}_{[i]} = \varphi_{n-1}(X_{[i]}) \quad \text{und} \quad \bar{\theta}_{[\cdot]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{[i]}$$

mit

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \varphi_n(X_1, \dots, X_n) .$$

**Beispiel 1.2.32.**

- (a) Ist  $\theta = EX_i = \mu$ , so ist  $\hat{\theta} = \bar{X}_n$  ein unverzerrter Schätzer für  $\mu$ . Was ist der Bias-korrigierte Schätzer  $\tilde{\mu}$ ? (Dieser sollte schließlich nicht schlechter werden!)

Es gilt  $\bar{\theta}_{[\cdot]} = \bar{X}_n$ , daher ist der Bias-Schätzer von Jackknife  $\widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = (n-1)(\bar{X}_n - \bar{X}_n) = 0$  und somit  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - 0 = \bar{X}_n$ . Wir haben also gesehen, dass die Jackknife-Methode die unverzerrten Schätzer (zumindest in diesem Beispiel) richtig behandelt, indem sie keinen zusätzlichen Bias einbaut.

- (b)  $\theta = \sigma^2 = \text{Var}X_i$ ,  $\hat{\theta} = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$  ein verzerrter M-Schätzer der Varianz. Was ist  $\tilde{\theta}$  in diesem Fall?

**Übungsaufgabe 1.2.33.** Zeigen Sie, dass der folgende Term ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz ist.

$$\tilde{\theta} = S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2$$

Somit wird der Bias von  $\hat{\sigma}^2$  durch die Anwendung der Jackknife-Methode vollständig beseitigt.

*Beweisidee:* Zeigen Sie hierzu zunächst, dass

$$\widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 .$$

**Bemerkung 1.2.34.** Die Beispiele 1.2.32 a), b), in denen sich der Jackknife-Schätzer analytisch bestimmen ließ, sind eher eine Ausnahme als die Regel. In den meisten Fällen erfolgt die Bias-Reduktion mit Hilfe der Monte-Carlo-Methoden auf Basis der Formel (1.10).

2. *Bootstrap-Schätzer:*

Die Bootstrap-Methode besteht in dem Erzeugen einer neuen Stichprobe  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ , die aus einer approximativen Verteilung  $\hat{F}$  der Stichprobenvariablen  $X_i, i = 1, \dots, n$  gewonnen wird. Seien  $E_*$  und  $\text{Var}_*$  die wahrscheinlichkeitstheoretischen Größen, die auf dem Verteilungsgesetz  $P_*$  der neuen Stichprobe  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$  beruhen. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten,  $\hat{F}$  zu konstruieren:

- i)  $\hat{F}(x) = \hat{F}_n(x)$  die empirische Verteilungsfunktion von  $X_i$ , falls  $X_i$  unabhängig identisch verteilt sind.
- ii)  $\hat{F}$  ist ein parametrischer Schätzer von  $F$ , der parametrischen Verteilungsfunktion von  $X_i$ . Das heißt, falls  $X_i \sim F_\theta, i = 1, \dots, n$  für ein  $\theta \in \Theta$  und  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$  ist, so setzen wir  $\hat{F} = F_{\hat{\theta}}$  (Plug-in Methode).

**Definition 1.2.35.** Ein *Bootstrap-Schätzer* für den Erwartungswert (bzw. *Bias* oder *Varianz*) von Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ist gegeben durch

- (a)  $\hat{E}_{boot}(\hat{\theta}) = E_*\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*)$ .
- (b)  $\widehat{\text{Bias}}_{boot}(\hat{\theta}) = \hat{E}_{boot}\hat{\theta} - \hat{\theta}$ .
- (c)  $\widehat{\text{Var}}_{boot}(\hat{\theta}) = \text{Var}_*(\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*))$ .

**Beispiel 1.2.36.** Sei  $\theta = \mu = EX_i$  und  $\hat{F} = \hat{F}_n$  die empirische Verteilungsfunktion. Wie generiert man eine Stichprobe  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , wobei  $X_i^* \sim \hat{F}_n$ ?

$\hat{F}_n$  gewichtet jede Beobachtung  $x_i$  der ursprünglichen Stichprobe mit dem Gewicht  $1/n$ , deshalb genügt es, einen der Einträge  $(x_1, \dots, x_n)$  auszuwählen (mit Wahrscheinlichkeit  $1/n$ , Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“), um  $X_j^*, j = 1, \dots, n$  zu generieren.

*Bootstrap-Schätzer* für den Erwartungswert von  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{boot}\hat{\mu} &= E_* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \right) \stackrel{X_i^* \text{ u.i.v.}}{=} \frac{1}{n} \cdot n E_*(X_1^*) \\ &= \int x d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n. \end{aligned}$$

Somit folgt  $\widehat{\text{Bias}}_{boot}\hat{\mu} = 0$ .

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Var}}_{boot}(\hat{\mu}) &= \text{Var}_* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \right) \stackrel{X_i^* \text{ u.i.v.}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \text{Var}_*(X_1^*) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n},\end{aligned}$$

ein Plug-in Schätzer für  $\text{Var}\bar{X}_n = \sigma^2/n$ .

*Monte-Carlo-Methoden zur numerischen Berechnung von Bootstrap-Schätzern:*

Was kann man tun, wenn keine expliziten Formeln für z.B.  $\widehat{\text{Var}}_{Boot}(\hat{\theta})$  vorliegen (der Regelfall in der Statistik)?

Generiere  $M$  unabhängige Stichproben  $(X_{i1}^*, \dots, X_{in}^*)$ ,  $i = 1, \dots, M$  nach der Regel i) oder ii) mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation. Dann berechne

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}(X_{i1}^*, \dots, X_{in}^*), \quad i = 1, \dots, M \quad \text{und setze} \quad \hat{\text{E}}_{boot}\hat{\theta} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\theta}_i.$$

Ähnlich gewinnt man approximative Bootstrap-Schätzer für Bias  $\hat{\theta}$  und  $\text{Var}\hat{\theta}$ :

$$\widehat{\text{Bias}}_{boot}\hat{\theta} \approx \hat{\text{E}}_{boot}\hat{\theta} - \hat{\theta}, \quad \widehat{\text{Var}}_{boot}\hat{\theta} \approx \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\theta}_i - \hat{\text{E}}_{boot}\hat{\theta})^2.$$

Mehr sogar, man kann die Verteilungsfunktion von  $X_{ij}^*$  durch die empirische Verteilungsfunktion bestimmen:

$$\hat{F}_{boot}(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(X_{ij}^* \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ferner lassen sich mit Hilfe von oben genannten Methoden *Bootstrap-Konfidenzintervalle* für  $\hat{\theta}$  ableiten:

Dafür lassen sich Quantile  $\hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_1)$  und  $\hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(1-\alpha_2)$  der Verteilung von  $\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*)$  aus der Stichprobe  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_M)$  empirisch bestimmen. Damit gilt

$$P\left(\hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_1) \leq \hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*) \leq \hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(1-\alpha_2)\right) \approx 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha,$$

wobei  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  klein ist. Beachte dabei, dass man hofft, dass  $X_i^*$  sehr ähnlich verteilt ist wie  $X_i$  und somit

$$P\left(\hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_1) \leq \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \leq \hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(1-\alpha_2)\right) \approx 1 - \alpha$$

gilt.

## 1.3 Weitere Güteeigenschaften von Punktschätzern

### 1.3.1 Ungleichung von Cramér-Rao

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$ . Falls  $\hat{\theta}$  erwartungstreu ist, dann misst man die Güte eines anderen erwartungstreuen Schätzers  $\tilde{\theta}$  von  $\theta$  am Wert seiner Varianz. Das bedeutet, falls  $\text{Var}_\theta \tilde{\theta} < \text{Var}_\theta \hat{\theta}$ , dann ist der Schätzer  $\tilde{\theta}$  besser. Wir werden uns nun mit der Frage befassen, ob immer wieder neue, bessere Schätzer  $\tilde{\theta}$  mit immer kleinerer Varianz konstruiert werden können. Die Antwort hierauf ist unter gewissen Voraussetzungen negativ. Die untere Schranke der Varianz  $\text{Var}_\theta \hat{\theta}$  hierzu liefert der Satz von Cramér-Rao.

Sei  $L(x, \theta)$  die Likelihood-Funktion von  $X_i$ , d.h.

$$L(x, \theta) = \begin{cases} P_\theta(x), & \text{im diskreten Fall,} \\ f_\theta(x), & \text{im stetigen Fall} \end{cases}$$

und  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n L(x_i, \theta)$  die Likelihood-Funktion von der gesamten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ . Es gelten die Bedingungen 1) bis 5), die für die asymptotische Normalverteiltheit von ML-Schätzern auf Seite 22 gestellt wurden, wobei die Bedingung 5) für  $k = 1$  gilt.

**Satz 1.3.1** (Ungleichung von Cramér-Rao). Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $E_\theta \hat{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$ .
2. Für alle  $\theta \in \Theta$  existiert  $\frac{d}{d\theta} E_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ , gegeben durch

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta) dx_1 \dots dx_n, & \text{im stetigen Fall,} \\ \sum_{x_1, \dots, x_n} \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta), & \text{im diskr. Fall.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{\left( \frac{d}{d\theta} E_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right)^2}{n \cdot I(\theta)}, \quad \theta \in \Theta,$$

wobei  $I(\theta)$  die Fisher-Information aus (1.5) ist.

**Beweis** Führen wir die Funktion

$$\varphi_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)$$

ein. In Bemerkung 1.2.19 haben wir bewiesen, dass

$$E_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad \text{Var}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) = n \cdot I(\theta).$$

Wenden wir auf  $\text{Cov}_\theta(\varphi_\theta(X_1, \dots, X_n), \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$  die Ungleichung von Cauchy-Schwarz an:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\theta(\varphi_\theta(X_1, \dots, X_n), \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) &= \\ &= \text{E}_\theta(\varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) \cdot \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) - 0 \\ &\leq \sqrt{\text{Var}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n)} \sqrt{\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)} \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{\overbrace{\left( \text{E}_\theta(\varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) \cdot \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) \right)^2}^{=: A}}{\text{Var}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n)} = \frac{A^2}{n \cdot I(\theta)}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$A = \frac{d}{d\theta} \text{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n).$$

Wir zeigen die Aussage für den absolut stetigen Fall (im diskreten Fall sind die Integrale durch Summen zu ersetzen):

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x_1, \dots, x_n, \theta) \cdot \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \cdot L(x_1, \dots, x_n, \theta) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta) \cdot \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &\stackrel{\text{Vor. 2)}}{=} \frac{d}{d\theta} \text{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

**Folgerung 1.3.2.** Falls  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist und die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1 erfüllt sind, so gilt

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)}.$$

**Beweis** Wende die Ungleichung von Cramér-Rao an  $\hat{\theta}$  mit

$$\frac{d}{d\theta} \left( \text{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) = \frac{d}{d\theta} \theta = 1$$

an.

□

An folgenden Beispielen werden wir sehen, dass der Schätzer  $\bar{X}_n$  des Erwartungswertes  $\mu$  in der Klasse aller Schätzer für  $\mu$ , die die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1 erfüllen, die kleinste Varianz besitzt. Somit ist  $\bar{X}_n$  der beste erwartungstreue Schätzer in dieser Klasse für mindestens zwei parametrische Familien von Verteilungen:

- Normalverteilung und
- Poisson-Verteilung.

**Beispiel 1.3.3.**

1.  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$  als Schätzer für  $\mu$ . Dabei ist  $\hat{\mu}$  erwartungstreu mit  $\text{Var}\hat{\mu} = \sigma^2/n$ . Zeigen wir, dass die Cramér-Rao-Schranke für die Varianz eines erwartungstreuen Schätzers  $\hat{\theta}$  für  $\mu$  ebenso gleich  $\sigma^2/n$  ist. Prüfen wir zunächst die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1:

Zeigen wir, dass

$$0 = \frac{d}{d\mu} \int_{\mathbb{R}} L(x, \mu) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) dx$$

mit

$$\begin{aligned} L(x, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} : \\ \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) &= \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot L(x, \mu), \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) dx &= \text{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Zeigen wir weiterhin die Gültigkeit der Bedingung 2) des Satzes 1.3.1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \text{E}\bar{X}_n &= \frac{d}{d\mu}(\mu) = 1 \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + \dots + x_n) \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Induktion bzgl.  $n$ :

- Induktionsanfang  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x(x-\mu)}{\sigma^2} L(x, \mu) dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \text{E}_{\mu} X^2 - \mu^2 \right) = \frac{\text{Var}_{\mu} X}{\sigma^2} = 1. \end{aligned}$$

- Induktionshypothese: Für  $n$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + \dots + x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n = n.$$

- Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (x_1 + \dots + x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial \mu} \underbrace{L(x_1, \dots, x_{n+1}, \mu)}_{=L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot L(x_{n+1}, \mu)} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &\stackrel{?}{=} n + 1. \end{aligned}$$

Dabei gilt für  $A$ :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (x_1 + \dots + x_n) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot L(x_{n+1}, \mu) \right. \\
&\quad \left. + L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) \right) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} x_{n+1} \left( \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot L(x_{n+1}, \mu) \right. \\
&\quad \left. + L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) \right) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \\
&= n \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1}}_{=1} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + \dots + x_n) \cdot L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} x_{n+1} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1} \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1}}_{=\frac{d}{d\mu} E_{\mu} X = \frac{d}{d\mu} \mu = 1} \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n}_{=1} = n + 1.
\end{aligned}$$

Nachdem alle Voraussetzungen erfüllt sind, berechnen wir die Schranke

$$\frac{1}{n \cdot I(\mu)} \quad \text{mit} \quad I(\mu) = E_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(X, \mu) \right)^2.$$

Es folgt aus dem Beispiel 1.2.20, dass

$$I(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \quad \implies \quad n \cdot I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Insgesamt gilt also

$$\text{Var}_{\mu} \hat{\theta} \geq \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n} = \text{Var}_{\mu} \bar{X}_n$$

für einen beliebigen erwartungstreuen Schätzer  $\hat{\theta}$  für  $\mu$ , der die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1 erfüllt.

2. Das zweite Beispiel sei folgende Übungsaufgabe:

**Übungsaufgabe 1.3.4.** Seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Zeigen Sie, dass die Schranke von Cramér-Rao

$$\frac{1}{n \cdot I(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} = \text{Var}_\lambda \bar{X}_n$$

ist. Dies bedeutet, dass auch hier  $\bar{X}_n$  der beste erwartungstreue Schätzer ist, der die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1 erfüllt.

An Hand des nächsten Beispiels wollen wir zeigen, dass die Konstruktion von Schätzern mit einer Varianz, die kleiner als die Cramér-Rao-Schranke ist, möglich ist, falls die Voraussetzungen von Satz 1.3.1 nicht erfüllt sind.

**Beispiel 1.3.5.** Seien  $X_i \sim U[0, \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Dann ist die Bedingung gegeben durch „supp  $f_\theta(x) = [0, \theta]$  unabhängig von  $\theta$ “ verletzt und auch eine weitere Bedingung:

$$0 \neq \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) dx = \int_0^\theta \left(\frac{1}{\theta}\right)' dx = -\frac{1}{\theta^2} \cdot \theta = -\frac{1}{\theta}.$$

Sei  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$ , so würde nach der Ungleichung von Cramér-Rao folgen, dass  $\text{Var}_\theta \hat{\theta} \geq (n \cdot I(\theta))^{-1}$ , wobei

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \text{E} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X, \theta) \right)^2 = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log \left( \frac{1}{\theta} \right) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta dx \cdot \left( -\frac{1}{\theta} \right)^2 = \frac{1}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Damit hätten wir

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta} \geq \frac{\theta^2}{n}.$$

Betrachten wir

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}.$$

Zeigen wir, dass

$$\text{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta \quad \text{und} \quad \text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) < \frac{\theta^2}{n}.$$

Berechnen wir dazu  $E_\theta X_{(n)}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$F_{X_{(n)}}(x) = F_{X_i}^n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{\theta^n}, & x \in [0, \theta], \\ 1, & x \geq \theta, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot I(x \in [0, \theta]),$$

$$E_\theta X_{(n)}^k = \int_0^\theta x^k \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+k-1} dx = \frac{n \cdot \theta^{n+k}}{\theta^n \cdot (n+k)} = \frac{n\theta^k}{n+k}.$$

Damit folgt

$$E_\theta \hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \cdot E_\theta X_{(n)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n\theta}{n+1} = \theta,$$

das heißt,  $\hat{\theta}$  ist erwartungstreu. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}_\theta \hat{\theta} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \text{Var}_\theta X_{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \cdot \theta^2 \\ &= \frac{\theta^2}{n(n+2)} (n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

und somit

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{n}.$$

### 1.3.2 Suffizienz

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ . Wenn man von der vollen Information  $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$  zum Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  des Parameters  $\theta$  übergeht, dann entsteht durch die Abbildung

$$\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \ll n$$

ein Informationsverlust, da man  $(X_1, \dots, X_n)$  nicht aus  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  zurückrechnen kann (im Normalfall). Die sogenannten *suffizienten* Schätzer minimieren diesen Informationsverlust im stochastischen Sinne:

**Definition 1.3.6.**

1. Seien Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  diskret verteilt. Ein Schätzer  $\hat{\theta}$  des Parameters  $\theta$  heißt *suffizient*, falls

$$P_\theta \left( X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t \right)$$

nicht von  $\theta$  abhängt, solange  $x_1, \dots, x_n$  und  $t$  in den Trägern der Zähldichten von  $(X_1, \dots, X_n)$  bzw.  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  liegen.

2. Falls  $X_1, \dots, X_n$  und  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  absolut stetig verteilt sind, dann heißt der Schätzer  $\hat{\theta}$  *suffizient* für  $\theta$ , falls die Wahrscheinlichkeit

$$P \left( (X_1, \dots, X_n) \in B \mid \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t \right)$$

für beliebige  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  und  $t \in \text{supp } f_{\hat{\theta}}$  nicht von  $\theta \in \Theta$  abhängt, wobei  $f_{\hat{\theta}}$  die Dichte von  $\hat{\theta}$  ist.

**Bemerkung 1.3.7.**

1. In Definition 1.3.6, 2) gilt

$$P \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t \right) = 0, \quad \forall t,$$

aufgrund der absoluten Stetigkeit der Verteilung von  $\hat{\theta}$ . Damit wird die bedingte Wahrscheinlichkeit hier (anders als in Definition 1.3.6, 1)) nicht im klassischen Sinne, sondern im Sinne der bedingten Erwartung verstanden. Die bedingte Erwartung wurde bereits im Vorlesungsskript „Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse“ (Abschnitt 1.1.4) eingeführt.

2. Betrachten wir im diskreten Fall die bedingte Likelihood-Funktion

$$L_{\hat{\theta}}(x_1, \dots, x_n, \theta) = P_\theta \left( X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t \right).$$

Aus Definition 1.3.6 folgt, dass wir keinen neuen ML-Schätzer für  $\theta$  aus dieser bedingten Likelihood  $L_{\hat{\theta}}(x_1, \dots, x_n, \theta)$  gewinnen werden können, da sie nicht von  $\theta$  abhängt. Das heißt, der Schätzer  $\hat{\theta}$  enthält bereits die volle Information über  $\theta$ , die man aus der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  gewinnen kann.

3. Falls  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine bijektive Borel-messbare Abbildung und  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein suffizienter Schätzer von  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$  ist, dann ist der Schätzer  $g(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$  auch ein suffizienter Schätzer für  $\theta$ . Dies wird aus der Tatsache ersichtlich, dass

$$\left\{ \omega \in \Omega : g \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) = t \right\} = \left\{ \omega \in \Omega : \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = g^{-1}(t) \right\},$$

für alle  $t \in \mathbb{R}^m$ .

**Lemma 1.3.8.** Seien Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  entweder alle diskret oder absolut stetig verteilt mit den Likelihood-Funktionen

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), & \text{im diskreten Fall,} \\ f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n, \theta), & \text{im absolut stetigen Fall,} \end{cases}$$

$$L_{\hat{\theta}}(t, \theta) = \begin{cases} P_\theta(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t), & \text{im diskreten Fall,} \\ f_{\hat{\theta}}(t, \theta), & \text{im absolut stetigen Fall.} \end{cases}$$

Sei der Träger von  $L$  gegeben durch

$$\text{supp } L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : L(x_1, \dots, x_n, \theta) > 0\}$$

Der Schätzer  $\hat{\theta}$  ist suffizient für  $\theta$  genau dann, wenn

$$\frac{L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{L_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta)} \quad (1.11)$$

für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } L : \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } L_{\hat{\theta}}$  nicht von  $\theta$  abhängig ist.

**Beweis** Wir beweisen lediglich den diskreten Fall:

„ $\implies$ “ Ist  $\hat{\theta}$  suffizient, so überprüfen wir, ob damit folgt, dass (1.11) von  $\theta$  abhängt für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in \Theta$ , so dass  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } L$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t) \\ &= \frac{P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t)}{P_\theta(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = t)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \neq t \\ \frac{P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P_\theta(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n))}, & \text{falls } \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit hängt (1.11) nicht von  $\theta$  ab.

„ $\impliedby$ “ Folgt aus dem 1. Fall durch Betrachtung von hinten. □

**Beispiel 1.3.9.**

1. *Bernoulli-Verteilung:* Seien  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\hat{p} = \bar{X}_n$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $p$ . Wir zeigen nun, dass  $\hat{p}$  suffizient ist. Es gilt

$$\hat{p} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} Y,$$

wobei  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ . Es genügt nach Bemerkung 1.3.7 3) zu zeigen, dass  $Y$  ein suffizienter Schätzer für  $p$  ist. Es gilt für  $x_i \in \{0, 1\}$   $i = 1, \dots, n$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Definieren wir nun  $L_Y$  als

$$L_Y(y, p) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \quad y = 0, \dots, n.$$

Setzen wir nun statt  $y$  die Summe  $\sum_{i=1}^n x_i$  ein und betrachten

$$\frac{L(x_1, \dots, x_n, p)}{L_Y(\sum_{i=1}^n x_i, p)} = \frac{p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}}{\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i} p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}} = \frac{1}{\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}}.$$

Dies hängt offensichtlich nicht von  $p$  ab, womit folgt aus Lemma 1.3.8, dass  $Y$  und somit  $\hat{p}$  suffizient sind.

2. *Normalverteilung mit bekannter Varianz:* Seien  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\sigma^2$  bekannt. So ist  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\mu$ . Zeigen wir nun, dass  $\hat{\mu}$  suffizient ist: Betrachten wir

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \mu) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

und nach Lemma 6.4.5 (ElemWR)

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ferner gilt bekanntermaßen  $\hat{\mu} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ , und somit

$$\begin{aligned} L_{\hat{\mu}}(x, \mu) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \\ \frac{L(x_1, \dots, x_n, \mu)}{L_{\hat{\mu}}(\bar{x}_n, \mu)} &= \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{n(\bar{x}_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(2\pi\sigma^2)^{n/2-1}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2\right), \end{aligned}$$

was von  $\mu$  unabhängig ist. Somit folgt nach Lemma 1.3.8, dass  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$  ein suffizienter Schätzer für  $\mu$  ist.

Mit Hilfe des nächsten Satzes von Neyman-Fisher wird es möglich sein zu zeigen, dass bei unbekannter Varianz der Schätzer  $(\bar{X}_n, S_n^2)$  für  $(\mu, \sigma^2)$  suffizient ist.

**Satz 1.3.10** (Faktorisierungssatz von Neyman-Fisher). Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.3.8 ist  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein suffizienter Schätzer für  $\theta$  genau dann, wenn zwei messbare Funktionen  $g : \mathbb{R}^m \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass folgende Faktorisierung der Likelihood-Funktion  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  gilt:

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = g(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$

für  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } L, \theta \in \Theta$ .

**Beweis** Wir beweisen nur den diskreten Fall.

1. Falls  $\hat{\theta}$  suffizient ist, dann hängt nach Lemma 1.3.8

$$\frac{L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\underbrace{L_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta)}_{=g(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta)}} = h(x_1, \dots, x_n)$$

nicht von  $\theta$  ab. Somit bekommen wir die Faktorisierung von Neyman-Fisher.

2. Sei nun  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = g(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$  für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } L, \theta \in \Theta$ . Führen wir eine Menge

$$\begin{aligned} C &= \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \hat{\theta}(y_1, \dots, y_n) = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)\} \\ &= \hat{\theta}^{-1}(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

ein. So gilt

$$\begin{aligned} \frac{P_{\theta}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\underbrace{L_{\theta}(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta)}_{=P_{\theta}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n))}} &= \frac{g(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{(y_1, \dots, y_n) \in C} P_{\theta}(X_1 = y_1, \dots, X_n = y_n)} \\ &= \frac{g(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{(y_1, \dots, y_n) \in C} \underbrace{g(\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n), \theta)}_{=g(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), \theta)} \cdot h(y_1, \dots, y_n)} \\ &= \frac{h(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{(y_1, \dots, y_n) \in C} h(y_1, \dots, y_n)}, \end{aligned}$$

welches nicht von  $\theta$  abhängt. Daher ist  $\hat{\theta}$  nach Lemma 1.3.8 suffizient. □

**Beispiel 1.3.11.**

1. *Poisson-Verteilung:* Seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda$ . Zeigen wir, dass  $\hat{\lambda}$  suffizient ist. Es gilt für  $x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda n} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdot \dots \cdot x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{n\bar{x}_n}}{x_1! \cdot \dots \cdot x_n!}, \\ &= g(\bar{x}_n, \lambda) \cdot h(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

wobei  $g(\bar{x}_n, \lambda) = e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{n\bar{x}_n}$ ,  $h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1! \cdot \dots \cdot x_n!}$  ist. Somit ist  $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$  nach Satz 1.3.10 suffizient.

2. *Exponentialverteilung:* Seien  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\hat{\lambda} = \bar{X}_n^{-1}$  ein Momentenschätzer für  $\lambda$ , der zwar nicht erwartungstreu ist, jedoch stark konsistent, denn  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} EX_i = \frac{1}{\lambda}$  nach dem starken Gesetz der großen Zahlen. Zeigen wir, dass  $\hat{\lambda}$  suffizient ist. Für  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}_n} \\ &= \lambda^n e^{-\frac{\lambda n}{\hat{\lambda}}} = g(\hat{\lambda}, \lambda) \cdot \underbrace{h(x_1, \dots, x_n)}_{=1}, \end{aligned}$$

wobei  $g(\hat{\lambda}, \lambda) = \lambda^n e^{-\frac{\lambda n}{\hat{\lambda}}}$  und  $h(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$  ist. Somit ist  $\hat{\lambda}$  nach dem Satz 1.3.10 suffizient.

**Übungsaufgabe 1.3.12.** Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes 1.3.10, dass der Schätzer  $(\bar{X}_n, S_n^2)$  suffizient für  $(\mu, \sigma^2)$  im Falle der normal und unabhängig identisch verteilten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  ist.

**Bemerkung 1.3.13.** Der Vorteil des Satzes von Neyman-Fisher ist, dass man für die Überprüfung der Suffizienzeigenschaft von  $\hat{\theta}$  die Likelihood-Funktion von  $\hat{\theta}$  nicht explizit zu kennen braucht. Dies ist insbesondere in den Fällen vorteilhaft, in denen der Schätzer  $\hat{\theta}$  kompliziert ist und seine Likelihood-Funktion nicht analytisch angegeben werden kann (bzw. unbekannt ist).

**1.3.3 Vollständigkeit**

**Definition 1.3.14.** Ein Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  des Parameters  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$  heißt *vollständig*, falls für beliebige messbare Funktionen  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $E_\theta g(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$  folgt

$$g(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) \equiv 0. \quad P_\theta - \text{f.s. für alle } \theta \in \Theta.$$

**Bemerkung 1.3.15.**

1. Seien  $g_1, g_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, für die  $\forall \theta \in \Theta$  gilt

$$\mathbb{E}_\theta \left| g_i \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) \right| < \infty$$

und

$$\mathbb{E}_\theta g_1 \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) = \mathbb{E}_\theta g_2 \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right),$$

wobei  $\hat{\theta}$  vollständig ist. So folgt aus der Definition 1.3.14

$$g_1 \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) = g_2 \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right)$$

fast sicher (nehme  $g = g_1 - g_2$ ).

*Fazit:* Die Eigenschaft der Vollständigkeit erlaubt aus dem Vergleich der Schätzer  $g_1(\hat{\theta})$  und  $g_2(\hat{\theta})$  im Mittel eine Aussage über ihre fast sichere Gleichheit zu machen.

2. Falls  $\hat{\theta}$  ein vollständiger Schätzer für  $\theta$  ist, dann ist auch  $g(\hat{\theta})$  ein vollständiger Schätzer für  $\theta$  für eine beliebige messbare Funktion  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Beispiel 1.3.16.**

1. *Bernoulli-Verteilung:* Seien  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ . Zeigen wir, dass  $\hat{p} = \bar{X}_n$  vollständig ist:

Sei  $g$  eine beliebige Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es genügt zu zeigen, dass  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  vollständig ist. Es gilt  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ , womit folgt, dass

$$\mathbb{E}_p g(Y) = \sum_{k=0}^n g(k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Weiter gilt  $\mathbb{E}_p g(Y) = 0$  genau dann, wenn

$$\sum_{k=0}^n g(k) \binom{n}{k} \underbrace{\left( \frac{p}{1-p} \right)^k}_{=t} = p_n(t) = 0$$

für  $p \in (0, 1)$ , also  $t \in (0, \infty)$ .  $p_n(t)$  ist ein Polynom des Grades  $n$ , womit folgt

$$\begin{aligned} g(k) \binom{n}{k} &= 0 \quad \text{für alle } k \\ \implies g(k) &= 0, \quad k = 0, \dots, n \\ \implies g(Y) &= 0 \quad P_p\text{-fast sicher.} \end{aligned}$$

Somit ist  $Y$  vollständig und daher auch  $\hat{p} = \bar{X}_n$ .

2. *Gleichverteilung:* Sei  $X_i \sim U[0, \theta]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wie wir bereits gezeigt haben, ist der Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$  erwartungstreu. Zeigen wir nun, dass er ein vollständiger Schätzer ist. Es genügt zu zeigen, dass  $X_{(n)} = \max_{i=1, \dots, n} X_i$  vollständig ist. Es ist zu zeigen, dass für alle messbaren  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $E_\theta g(X_{(n)}) = 0$  folgt  $g(X_{(n)}) = 0$  fast sicher. Die Dichte von  $X_{(n)}$  ist nach Beispiel 1.3.5 gegeben durch  $f_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot I_{[0, \theta]}(x)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta} E_\theta g(X_{(n)}) = \frac{d}{d\theta} \int_0^\theta g(x) f_{X_{(n)}}(x) dx = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\theta^n} \int_0^\theta nx^{n-1} g(x) dx \\ &= -n \frac{1}{\theta^{n+1}} \int_0^\theta g(x) nx^{n-1} dx + \frac{1}{\theta^n} n \theta^{n-1} g(\theta) = -\frac{n}{\theta} \underbrace{E_\theta g(X_{(n)})}_{=0} + \frac{n}{\theta} g(\theta) \\ &= \frac{n}{\theta} g(\theta) = 0 \text{ für fast alle } \theta > 0 \implies g(x) = 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Daher gilt  $g(X_{(n)}) = 0$  fast sicher.

### 1.3.4 Bester erwartungstreuer Schätzer

Aus Definition 7.2.9. (ElemWR) folgt: Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe,  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  ( $m = 1$ ),  $X_i$  unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen. Dann heißt  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  bester erwartungstreuer Schätzer, falls

$$E_\theta \hat{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty \quad E_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta, \quad \theta \in \Theta.$$

und  $\hat{\theta}$  die minimale Varianz unter allen erwartungstreuen Schätzern besitzt.

**Lemma 1.3.17** (Eindeutigkeit der besten erwartungstreuen Schätzer). Falls  $\hat{\theta}$  ein bester erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist, dann ist er eindeutig bestimmt.

**Beweis** Sei  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein bester erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  und  $\tilde{\theta}$  ein weiterer bester erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$ . Zeigen wir, dass  $\hat{\theta} = \tilde{\theta}$ .

*Ex adverso:* Nehmen wir an, dass  $\hat{\theta} \neq \tilde{\theta}$  ist und betrachten  $\theta^* = 1/2(\hat{\theta} + \tilde{\theta})$ . Offensichtlich ist  $\theta^*$  erwartungstreu. Untersuchen wir

$$\text{Var}_\theta \theta^* = \frac{1}{4} \text{Var}_\theta (\hat{\theta} + \tilde{\theta}) = \frac{1}{4} \text{Var}_\theta \hat{\theta} + \frac{1}{4} \text{Var}_\theta \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \text{Cov}_\theta (\hat{\theta}, \tilde{\theta}).$$

Da  $\hat{\theta}, \tilde{\theta}$  beste erwartungstreu Schätzer sind und mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz  $|\text{Cov}_\theta (\hat{\theta}, \tilde{\theta})| \leq \sqrt{\text{Var}_\theta \hat{\theta} \cdot \text{Var}_\theta \tilde{\theta}} = \text{Var}_\theta \hat{\theta}$  gilt, folgt

$$\text{Var}_\theta \theta^* \leq \frac{1}{2} \text{Var}_\theta \hat{\theta} + \frac{1}{2} \text{Var}_\theta \hat{\theta} = \text{Var}_\theta \hat{\theta}.$$

Da  $\hat{\theta}$  der beste erwartungstreue Schätzer ist, folgt  $\text{Var}_\theta \theta^* = \text{Var}_\theta \hat{\theta}$  und somit  $\rho(\hat{\theta}, \tilde{\theta}) = 1 \implies \hat{\theta}$  und  $\tilde{\theta}$  sind linear abhängig, d.h. es existieren Konstanten  $a$  und  $b$ , für die gilt  $\hat{\theta} = a\tilde{\theta} + b$ . Es folgt  $a = 1$  aus  $\text{Var}_\theta \hat{\theta} = a^2 \text{Var}_\theta \tilde{\theta} = \text{Var}_\theta \hat{\theta}$  und  $b = 0$ , weil  $\hat{\theta}$  und  $\tilde{\theta}$  erwartungstreu sind:  $\theta = \text{E}_\theta \hat{\theta} = \text{E}_\theta \tilde{\theta} + b = \theta + b$ . Das bedeutet, dass  $\hat{\theta} = \tilde{\theta}$ .  $\square$

**Lemma 1.3.18.** Ein erwartungstreuer Schätzer  $\hat{\theta}$ , dessen zweites Moment endlich ist, ist genau dann der beste erwartungstreue Schätzer für  $\theta$ , wenn  $\text{Cov}_\theta(\hat{\theta}, \varphi) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$  für eine beliebige Stichprobenfunktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $\text{E}_\theta \varphi(X_1, \dots, X_n) = 0$ ,  $\forall \theta \in \Theta$ .

**Beweis** Wir beweisen den Satz für beide Richtungen getrennt:

„ $\implies$ “ Sei  $\hat{\theta}$  der beste erwartungstreue Schätzer für  $\theta$ ,  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobenfunktion mit  $\text{E}_\theta \varphi(X_1, \dots, X_n) = 0$ ,  $\forall \theta \in \Theta$ . So ist zu zeigen, dass  $\text{Cov}_\theta(\hat{\theta}, \varphi) = \text{E}_\theta(\hat{\theta}\varphi) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$  gilt.

Definieren wir  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} + a\varphi$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Berechnen wir

$$\text{Var}_\theta \tilde{\theta} = \text{Var}_\theta \hat{\theta} + a^2 \text{Var}_\theta \varphi + 2a \text{Cov}_\theta(\hat{\theta}, \varphi)$$

für  $a \in \mathbb{R}$ . Sei  $g(a) = a^2 \text{Var}_\theta \varphi + 2a \text{Cov}_\theta(\varphi, \hat{\theta})$ . Falls  $\text{Cov}_\theta(\varphi, \hat{\theta}) \neq 0$ , dann existiert ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $g(a) < 0$ . Da  $\tilde{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist ( $\text{E}_\theta \tilde{\theta} = \text{E}_\theta \hat{\theta} + a \text{E}_\theta \varphi = \theta + 0 = \theta$ ) folgt  $\text{Var}_\theta \tilde{\theta} \geq \text{Var}_\theta \hat{\theta}$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ . Dies ist jedoch ein Widerspruch mit  $g(a) < 0$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ . Damit folgt  $\text{Cov}_\theta(\varphi, \hat{\theta}) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $\hat{\theta}$  erwartungstreu,  $\text{E}_\theta \hat{\theta}^2 < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $\text{Cov}_\theta(\varphi, \hat{\theta}) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ , falls  $\text{E}_\theta \varphi = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $\tilde{\theta}$  ein anderer erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$ . Zeigen wir, dass  $\text{Var}_\theta \tilde{\theta} \geq \text{Var}_\theta \hat{\theta}$ . Es gilt

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} + \underbrace{(\tilde{\theta} - \hat{\theta})}_{=:\varphi}, \quad \text{E}_\theta \varphi = \text{E}_\theta \tilde{\theta} - \text{E}_\theta \hat{\theta} = \theta - \theta = 0, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Somit

$$\text{Var}_\theta \tilde{\theta} = \text{Var}_\theta \hat{\theta} + \underbrace{\text{Var}_\theta \varphi}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\text{Cov}_\theta(\hat{\theta}, \varphi)}_{=0} \geq \text{Var}_\theta \hat{\theta},$$

woraus folgt, dass  $\hat{\theta}$  der beste Erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist.  $\square$

**Satz 1.3.19** (Lehmann-Scheffé). Sei  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer vollständiger und suffizienter Schätzer für  $\theta$ ,  $\text{E}_\theta \hat{\theta}^2 < \infty$ ,  $\forall \theta \in \Theta$ . Dann ist  $\hat{\theta}$  der beste erwartungstreue Schätzer für  $\theta$ .

**Beweis** Nach Lemma 1.3.18 ist zu zeigen, dass  $\text{Cov}_\theta(\hat{\theta}, \varphi) = E_\theta(\hat{\theta}\varphi) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ , falls  $E_\theta\varphi = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ . Es ist

$$E_\theta(\hat{\theta}\varphi) = E_\theta(E(\hat{\theta}\varphi|\hat{\theta})) \stackrel{\hat{\theta} \text{ } \sigma(\hat{\theta})\text{-messbar}}{=} E_\theta(\hat{\theta} \cdot E_\theta(\varphi|\hat{\theta})) = E_\theta(\hat{\theta} \cdot g(\hat{\theta})) \stackrel{?}{=} 0,$$

falls  $g(\hat{\theta}) = 0$  fast sicher. Da  $\hat{\theta}$  suffizient ist, ist  $g(t) = E_\theta(\varphi|\hat{\theta} = t)$  unabhängig von  $\theta$ . Betrachten wir  $E_\theta g(\hat{\theta})$ . Wir wollen zeigen, dass  $E_\theta g(\hat{\theta}) = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ . Daraus und aus der Vollständigkeit von  $\hat{\theta}$  wird folgen, dass  $g(\hat{\theta}) = 0$  fast sicher für alle  $\theta \in \Theta$ .

$$E_\theta g(\hat{\theta}) = E_\theta(E_\theta(\varphi|\hat{\theta})) = E_\theta\varphi = 0$$

nach Voraussetzung. Somit folgt  $E_\theta(\varphi\hat{\theta}) = 0$  und  $\hat{\theta}$  ist unkorreliert mit  $\varphi$ :  $E_\theta\varphi = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ , womit folgt, dass nach Lemma 1.3.18  $\hat{\theta}$  der beste erwartungstreue Schätzer ist.  $\square$

**Satz 1.3.20.** Sei  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$ ,  $E_\theta\hat{\theta}^2 < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $\tilde{\theta}$  ein vollständiger und suffizienter Schätzer für  $\theta$ . Dann ist der Schätzer  $\theta^* = E(\hat{\theta}|\tilde{\theta})$  der beste erwartungstreue Schätzer für  $\theta$ .

**Beweis**

1. Zeigen wir, dass  $E_\theta\theta^{*2} < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$ . Es gilt

$$E_\theta(\theta^{*2}) = E_\theta\left(E(\hat{\theta}|\tilde{\theta})^2\right) \leq E_\theta\left(E(\hat{\theta}^2|\tilde{\theta})\right) = E_\theta\hat{\theta}^2 < \infty,$$

da mit der Ungleichung von Jensen für bedingte Erwartung gilt

$$f(E(X|\mathcal{B})) \stackrel{\text{f.s.}}{\leq} E(f(X)|\mathcal{B})$$

für jede Zufallsvariable  $X$ ,  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  und konvexe Funktion  $f$ .

2. Zeigen wir, dass  $\theta^*$  erwartungstreu ist:  $E_\theta\theta^* = E_\theta(E(\hat{\theta}|\tilde{\theta})) = E_\theta\hat{\theta} = \theta$ ,  $\theta \in \Theta$ , weil  $\hat{\theta}$  erwartungstreu ist.
3. Nach Lemma 1.3.18 genügt es zu zeigen, dass  $E_\theta(\theta^*\varphi) = 0$  für  $\theta \in \Theta$ , falls  $E_\theta\varphi = 0$ ,  $\theta \in \Theta$ .

$$\begin{aligned} E_\theta(\theta^*\varphi) &= E_\theta\left(\underbrace{E(\hat{\theta}|\tilde{\theta})}_{=g(\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \text{ suf.}} \varphi\right) = E_\theta(g(\tilde{\theta})\varphi) = E_\theta(E(g(\tilde{\theta})\varphi|\tilde{\theta})) \\ &\stackrel{g(\tilde{\theta}) \text{ } \tilde{\theta}\text{-messbar}}{=} E_\theta(g(\tilde{\theta}) \cdot \underbrace{E(\varphi|\tilde{\theta})}_{=g_1(\tilde{\theta})}) = 0, \end{aligned}$$

falls  $g_1(\tilde{\theta}) \stackrel{\text{f.s.}}{=} 0$ ,  $\theta \in \Theta$ . Zeigen wir, dass  $E_\theta g_1(\tilde{\theta}) = 0$ . Es gilt  $E_\theta g_1(\tilde{\theta}) = E_\theta(E(\varphi|\tilde{\theta})) = E_\theta\varphi = 0$  nach Voraussetzung. Daraus und aus der Vollständigkeit von  $\tilde{\theta}$  folgt genauso wie im Beweis des Satzes 1.3.19, dass  $g_1(\tilde{\theta}) = 0$  fast sicher.

□

**Lemma 1.3.21** (Ungleichung von Blackwell-Rao). Sei  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$ ,  $E_\theta \hat{\theta}^2 < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $\tilde{\theta}$  ein suffizienter Schätzer für  $\theta$ . Dann besitzt der erwartungstreue Schätzer  $\theta^* := E_\theta(\hat{\theta} | \tilde{\theta})$  eine Varianz, die kleiner oder gleich als  $\text{Var}_\theta \hat{\theta}$  ist.

**Beweis** Siehe Beweis des Satzes 1.3.20. Dabei folgt die Erwartungstreue von  $\theta^*$  aus Beweispunkt 2) des Satzes 1.3.20 und  $\text{Var}_\theta \theta^* = E_\theta \theta^{*2} - \theta^2 \leq E_\theta \hat{\theta}^2 - \theta^2 = \text{Var}_\theta \hat{\theta}$  aus Beweispunkt 1) des Satzes 1.3.20. □

**Bemerkung 1.3.22.** Die Suffizienz  $\tilde{\theta}$  kommt im Beweis des Lemmas 1.3.21 explizit nicht vor. Dennoch ist sie notwendig, damit der Schätzer  $\theta^* = E_\theta(\hat{\theta} | \tilde{\theta}) = g(\tilde{\theta})$  nicht von  $\theta$  abhängt.

**Folgerung 1.3.23.** Falls  $\hat{\theta}$  ein vollständiger und suffizienter Schätzer für  $\theta$  ist und falls eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, dass  $E_\theta g(\hat{\theta}) = \theta \quad \forall \theta \in \Theta$ , dann ist  $g(\hat{\theta})$  der beste erwartungstreue Schätzer für  $\theta$ .

**Beweis**  $g(\hat{\theta}) = E(g(\hat{\theta}) | \hat{\theta})$ , welcher nach Satz 1.3.20 der beste erwartungstreue Schätzer ist. □

### 1.3.5 $\delta$ -Methode

Sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für einen Parameter  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$  ( $m = 1$ ), wobei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von i.i.d. Zufallsvariablen  $X_j$  für  $j = 1, \dots, n$  ist, mit  $X_j \sim F_\theta$ . Wir nehmen an, dass  $\hat{\theta}_n$  asymptotisch normalverteilt ist, d.h. es existiert eine Folge von Funktionen  $\sigma_n(\theta)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\sigma_n(\theta) > 0$  und  $\sigma_n(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, : \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in \Theta$ , sodass

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1).$$

Sei  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  eine Borel-messbare Funktion. Welche Aussage kann über die asymptotische Normalverteiltheit von  $g(\hat{\theta}_n)$  gemacht werden? Mit anderen Worten; das Ziel dieses Abschnittes ist es hinreichende Bedingungen zu identifizieren, unter welchen

$$\frac{g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)}{\tilde{\sigma}_n(\theta)} \xrightarrow{d} Y \tag{1.12}$$

afür eine andere Folge  $\{\tilde{\sigma}_n(\theta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\tilde{\sigma}_n(\theta) > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\tilde{\sigma}_n(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $\theta \in \Theta$ , gilt. Für lineare  $g(\theta) = a \cdot \theta + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ist die Konvergenz in Verteilung (1.12) offensichtlich. Wann gilt (1.12) für allgemeinere Funktionen  $g$ ? Es gibt viele Gründe, die Funktionen  $g(\hat{\theta}_n)$  zu betrachten. Einer davon ist die *Varianzstabilisierung*, welche am Ende des Abschnittes behandelt wird.

Hierbei wird eine Funktion  $g$  betrachtet, so dass  $\tilde{\sigma}_n(\theta)$  nicht von  $\theta$  abhängt. Dies erleichtert die Konstruktion von asymptotischen Konfidenzbereichen für  $\theta$ .

Der folgende Beweis für die asymptotische Normalverteiltheit von  $g(\hat{\theta}_n)$  nimmt die Taylor-Reihendarstellung von hinreichend glatten Funktionen  $g$  zu Hilfe. Dieser Beweis ist seit dem 19. Jahrhundert bekannt und wurde zuerst von J. Doob [11] beschrieben. Der Name “ $\delta$  Methode” ist eine Anspielung auf das Differential oder Inkrement  $dg(x) = g(x + \delta x) - g(x)$ , welches Kernbestandteil dieser Methode ist. Die Resultate können für jegliche asymptotisch normalverteilte Folge von Zufallsvariablen  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  formuliert werden, d.h. für alle Folgen  $\frac{Y_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1)$  mit einem  $\mu \in \mathbb{R}$  und einer normalisierenden Folge  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $\sigma_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

**Satz 1.3.24.** Sei

$$\frac{Y_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1) \quad (1.13)$$

für eine Folge von Zufallsvariablen  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mu$  und  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Zudem sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion in  $x = \mu$  mit  $g'(\mu) \neq 0$ . Dann gilt

$$\frac{g(Y_n) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y.$$

**Beweis** Zuerst zeigen wir, dass (1.13) zusammen mit  $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu \quad (1.14)$$

impliziert. In der Tat ist es so, dass aus Slutsky’s Theorem (cf. [32, Theorem 3.4.3.]) folgt, dass

$$\begin{aligned} \frac{Y_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y, \sigma_n \xrightarrow{a.s.} 0 &\implies Y_n - \mu = \sigma_n \cdot \frac{Y - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 0 \cdot Y = 0 \\ &\implies Y_n - \mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \end{aligned}$$

siehe [32, Theorem 3.3.4.]. Definiere

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(\mu)}{x - \mu} - g'(\mu), & x \neq \mu, \\ 0, & x = \mu. \end{cases}$$

Da  $g(x)$  differenzierbar in  $x = \mu$ ,  $h(x)$  ist, ist die Funktion auch stetig in  $x = \mu$ . Der Satz über stetige Abbildungen (cf [32, Theorem 3.4.4.]) sagt nun aus, dass

$$h(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} h(\mu) = 0,$$

d.h.

$$\frac{g(Y_n) - g(\mu)}{Y_n - \mu} - g'(\mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Werden beide Seiten nun mit  $\frac{Y_n - \mu}{\sigma_n}$  multipliziert und die Konvergenz in Verteilung (1.13) in Kombination mit Slutsky's Theorem verwendet, ergibt sich

$$\frac{h(Y_n)(Y_n - \mu)}{\sigma_n} = \frac{g(Y_n) - g(\mu)}{\sigma_n} - g'(\mu) \underbrace{\frac{Y_n - \mu}{\sigma_n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

$$\xrightarrow{d} Y \sim N(0,1)$$

Es folgt  $\frac{g(Y_n) - g(\mu)}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} g'(\mu) \cdot Y$  und die Division durch  $g'(\mu)$  auf beiden Seiten führt zum gewünschten Resultat.  $\square$

**Bemerkung 1.3.25.** Im Fall  $g \in \mathcal{C}^1(B_\delta(\mu))$  für ein beliebiges  $\delta > 0$  gilt, wobei

$$B_\delta(\mu) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \mu| \leq \delta\},$$

dann kann der obige Beweis vereinfacht werden. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$g(Y_n) = g(\mu) + g'(\xi)(Y_n - \mu),$$

wobei  $\xi$  zwischen  $\mu$  und  $Y_n$  liegt. Zusätzlich folgt aus dem Satz über stetige Abbildungen zusammen mit (1.14) sowie der Annahme  $g \in \mathcal{C}^1(B_\delta(\mu))$ , dass  $g'(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} g'(\mu)$ . Slutsky's Theorem impliziert letztendlich die folgenden modifizierte Version von (1.13):

$$\frac{g(Y_n) - g(\mu)}{g'(Y_n)\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y.$$

**Beispiel 1.3.26.** Nach [33, Theorem 7.4.4, 2)] ist die Stichprobenvarianz

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ein asymptotisch normalverteilter Schätzer für  $\sigma^2 = \text{Var}X_j > 0$ :

$$\sqrt{n} \frac{S_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\mu'_4 - \sigma_n^4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1),$$

wobei  $\mu'_4 = \text{E}(X_j - \text{E}X_j)^4$ . Man kann zeigen, dass die empirische Standardabweichung  $S_n$  ein asymptotisch normalverteilter Schätzer für  $\sigma$  ist, denn es

gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x}, \\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ \theta &= \sigma^2 > 0, \\ g'(\sigma^2) &= \frac{1}{2\sigma} > 0 \text{ und} \\ \sigma_n &= \sqrt{\frac{\mu'_n - \sigma^4}{n}}. \end{aligned}$$

Nach Theorem 1.3.24 gilt nun

$$2\sigma\sqrt{n} \frac{S_n - \sigma}{\sqrt{\mu'_n - \sigma^4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y.$$

Was passiert in Theorem 1.3.24, wenn  $g'(\mu) = 0$  ist? In diesem Fall sollte eine Taylor-Approximation höherer Ordnung verwendet werden, wie das folgende Resultat veranschaulicht.

**Satz 1.3.27.** Sei  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen, welche die Bedingungen von Theorem 1.3.24 erfüllt. Weiter sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2 \leq m$ -fach differenzierbare Funktionen im Punkt  $x = \mu$  mit  $g^{(j)}(\mu) = 0$ ,  $j < m$  und  $g^{(m)}(\mu) \neq 0$ . Dann gilt

$$m! \cdot \frac{g(Y_n) - g(\mu)}{g^{(m)}(\mu)\sigma_n^m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y^m,$$

wobei  $Y \sim N(0, 1)$ .

**Beweis** Man verwende die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} m! \frac{g(x) - g(\mu)}{(x - \mu)^m} - g^{(m)}(\mu), & x \neq \mu, \\ 0, & x = \mu. \end{cases}$$

im Beweis von Theorem 1.3.24. □

**Beispiel 1.3.28.** Angenommen  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$\frac{Y_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$$

mit  $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und  $\sigma_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wende Theorem 1.3.27 auf  $g(x) = \log^2(1+x)$  und  $m = 2$ ,  $\mu = 0$ , an:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2 \log(1+x)}{1+x}, \quad g'(0) = 0, \\ g''(x) &= \frac{\frac{2}{1+x}(1+x) - 2 \log(1+x)}{(1+x)^2} = 2 \frac{1 - \log(1+x)}{(1+x)^2} = 2 \frac{\log\left(\frac{e}{1+x}\right)}{(1+x)^2}, \\ g''(0) &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$2 \cdot \frac{\log^2(1+Y_n)}{2\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \log^2(1+Y_n) \xrightarrow{d} Y^2 \sim \chi_1^2.$$

Wie bereits erwähnt, findet die  $\delta$ -Methode im Kontext der asymptotischen Theorie für Konfidenzintervalle und Hypothesentests Anwendung. Hierbei ist die Eliminierung der Abhängigkeit zwischen der asymptotischen Varianz  $\sigma_n(\theta)$  und dem Parameter  $\theta$  vorteilhaft und gewünscht. Ziel ist es eine Transformation  $g$  des Schätzers  $\hat{\theta}$  zu finden, so dass  $\tilde{\sigma}_n(\theta)$  in (1.12) nicht mehr von  $\theta$  abhängt. Dieses Vorgehen ist als *Varianzstabilisierung* bekannt.

Nach Theorem 1.3.24 ist daher eine Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g'(\theta) \neq 0$ , so dass  $g'(\theta) \cdot \sigma_n(\theta)$  nur von  $n \in \mathbb{N}$  abhängt, gesucht. Sei  $\sigma_n(\theta) = \sigma(\theta) \cdot v_n$ , mit  $v_n \rightarrow 0$ . Es genügt die folgende gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen:

$$g'(\theta) = \frac{c}{\sigma(\theta)}, \quad c \text{ constant.} \quad (1.15)$$

Falls  $g'(\theta) = 0$  ist, kann Theorem 1.3.27 verwendet werden.

### Beispiel 1.3.29.

1. Betrachte eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von zentrierten u.i.v. Zufallsvariablen mit  $\mu_4 = \mathbb{E}X_j^4 < \infty$  und  $\sigma^2 = \text{Var}X_j > 0$ . Da  $\mu = \mathbb{E}X_j = 0$  ist, betrachten wir den Schätzer  $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2$  für  $\sigma^2$ . Zuerst nehmen wir an, dass  $\mu_4$  bekannt ist. Nach [33, Theorem 7.4.4, 2)] gilt

$$\sqrt{n} \frac{\tilde{S}_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

Um die Varianz in diesem Beispiel zu stabilisieren, muss die Gleichung

$$g'(\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\mu_4 - (\sigma^2)^2}}$$

gelöst werden. Eine Lösung ist gegeben durch  $g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\mu_4}}\right)$  und somit folgt

$$\sqrt{n} \left( \arcsin\left(\frac{\tilde{S}_n^2}{\sqrt{\mu_4}}\right) - \arcsin\left(\frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu_4}}\right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

2. Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von u.i.v. Zufallsvariablen  $X_j \sim \text{Bernoulli}(p)$  mit  $p \in (0, 1)$ . Nach [33, Theorem 7.3.2, a)] gilt, dass

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1),$$

wobei  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ . Ähnlich zu Teil 1), ist die varianzstabilisierende Transformation  $g$  gegeben durch  $g(p) = 2\arcsin(\sqrt{p})$ , da  $g'(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$ .

Mit Theorem 1.3.24 erhält man

$$2\sqrt{n}(\arcsin(\sqrt{\hat{p}_n}) - \arcsin(\sqrt{p})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1) \quad (1.16)$$

3. Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von u.i.v. Poisson( $\lambda$ )-verteilten Zufallsvariablen mit  $\lambda > 0$ . Für  $\theta = \lambda$  und  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$  gilt somit

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

Die varianzstabilisierende Transformation  $g$  ist  $g(x) = 2\sqrt{x}$ , da  $g'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . Somit folgt

$$2\sqrt{n} \left( \sqrt{\hat{\lambda}_n} - \sqrt{\lambda} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1). \quad (1.17)$$

**Bemerkung 1.3.30.** Die  $\delta$ -Methode kann für die asymptotische Normalverteiltheit (von Funktionen  $g$  von) von  $d$ -dimensionalen Zufallsvektoren  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $d \geq 2$ , erweitert werden. Siehe [30, Section 3.3] für mehr Details. Sie findet hierbei Verwendung im Beweis der asymptotischen Normalverteiltheit des empirischen Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{XZ} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j Z_j - n \bar{X}_n \bar{Z}_n}{S_{n,X} S_{n,Z}}$$

für u.i.v. Zufallsstichproben  $(X_1, \dots, X_n)$  und  $(Z_1, \dots, Z_n)$ , wobei  $S_{n,X}^2$  und  $S_{n,Z}^2$  deren Stichprobenvarianzen sind. Analog hierzu, kann man zeigen, dass der empirische Variationskoeffizient  $\frac{S_n}{\bar{X}_n}$  einer u.i.v. Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  asymptotisch normalverteilt ist, d.h.

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{\bar{X}_n} - \frac{\sigma}{\mu} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N \left( 0, \frac{\sigma_*^2 \mu^2}{4\sigma^2} \right),$$

wobei  $\bar{X}_n$  das Stichprobenmittel und  $S_n^2$  die Stichprobenvarianz sind, cf. [1]. Hierbei ist

$$\sigma_*^2 = \frac{\mu_4}{\mu^4} - \left( \frac{\mu_2}{\mu^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\mu_2}{\mu^2} \right)^3 - \frac{4\mu_2\mu_3}{\mu^5}$$

eine Funktion der ersten vier Momente von  $X_j$ , welche als endlich angenommen werden.

## Kapitel 2

# Konfidenzintervalle

### 2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden wir eine formale Definition eines Konfidenzintervalles angeben, um Vertrauensintervalle in größerer Tiefe studieren zu können. Dabei werden sowohl *Ein-* als auch *Zweistichprobenprobleme* behandelt.

Rufen wir uns die Annahmen eines parametrischen Modells in Erinnerung: es sei eine Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $X_i \sim F_\theta$  gegeben, wobei  $F_\theta$  eine Verteilungsfunktion aus einer parametrischen Familie von Verteilungen  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$  ist. Die Punktschätzer von  $\theta$  liefern jeweils einen Wert für den Parametervektor. Es wäre allerdings auch vorteilhaft, die Genauigkeit solcher Schätzansätze zu nennen, das heißt, einen Bereich anzugeben, in dem  $\theta$  mit hoher Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  liegt. Dabei heißt  $\alpha$  *Irrtumswahrscheinlichkeit*; übliche Werte für  $\alpha$  sind  $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ . Die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ , dass  $\theta$  für  $m = 1$  im vorgegebenen *Konfidenzintervall* liegt, heißt dann *Überdeckungswahrscheinlichkeit* oder *Konfidenzniveau* und soll dann entsprechend hoch ausfallen, z.B.  $0,99; 0,95; 0,9$ .

**Definition 2.1.1.** Es sei  $1 - \alpha$  ein Konfidenzniveau und  $\underline{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\bar{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  zwei Stichprobenfunktionen mit der Eigenschaft

$$\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Falls

1.  $P_\theta \left( \theta \in \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right] \right) \geq 1 - \alpha, \quad \theta \in \Theta$
2.  $\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta \left( \theta \in \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right] \right) = 1 - \alpha$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \theta \in \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right] \right) = 1 - \alpha, \quad \theta \in \Theta$

dann heißt  $I = [\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)]$  ein

1. *Konfidenzintervall*
2. *minimales Konfidenzintervall*
3. *asymptotisches Konfidenzintervall*

zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ . Dabei heißt  $l_\theta(X_1, \dots, X_n) = \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  die *Länge* des Konfidenzintervalls. Es ist erwünscht, möglichst kleine Konfidenzintervalle (mit minimaler Länge) bei großem Konfidenzniveau für  $\theta$  zu konstruieren.

Wie bereits bei den Beispielen von Kapitel 3 ersichtlich ist, folgt die Konstruktion eines Konfidenzintervalls einem bestimmten Muster, das wir jetzt genauer studieren werden:

1. Finde eine Statistik  $T(X_1, \dots, X_n, \theta)$ , die
  - vom Parameter  $\theta$  abhängt und
  - eine bekannte (Prüf-) Verteilung  $F$  besitzt (möglicherweise asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$ ).
2. Bestimme die Quantile  $F^{-1}(\alpha_1)$  und  $F^{-1}(1 - \alpha_2)$  von der Verteilung  $F$  für Niveaus  $\alpha_1$  und  $1 - \alpha_2$ , sodass  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .
3. Löse (falls möglich) die Ungleichung  $F^{-1}(\alpha_1) \leq T(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq F^{-1}(1 - \alpha_2)$  bzgl.  $\theta$  auf. Das entsprechende Ergebnis (falls die Statistik  $T$  in  $\theta$  monoton steigend ist)  $I = [T^{-1}(F^{-1}(\alpha_1)), T^{-1}(F^{-1}(1 - \alpha_2))]$  ist ein Konfidenzintervall für  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
 P_\theta(\theta \in I) &= P_\theta\left(T_\theta^{-1}(F^{-1}(\alpha_1)) \leq \theta \leq T^{-1}(F^{-1}(1 - \alpha_2))\right) \\
 &= P_\theta\left(F^{-1}(\alpha_1) \leq T_\theta(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq F^{-1}(1 - \alpha_2)\right) \\
 &= F(F^{-1}(1 - \alpha_2)) - F(F^{-1}(\alpha_1)) \\
 &= 1 - \alpha_2 - \alpha_1 \\
 &= 1 - \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta.
 \end{aligned}$$

Für asymptotische Konfidenzintervalle soll überall noch  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  geschrieben werden:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(\theta \in I) = \dots = 1 - \alpha$ . Hierbei ist  $T_\theta^{-1}$  die Inverse von  $T(X_1, \dots, X_n, \theta)$  bezüglich  $\theta$ . Grafisch kann dies auf Abbildung 2.1 veranschaulicht werden.

**Definition 2.1.2.**

1. Falls  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ , dann heißt das Konfidenzintervall gegeben durch  $I = [T^{-1}(F^{-1}(\frac{\alpha}{2})), T^{-1}(F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))]$  *symmetrisch*.

2. Falls  $\alpha_1 = 0$  (bzw.  $\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) = -\infty$ ), dann heißt das Konfidenzintervall  $(-\infty, \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)]$  *einseitig*. Das selbe gilt für  $\alpha_2 = 0$  (bzw.  $\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) = +\infty$ ) und das Konfidenzintervall  $[\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), +\infty)$ .

In der Zukunft werden wir oft, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, symmetrische Konfidenzintervalle konstruieren, obwohl man auch ein allgemeineres, nicht-symmetrisches Intervall leicht angeben kann.

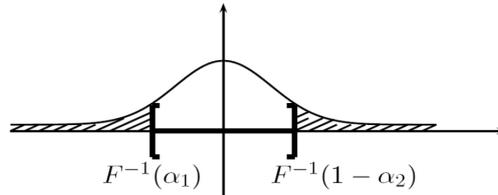


Abbildung 2.1: asymptotisches Konfidenzintervall

**Bemerkung 2.1.3.** Man sieht leicht, dass der Algorithmus zur Konstruktion eines Vertrauensbereiches sich sehr dem eines statistischen Tests ähnelt. Im letzten Fall heißt  $T(X_1, \dots, X_n)$  *Teststatistik*. Im Allgemeinen kann man für jedes Konfidenzintervall einen entsprechenden statistischen Test angeben, aber nicht umgekehrt. In Kapitel 5 werden wir einige Beispiele dieser Übertragung „Konfidenzintervall  $\leftrightarrow$  Test“ sehen.

## 2.2 Eine-Stichprobe-Probleme

In diesem Abschnitt werden wir einige Beispiele von Vertrauensbereichen für Parameter einiger bekannter Verteilungen nach dem oben genannten Schema konstruieren. Dabei werden wir immer mit einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  wie in Abschnitt 2.1 arbeiten.

### 2.2.1 Normalverteilung

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, identisch verteilt, mit  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

#### Konfidenzintervalle für den Erwartungswert $\mu$

- **bei bekannter Varianz  $\sigma^2$ :** Wenn wir annehmen, dass  $\sigma^2$  bekannt ist, so ermöglicht uns der Satz 3.3.1, 4., ein exaktes Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha$  zu berechnen. Denn es gilt  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  und somit

$$T(X_1, \dots, X_n, \mu) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Es seien  $z_{\alpha_1}$  und  $z_{1-\alpha_2}$  Quantile der  $N(0, 1)$ -Verteilung,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  und  $1 - \alpha$  das vorgegebene Konfidenzniveau.

Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(z_{\alpha_1} \leq T(X_1, \dots, X_n, \mu) \leq z_{1-\alpha_2}) \\ &= P\left(z_{\alpha_1} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq z_{1-\alpha_2}\right) \\ &\stackrel{(-z_{\alpha_1} = z_{1-\alpha_1})}{=} P\left(\bar{X}_n - \frac{z_{1-\alpha_2}\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha_1}\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Somit ist  $[\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)]$  mit

$$\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n - z_{1-\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

und

$$\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n + z_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ein exaktes Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha$ . Es hat die Länge  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{1-\alpha_2} + z_{1-\alpha_1})$ .

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) \rightarrow 0$  was bedeutet, dass bei wachsendem Informationsumfang ( $n \rightarrow \infty$ ) die Präzision der Schätzung immer besser wird.

Im Symmetriefall ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ ) gilt

$$\begin{aligned} \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) &= \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) &= \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

und

$$l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}.$$

Daraus folgt, dass man bei vorgegebener Länge  $\varepsilon > 0$  die Anzahl der Beobachtungen  $n$  bestimmen kann, die dann notwendig sind, um die vorgegebene Präzision zu erreichen:

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \varepsilon \iff n \geq \left(\frac{2\sigma z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \quad (2.1)$$

Für  $\alpha_1 = 0$  bzw.  $\alpha_2 = 0$  kann man einseitige Intervalle wie zum Beispiel  $(-\infty, \bar{X}_n + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$  und  $[\bar{X}_n - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$  angeben.

- **bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$ :** siehe Bemerkung 3.3.4. Dort wurde das Konfidenzintervall  $\left[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} S_n, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} S_n\right]$  für  $\mu$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  konstruiert, wobei  $t_{n-1,1-\alpha/2}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der  $t_{n-1}$ -Verteilung ist.

Wie man sieht, ist die Länge  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{2S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}$  des Konfidenzintervalls zufällig, somit macht es Sinn, mit erwarteter Länge

$$E l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{\sqrt{n}} E S_n t_{n-1,1-\alpha/2}$$

zu arbeiten, um zum Beispiel die Frage nach der notwendigen Anzahl  $n$  von Beobachtungen bei vorgegebener Genauigkeit  $\varepsilon > 0$  (vgl. Gleichung (2.1)) zu beantworten.

### Konfidenzintervalle für die Varianz $\sigma^2$

- **bei bekanntem Erwartungswert  $\mu$ :** Betrachten wir den Schätzer  $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  für  $\sigma^2$ . Aus Satz 7.4.8 1. (ElemWR) folgt  $\frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ . Wir setzen  $T(X_1, \dots, X_n, \sigma^2) = \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2}$  und bekommen

$$P\left(\chi_{n,\alpha_2}^2 \leq \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\alpha_1}^2\right) = P\left(\frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,1-\alpha_1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,\alpha_2}^2}\right) = 1 - \alpha.$$

Somit ist  $\left[\frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,1-\alpha_1}^2}, \frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,\alpha_2}^2}\right]$  ein Konfidenzintervall für  $\sigma^2$  zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  mit der mittleren Länge  $E l_{\sigma^2} = n\sigma^2 \left(\frac{1}{\chi_{n,\alpha_2}^2} - \frac{1}{\chi_{n,1-\alpha_1}^2}\right)$ .

**Übungsaufgabe 2.2.1.** Berechne  $\lim_{n \rightarrow \infty} E l_{\sigma^2}$ .

- **bei unbekanntem Erwartungswert  $\mu$ :**

Ähnlich wie oben folgt das Konfidenzintervall  $\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1,1-\alpha_1}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1,\alpha_2}^2}\right]$  zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  aus Satz 7.4.8. 1. (ElemWR), weil  $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$  für die Stichprobenvarianz  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ . Die erwartete Länge ist  $E l_{\sigma^2} = (n-1)\sigma^2 \left(\frac{1}{\chi_{n-1,\alpha_2}^2} - \frac{1}{\chi_{n-1,1-\alpha_1}^2}\right)$ .

### 2.2.2 Konfidenzintervalle aus stochastischen Ungleichungen

Eine alternative Methode zur Gewinnung von Konfidenzintervallen besteht in der Anwendung stochastischer Ungleichungen. So kann man zum Beispiel bei einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen und identisch verteilten

Zufallsvariablen mit  $E X_i = \mu$ ,  $\text{Var } X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$  die Ungleichung von Tschebyschew benutzen, um ein einfaches, aber grobes Konfidenzintervall für  $\mu$  zu konstruieren:

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{Var } \bar{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \alpha \\ &\Rightarrow \text{für } \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \text{ gilt: } 1 - \alpha \leq P\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \varepsilon\right) \\ &= P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \leq -\bar{X}_n + \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right) \\ &= P\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Das Konfidenzintervall  $\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right]$  für  $\mu$  bei bekannter Varianz  $\sigma^2$  ist verteilungsunabhängig, da keinerlei Annahmen über die Verteilung von  $X_i$  gemacht wurden.

Präzisere Konfidenzintervalle können bei der Verwendung folgender *Ungleichung von Hoeffding* konstruiert werden:

**Satz 2.2.2** (Ungleichung von Hoeffding). Es seien  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $E Y_i = 0$ ,  $a_i \leq Y_i \leq b_i$  fast sicher,  $i = 1, \dots, n$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

(ohne Beweis).

Nehmen wir z.B. an, dass  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind,  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Wir wollen ein Konfidenzintervall für  $p$  bestimmen.

**Folgerung 2.2.3.** Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli( $p$ )-verteilte Zufallsvariablen. Dann gilt

$$P\left(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

**Beweis** Es gilt

$$\bar{X}_n - p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{(X_i - p)}_{Y_i}, \quad Y_i \in [-p, 1 - p],$$

das heißt  $a_i = -p$ ,  $b_i = 1 - p$ ,  $b_i - a_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $E Y_i = p - p = 0$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} P_p \left( |\bar{X}_n - p| > \varepsilon \right) &\leq P_p \left( \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \geq \varepsilon n \right) \\ &= P_p \left( \sum_{i=1}^n Y_i \geq \varepsilon n \right) + P_p \left( \sum_{i=1}^n (-Y_i) \geq \varepsilon n \right) \\ &\stackrel{\text{(Satz 2.2.2)}}{\leq} 2e^{-\frac{2\varepsilon^2 n^2}{n}} = 2e^{-2\varepsilon^2 n}, \end{aligned}$$

wobei man den Satz 2.2.2 sowohl für die Folge  $\{Y_i\}$  als auch  $\{-Y_i\}$  anwendet. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 2.2.4.** Nun fixieren wir  $\alpha > 0$  und wählen  $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}}$ .

Durch Anwendung von Folgerung 2.2.3 mit diesem  $\varepsilon_n$  erhalten wir  $P_p \left( |\bar{X}_n - p| > \varepsilon_n \right) \leq \alpha$ , somit  $P_p \left( |\bar{X}_n - p| \leq \varepsilon_n \right) \geq 1 - \alpha$  und  $\left[ \bar{X}_n - \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}} \right]$  ist ein Konfidenzintervall für  $p$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

### 2.2.3 Asymptotische Konfidenzintervalle

Die Philosophie der Konstruktion von asymptotischen Konfidenzintervallen ist relativ einfach: Wir erläutern sie am Beispiel eines asymptotisch normalverteilten Schätzers  $\hat{\theta}$  für einen Parameter  $\theta$ .

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen,  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$ , der asymptotisch normalverteilt ist. Dann gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta)), \quad (2.2)$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Folgende drei Wege gibt es, ein asymptotisches Konfidenzintervall (AKI) für  $\theta$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha \in (0, 1)$  zu bestimmen (zur Vereinfachung der Darstellung wird immer ein symmetrisches AKI mit  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$  angegeben):

1. **Auflösen einer Ungleichung:** Aus (2.2) folgt

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1)$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Folglich gilt

$$1 - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \leq z_{1-\alpha/2} \right).$$

Nun löse (falls explizit möglich) die Ungleichung

$$\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \leq \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \quad (2.3)$$

nach  $\theta$  auf, um ein AKI für  $\theta$  zu erhalten. Ein Nachteil dieser Methode ist, dass für komplizierte  $\sigma(\theta)$  2.3 nicht immer analytisch lösbar ist.

2. **Schätzung der asymptotischen Varianz  $\hat{\sigma}(\theta)$ :** Sei  $\hat{\sigma}_n$  ein schwach konsistenter Schätzer für  $\sigma(\theta)$ , also  $\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} \sigma(\theta)$ ,  $\forall \theta \in \Theta$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach dem Satz von Slutsky gilt:

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1), \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\sigma}_n} \leq z_{1-\alpha/2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(\theta \in [\hat{\theta}_n - \frac{z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}]) \\ &= 1 - \alpha, \end{aligned}$$

und

$$[\hat{\theta}_n - \frac{z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}] \tag{2.4}$$

ist ein AKI für  $\theta$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ . Ein Nachteil dieser Methode ist, dass das AKI (2.4) oft die Grenzen des Parameterraums  $\Theta$  verletzt. Somit wird das AKI mit  $\Theta$  geschnitten, um sinnvoll zu bleiben. Außerdem erhöht die Schätzung  $\hat{\sigma}_n$  die Varianz der Intervallgrenzen  $\bar{\theta}, \underline{\theta}$ . Folgende Technik hilft, beide Nachteile zu korrigieren.

3. **Varianzstabilisierung:** Finde eine Borel-messbare Funktion  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1) \tag{2.5}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \leq z_{1-\alpha/2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(\underbrace{g(\hat{\theta}_n) - \frac{1 - z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq g(\theta) \leq g(\hat{\theta}_n) + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}_{(*)}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Löse nun (falls möglich) die Ungleichung (\*) bzgl.  $\theta$  auf. Falls z.B.  $g$  streng monoton wachsend ist, so existiert  $g^{-1}$  und es ergibt sich das AKI

$$[g(\hat{\theta}_n) - \frac{1 - z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, g(\hat{\theta}_n) + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}] \tag{2.7}$$

für  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

Die Gleichung (2.5) entsteht aus (2.2) durch Anwendung der sogenannten Delta-Methode:

**Satz 2.2.5** (Delta-Methode). Sei  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $g \in \mathbb{C}^1(\Theta)$ . Sei  $\hat{\theta}_n$  ein Schätzer für  $\theta$ , sodass  $\exists a_n : a_n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt:

$$a_n(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} g'(\theta)Z$$

**Beweis** Nach Taylor-Reihenentwicklung gilt  $g(\hat{\theta}_n) = g(\theta) + g(\tilde{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta)$ , wobei  $\tilde{\theta}_n$  zwischen  $\hat{\theta}_n$  und  $\theta$  liegt. Da aus  $a_n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$  folgt, dass  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ , erhalten wir auch  $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ . Mit dem Stetigkeitssatz folgern wir

$$g'(\tilde{\theta}_n) \xrightarrow{P} g'(\theta) \Rightarrow g'(\tilde{\theta}_n) \xrightarrow{d} g'(\theta).$$

Es ergibt sich somit

$$a_n(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) = g'(\tilde{\theta}_n) \cdot a_n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} g'(\theta)Z$$

für  $n \rightarrow \infty$  aufgrund des Satzes von Slutsky und der Behauptung.  $\square$

**Folgerung 2.2.6.** Sei  $g$  wie in Satz 2.2.5,  $g'(\theta) \neq 0, \forall \theta \in \Theta$ . Sei  $\hat{\theta}_n$  ein asymptotisch normalverteilter Schätzer für  $\theta$ :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist auch  $g(\hat{\theta}_n)$  asymptotisch normalverteilt:

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, g'(\theta)^2 \sigma^2(\theta))$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beweis** Wähle  $a_n = \sqrt{n}$ ,  $Z \sim N(0, g'(\theta)^2 \sigma^2(\theta))$  und wende Satz 2.2.5 an.  $\square$

Varianzstabilisierung: Wähle  $g$  so, dass  $g^{-1}$  existiert und  $g'(\theta)^2 \sigma^2(\theta) \equiv 1$ .

**Bemerkung 2.2.7.** Die Delta-Methode ist ein mächtiges Werkzeug zur Erhaltung von neuen Grenzwertsätzen, die in der Statistik vielerlei Anwendungen finden. So kann z.B. die Taylor-Reihenentwicklung höherer Ordnung im Beweis von Satz 2.2.5 verwendet werden, falls  $g'(\theta) \equiv 0, \theta \in \Theta$ . Zusätzlich kann diese Methode multivariat, also für  $\theta \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ , bewiesen werden. Zu den Anwendungen zählen Beweise der asymptotischen Normalverteilung der Stichprobenvarianz  $s_n^2$ , des empirischen Korrelationskoeffizienten  $\rho_{XY}$  von Bravais-Pearson, sowie dem empirischen Diversionsindex  $\overline{X}_n/S_n$ . Außerdem kann die Delta-Methode zur Bias-Bereinigung von Schätzern verwendet werden. Mehr Informationen mit Beispielen findet man im Buch [?].

**Bemerkung 2.2.8.** Illustrieren wir die drei oben genannten Methoden am Beispiel der AKIs für Parameter der Bernoulli- und Poisson-Verteilung:

- a) **Bernoulli-Verteilung:** Seien  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $p \in (0, 1)$ . Es gilt  $\theta = p$ ,  $\hat{\theta}_n = \hat{p}_n = \bar{X}_n$ ,  $E(\hat{p}_n) = p$ ,  $\text{Var}(\hat{p}_n) = p(1-p)/n$ . Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1)$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

- 1. Methode: Löse die quadratische Ungleichung

$$\left| \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right| \leq z_{1-\alpha/2}$$

bzgl.  $p \in (0, 1)$  auf:

$$\begin{aligned} n \frac{(\bar{X}_n - p)^2}{p(1-p)} &\leq z_{1-\alpha/2}^2 \\ \Leftrightarrow \bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n p + p^2 &\leq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n} (p - p^2) \\ \Leftrightarrow p^2 \left(1 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}\right) - p \left(2\bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}\right) + \bar{X}_n^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Löse nun die entsprechende quadratische Gleichung, z.B. mit der Mitternachtsformel, und erhalte ein Intervall  $[p_1, p_2]$  von möglichen Werten für  $p$ , wobei

$$p_1 = \frac{2\bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n} - \sqrt{4 \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n} (\bar{X}_n - \bar{X}_n^2) + \frac{z_{1-\alpha/2}^4}{n^2}}}{2 \left(1 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}\right)}$$

und

$$p_2 = \frac{2\bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n} + \sqrt{4 \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n} (\bar{X}_n - \bar{X}_n^2) + \frac{z_{1-\alpha/2}^4}{n^2}}}{2 \left(1 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}\right)}.$$

Da nun nicht klar ist, ob  $p_1 > 0$  und  $p_2 < 1$ , ist

$$[\max\{0, p_1\}, \min\{p_2, 1\}]$$

ein AKI für  $p$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

- **2. Methode:** Wir wählen  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}(1 - \bar{X}_n)$  als Plug-In-Schätzer für  $\sigma^2$ . Er ist stark konsistent nach dem Gesetz der großen Zahlen. Dann gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz (Satz 5.2.2., ElemWR) und dem Satz von Slutsky (Satz 3.4.1 WT&SP):

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1),$$

das heißt  $p \in \left[ \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \right]$  stellt ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $p$  zum Niveau  $1 - \alpha$  dar. Da aber  $p \in [0, 1]$  sein soll, betrachtet man

$$\underline{p}(X_1, \dots, X_n) = \max \left\{ 0, \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right\}$$

und

$$\bar{p}(X_1, \dots, X_n) = \min \left\{ 1, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right\}.$$

- **3. Methode:** Wähle  $g(p) = 2 \arcsin \sqrt{p}$  für die Varianzstabilisierung, denn  $g'(p) = 1/\sqrt{p(1-p)}$ ,  $p \in (0, 1)$  und somit  $g'(p)^2 \cdot p(1-p) = 1$ .  $g$  ist monoton steigend auf  $(0, 1)$  und somit existiert die Inverse von  $\arcsin \sqrt{p}$  gegeben durch  $p(x) = \sin^2(x)$ . Wir erhalten mit (2.5)

$$2\sqrt{n}(\arcsin \sqrt{\bar{X}_n} - \arcsin \sqrt{p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1),$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Das entsprechende AKI wird wie folgt konstruiert:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\stackrel{d}{\underset{n \rightarrow \infty}{\leftarrow}} P \left( -z_{1-\alpha/2} \leq 2\sqrt{n}(\arcsin \sqrt{\bar{X}_n} - \arcsin \sqrt{p}) \leq z_{1-\alpha/2} \right) \\ &= P \left( \underbrace{\arcsin \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \leq \arcsin \sqrt{p} \leq \arcsin \sqrt{\bar{X}_n} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}}_{(**)} \right). \end{aligned}$$

Wende nun die Funktion  $\sin^2(x)$  auf  $(**)$  an und erhalte das AKI

$$\left[ \sin^2 \left( \arcsin \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right), \sin^2 \left( \arcsin \sqrt{\bar{X}_n} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right) \right].$$

Da  $\sin^2(x) \in [0, 1]$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , muss hier nichts abgeschnitten werden!

- b) **Poisson-Verteilung:** Es seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann gilt  $\theta = \lambda$ ,  $\hat{\theta}_n = \hat{\lambda} = \bar{X}_n$ . Da  $E_\lambda X_i = \text{Var}_\lambda X_i = \lambda$ , kann man den zentralen Grenzwertsatz (Satz 5.2.2., ElemWR) anwenden

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

- 1. Methode: Löse die Ungleichung

$$\sqrt{n} \frac{|\bar{X}_n - \lambda|}{\sqrt{\lambda}} \leq z_{1-\alpha/2}$$

bzgl.  $\lambda > 0$  auf:

$$n\lambda^2 - (2n\bar{X}_n + z_{1-\alpha/2}^2)\lambda + n\bar{X}_n^2 \leq 0.$$

Wende nun analog wie zu a) die Mitternachtsformel auf die entsprechende quadratische Gleichung an und erhalte  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , wobei

$$\lambda_1 = \frac{2n\bar{X}_n + z_{1-\alpha/2}^2 - \sqrt{z_{1-\alpha/2}^4 + 4n\bar{X}_n z_{1-\alpha/2}^2}}{2n}$$

und

$$\lambda_2 = \frac{2n\bar{X}_n + z_{1-\alpha/2}^2 + \sqrt{z_{1-\alpha/2}^4 + 4n\bar{X}_n z_{1-\alpha/2}^2}}{2n}.$$

Dann ist

$$[\max\{0, \lambda_1\}, \lambda_2]$$

ein AKI für  $\lambda$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

- 2. Methode: Da  $\bar{X}_n$  stark konsistent für  $\lambda$  ist, gilt nach dem Satz von Slutsky (Satz 3.4.1 WT&SP )

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

Daraus folgt ein asymptotisches Konfidenzintervall

$$\left[ \max\left\{0, \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\right\}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} \right]$$

für den Parameter  $\lambda$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ .

- 3. Methode: Für die Varianzstabilisierung, wähle  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  als  $g(\lambda) = 2\sqrt{\lambda}$ , sodass  $g'(\lambda) = 1/\sqrt{\lambda}$  und

$$g'(\lambda)^2 \cdot \sigma(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda = 1.$$

Dann gilt:

$$s\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$$

und

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\stackrel{d}{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]} P \left( \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{\lambda} \leq \sqrt{\bar{X}_n} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right) \\ &= P \left( \left( \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right)^2 \leq \lambda \leq \left( \sqrt{\bar{X}_n} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\left[ \left( \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right)^2, \left( \sqrt{\bar{X}_n} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right)^2 \right]$$

ein AKI für  $\lambda > 0$  zum Niveau  $1 - \alpha$ . Offensichtlich ist die untere Schranke hier größer gleich 0, sodass nichts abgeschnitten werden muss.

## 2.3 Zwei-Stichproben-Probleme

In diesem Abschnitt werden Charakteristiken bzw. Parameter von zwei unterschiedlichen Stichproben miteinander verglichen, indem man Konfidenzintervalle für einfache Funktionen dieser Parameter konstruiert.

Betrachten wir zwei Zufallsstichproben  $Y_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$  und  $Y_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$  von Zufallsvariablen  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ ,  $i = 1, 2$ , die innerhalb der Stichprobe  $Y_i$  jeweils unabhängig und identisch verteilt sind,  $X_{ij} \stackrel{d}{=} X_i$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2$  und die Prototyp-Zufallsvariable  $X_i \sim F_{\theta_i}$ ,  $\theta_i \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Es wird im Allgemeinen nicht gefordert, dass  $Y_1$  und  $Y_2$  unabhängig sind. Falls sie voneinander abhängen, spricht man von *verbundenen Stichproben*  $Y_1$  und  $Y_2$ . Betrachten wir eine Funktion  $g : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$  von den Parametervektoren  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . In diesem Skript werden dabei meistens die Fälle  $m = 1, 2$ ,  $g(\theta_1, \theta_2) = \theta_{1j} - \theta_{2j}$ ,  $g(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_{1j}}{\theta_{2j}}$  untersucht, wobei  $\theta_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{im})$ ,  $i = 1, 2$ .

Unsere Zielstellung wird sein, ein (möglicherweise asymptotisches) Konfidenzintervall für  $g(\theta_1, \theta_2)$  mit Hilfe der Stichprobe  $(Y_1, Y_2)$  zu gewinnen.

Dabei wird die selbe Philosophie wie in Abschnitt 2.1 beschrieben verfolgt. Es wird eine Statistik  $T(Y_1, Y_2, g(\theta_1, \theta_2))$  gesucht, die eine (möglicherweise asymptotische) Prüfverteilung  $F$  besitzt und von  $g(\theta_1, \theta_2)$  explizit abhängt. Durch das Auflösen der Ungleichung  $F_{\alpha_1}^{-1} \leq T(Y_1, Y_2, g(\theta_1, \theta_2)) \leq F_{1-\alpha_2}^{-1}$  bzgl.  $g(\theta_1, \theta_2)$  bekommt man dann ein (möglicherweise asymptotisches) Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

### 2.3.1 Normalverteilte Stichproben

Hier wird angenommen, dass  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ .

**Konfidenzintervall für die Differenz  $\mu_1 - \mu_2$  bei bekannten Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  und unabhängigen Stichproben**

Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  voneinander unabhängig und  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  bekannt. Wir betrachten die Parameterfunktion  $g(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 - \mu_2$ . Es seien

$$\bar{X}_{in_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad i = 1, 2$$

die Stichprobenmittel der Stichproben  $Y_1$  und  $Y_2$ . Es gilt  $\bar{X}_{in_i} \sim N(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{n_i})$ ,  $i = 1, 2$ . Nach Satz 7.3.2, 4) (ElemWR) sind  $\bar{X}_{1n_1}$  und  $\bar{X}_{2n_2}$  unabhängig. Dann ist wegen der Faltungsstabilität der Normalverteilung

$$\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Nach dem Normieren erhält man die Statistik

$$T(Y_1, Y_2, \mu_1 - \mu_2) = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

Daraus bekommt man das Konfidenzintervall

$$\left[ \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

für  $\mu_1 - \mu_2$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

**Konfidenzintervall für den Quotienten  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  bei unbekanntem Erwartungswerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  und unabhängigen Stichproben**

Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  voneinander unabhängig. Sei  $g(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ . Wir konstruieren die Statistik  $T(Y_1, Y_2, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$  folgendermaßen: Seien

$$S_{in_i}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{in_i})^2, \quad i = 1, 2$$

die Stichprobenvarianzen der Stichproben  $Y_1$  und  $Y_2$ . Dann gilt  $\frac{(n_i-1)S_{in_i}^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_{n_i-1}^2$ ,  $i = 1, 2$  nach Satz 7.4.8. (ElemWR)

Da die  $S_{in_i}^2$  voneinander unabhängig sind, gilt

$$T\left(Y_1, Y_2, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \frac{\frac{(n_2-1)S_{2n_2}^2}{(n_2-1)\sigma_2^2}}{\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^2}{(n_1-1)\sigma_1^2}} = \frac{S_{2n_2}^2}{S_{1n_1}^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{n_2-1, n_1-1}$$

nach der Definition der  $F$  - Verteilung. Daraus ergibt sich das Konfidenzintervall

$$\left[ \frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2} F_{n_2-1, n_1-1, \alpha_1}, \frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2} F_{n_2-1, n_1-1, 1-\alpha_2} \right]$$

für  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

**Konfidenzintervall für die Differenz  $\mu_1 - \mu_2$  der Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben**

Dieses Mal seien  $Y_1$  und  $Y_2$  verbunden,  $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$  für ein unbekanntes  $\sigma^2 > 0$ ,  $n_1 = n_2 = n$ . Da  $X_{ij}, j = 1, \dots, n$  unabhängig und identisch verteilt sind, gilt  $Z_j = X_{1j} - X_{2j} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2), j = 1, \dots, n$ . Unser Ziel ist es, ein Konfidenzintervall für  $\mu_1 - \mu_2$  zu bekommen. Wenn wir die Stichprobe  $(Z_1, \dots, Z_n)$  betrachten, und Ergebnisse des Abschnittes 4.2.1, 2. anwenden, so erhalten wir sofort folgendes Konfidenzintervall:

$$\left[ \bar{Z}_n - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{Z}_n + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$$

für  $\mu_1 - \mu_2$  zum Niveau  $1 - \frac{\alpha}{2}$ , wobei  $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_{1j} - X_{2j}) = \bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n}$ ,  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Z_j - \bar{Z}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{1j} - X_{2j} - \bar{X}_{1n} + \bar{X}_{2n})^2$ .

**2.3.2 Poissonverteilte Stichproben**

Wir nehmen jetzt an, dass die Stichproben  $Y_1$  und  $Y_2$  unabhängig sind, und  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), i = 1, 2$ . Konstruieren wir asymptotische Konfidenzintervalle für  $g(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 - \lambda_2$  und  $g(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{n_2 \lambda_2}{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\rho \lambda_1 + \lambda_2}, \rho = \frac{n_1}{n_2} = \text{const}$ , wobei  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ .

**Asymptotisches Konfidenzintervall für  $\lambda_1 - \lambda_2$**

Um zu einer Statistik  $T(Y_1, Y_2, \lambda_1 - \lambda_2)$  zu kommen, die asymptotisch (für  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ )  $N(0, 1)$ -verteilt ist, verwenden wir den zentralen Grenzwertsatz von Ljapunow (vgl. Satz 4.2.13 WT&SP).

**Lemma 2.3.1.** Für  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$  mit  $0 < c_1 \leq n_1/n_2 \leq c_2 < \infty$  gilt

$$\frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - \lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{n_1} + \frac{\lambda_2}{n_2}}} \xrightarrow[n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$$

**Beweis** Führen wir die Zufallsvariable

$$Z_{nk} = \begin{cases} \frac{X_{1k} - \lambda_1}{n_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}}}, & k = 1, \dots, n_1 \\ -\frac{X_{2k-n_1} - \lambda_2}{n_2 \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}}}, & k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 \end{cases}$$

ein, wobei  $n = n_1 + n_2$ . Es gilt:  $E Z_{nk} = 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$ , und

$$0 < \sigma_{nk}^2 = \text{Var } Z_{nk} = \begin{cases} \frac{\text{Var } X_{1k}}{n_1^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}\right)} = \frac{\lambda_1}{n_1^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}\right)}, & k = 1, \dots, n_1, \\ \frac{\lambda_2}{n_2^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}\right)}, & k = n_1 + 1, \dots, n, \end{cases}$$

somit

$$\sum_{k=1}^n \sigma_{nk}^2 = \left( \frac{\lambda_1}{n_1^2} n_1 + \frac{\lambda_2}{n_2^2} n_2 \right) \frac{1}{\frac{\lambda_1}{n_1} + \frac{\lambda_2}{n_2}} = 1.$$

Außerdem gilt für  $\delta > 0$  und  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E(|Z_{nk}|)^{2+\delta} &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{E(|X_{11} - \lambda_1|^{2+\delta})}{n_1^{1+\delta} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}\right)^{(2+\delta)/2}} + \frac{E(|X_{21} - \lambda_2|^{2+\delta})}{n_2^{1+\delta} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}\right)^{(2+\delta)/2}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist die Ljapunow-Bedingung erfüllt und nach Satz 4.2.13 (WT&SP) gilt

$$\sum_{k=1}^n Z_{nk} \xrightarrow[n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

Es gilt aber auch  $\sum_{n=1}^n Z_{nk} = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - \lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n_1 + n_2}}}$ , somit ist das Lemma bewiesen. □

Da  $\bar{X}_{in_i} \xrightarrow{f.s.} \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  nach dem starken Gesetz der grossen Zahlen, gilt mit Hilfe des Satzes von Slutsky

$$T(Y_1, Y_2, \lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - \lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\bar{X}_{1n_1}/n_1 + \bar{X}_{2n_2}/n_2}} \xrightarrow[n_1, n_2 \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$$

Daraus lässt sich sofort das asymptotische Konfidenzintervall für  $\lambda_1 - \lambda_2$  zum Niveau  $1 - \alpha$  ableiten:

$$\left[ \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_{1n_1}}{n_1} + \frac{\bar{X}_{2n_2}}{n_2}}, \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_{1n_1}}{n_1} + \frac{\bar{X}_{2n_2}}{n_2}} \right]$$

**Asymptotisches Konfidenzintervall für  $\frac{n_2\lambda_2}{n_1\lambda_1+n_2\lambda_2}$**

Es sei  $n_1/n_2 = \rho = \text{const}$  und  $g(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{n_2\lambda_2}{n_1\lambda_1+n_2\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\rho\lambda_1+\lambda_2} \stackrel{\text{Def.}}{=} p$ . Es wird ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $p$  gesucht. Wir führen die Statistik

$$T(Y_1, Y_2, p) = \frac{S_{2n_2} - p(S_{1n_1} + S_{2n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(S_{1n_1} + S_{2n_2})}}$$

ein, wobei  $S_{in_i} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ ,  $i = 1, 2$  und

$$\hat{p} = \frac{S_{2n_2}}{S_{1n_1} + S_{2n_2}} = \frac{n_2\bar{X}_{2n_2}}{n_1\bar{X}_{1n_1} + n_2\bar{X}_{2n_2}} \xrightarrow[n_1, n_2 \rightarrow \infty]{f.s.} p$$

ein konsistenter Schätzer für  $p$  (wegen des starken Gesetzes der grossen Zahlen) ist. Falls wir zeigen können, dass  $T(Y_1, Y_2, p) \xrightarrow[n_1, n_2 \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$ , so wird daraus folgendes Konfidenzintervall ableitbar: Aus

$$\lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} P \left( -z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\frac{S_{2n_2}}{S_{1n_1} + S_{2n_2}} - p}{\sqrt{S_{1n_1} \cdot S_{2n_2}}} \cdot (S_{1n_1} + S_{2n_2})^{3/2} \leq z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

folgt, dass

$$\left[ \underline{\theta}(Y_1, Y_2), \bar{\theta}(Y_1, Y_2) \right]$$

mit

$$\underline{\theta}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{S_{2n_2}}{S_{1n_1} + S_{2n_2}} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_{1n_1} \cdot S_{2n_2}}{(S_{1n_1} + S_{2n_2})^3}}$$

$$\bar{\theta}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{S_{2n_2}}{S_{1n_1} + S_{2n_2}} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_{1n_1} \cdot S_{2n_2}}{(S_{1n_1} + S_{2n_2})^3}}$$

ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $p$  zum Niveau  $1 - \alpha$  ist.

Da  $0 < p < 1$  sein soll, können die Schranken des Intervalls diesbezüglich korrigiert werden:

$$\underline{\theta}^*(Y_1, Y_2) = \max\{0, \underline{\theta}(Y_1, Y_2)\},$$

$$\bar{\theta}^*(Y_1, Y_2) = \min\{1, \bar{\theta}(Y_1, Y_2)\}.$$

Nun soll die asymptotische Normalverteilttheit von  $T(Y_1, Y_2, p)$  gezeigt werden. Sie folgt aus dem Satz von Slutsky und folgendem Lemma:

**Lemma 2.3.2.** Es gilt:

$$\frac{S_{2n_2} - p(S_{1n_1} + S_{2n_2})}{\sqrt{p(1-p)(S_{1n_1} + S_{2n_2})}} \xrightarrow[n_1 \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$$

**Beweis** Um die Aussage des Lemmas zu zeigen, verwenden wir einen zentralen Grenzwertsatz für Summen von Zufallsvariablen in zufälliger Anzahl (vgl. Satz 4.2.2 WT&SP). Führen wir die Folge  $N_n = S_{1n_1} + S_{2n_2}$  von nicht-negativen Zufallsvariablen ein. Die Summe ist monoton wachsend. Gleichzeitig setzen wir  $a_{n_2} = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2$ . Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \frac{N_n}{a_{n_2}} &= \frac{S_{1n_1}}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2} + \frac{S_{2n_2}}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2} \\ &= \frac{\bar{X}_{1n_1}}{\lambda_1 + \rho^{-1}\lambda_2} + \frac{\bar{X}_{2n_2}}{\rho\lambda_1 + \lambda_2} \\ &\stackrel{f.s.}{\underset{n_1, n_2 \rightarrow \infty}{\rightarrow}} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \rho^{-1}\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\rho\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\rho\lambda_1}{\rho\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\rho\lambda_1 + \lambda_2} = 1 \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} P(S_{2n_2} = k \mid N_n = m) &= \frac{P(S_{2n_2} = k, S_{1n_1} + S_{2n_2} = m)}{P(S_{1n_1} + S_{2n_2} = m)} \\ &= \frac{P(S_{2n_2} = k, S_{1n_1} = m - k)}{P(S_{1n_1} + S_{2n_2} = m)} \\ &= \frac{e^{-n_2\lambda_2} \frac{(\lambda_2 n_2)^k}{k!} \cdot e^{-n_1\lambda_1} \frac{(n_1\lambda_1)^{m-k}}{(m-k)!}}{e^{-n_1\lambda_1 - n_2\lambda_2} \frac{(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2)^m}{m!}} \\ &= \frac{m!}{(m-k)!k!} \left( \frac{n_2\lambda_2}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2} \right)^m \left( \frac{n_1\lambda_1}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2} \right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \end{aligned}$$

was bedeutet, dass  $S_{2n_2} \mid \{N_n = m\} \sim \text{Bin}(m, p)$ . Dann gilt  $\frac{S_{2n_2} - mp}{\sqrt{mp(1-p)}} \mid \{N_n = m\} \stackrel{d}{=} \frac{S_m - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}$ , wobei  $S_m = \sum_{i=1}^m Z_i$  eine Summe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen  $Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)$  ist. Nach Satz 4.2.2 (WT&SP) gilt dann

$$\frac{S_{N_n} - N_n p}{\sqrt{N_n p(1-p)}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1) \iff \frac{S_{2n_2} - N_n p}{\sqrt{N_n p(1-p)}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1).$$

□

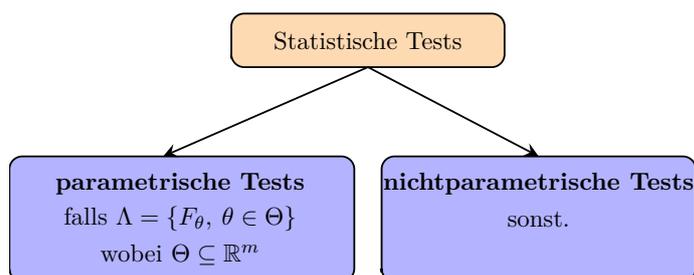
# Kapitel 3

## Tests statistischer Hypothesen

In Kapitel 3 haben wir schon Beispiele von statistischen Tests kennengelernt, wie etwa den Kolmogorow-Smirnow-Test (vgl. ElemWR Bemerkung 7.6.8, 3). Jetzt sollen statistische Signifikanztests formal eingeführt und ihre Eigenschaften untersucht werden.

### 3.1 Allgemeine Philosophie des Testens

Es sei eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  gegeben, mit Verteilungsfunktion  $F \in \Lambda$ , wobei  $\Lambda$  eine Klasse von Verteilungsfunktionen ist. Es sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Stichprobe, die als Realisierung von  $(X_1, \dots, X_n)$  interpretiert wird. In der Theorie des statistischen Testens werden Hypothesen über die Beschaffenheit der (unbekannten) Verteilungsfunktion  $F$  gestellt und geprüft. Dabei unterscheidet man



Bei parametrischen Tests prüft man, ob der Parameter  $\theta$  bestimmte Werte annimmt (zum Beispiel  $\theta = 0$ ). Bekannte Beispiele von nichtparametrischen Tests sind Anpassungstests, bei denen man prüft, ob die Verteilungsfunktion  $F$  gleich einer vorgegebenen Funktion  $F_0$  ist.

Formalisieren wir zunächst den Begriff *Hypothese*. Die Menge  $\Lambda$  von zulässigen Verteilungsfunktionen  $F$  wird in zwei disjunkte Teilmengen  $\Lambda_0$  und  $\Lambda_1$  zerlegt,  $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 = \Lambda$ . Die Aussage

“Man testet die *Haupthypothese*  $H_0 : F \in \Lambda_0$   
gegen die *Alternative*  $H_1 : F \in \Lambda_1$ ,”

bedeutet, dass man an Hand der konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  versucht, eine Entscheidung zu fällen, ob die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $X_i$  zu  $\Lambda_0$  oder zu  $\Lambda_1$  gehört. Dies passiert auf Grund einer statistischen *Entscheidungsregel*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1],$$

die eine Statistik mit folgender Interpretation ist:

Der Stichprobenraum  $\mathbb{R}^n$  wird in drei disjunkte Bereiche  $K_0, K_{01}$  und  $K_1$  unterteilt, sodass  $\mathbb{R}^n = K_0 \cup K_{01} \cup K_1$ , wobei

$$\begin{aligned} K_0 &= \varphi^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\}, \\ K_1 &= \varphi^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 1\}, \\ K_{01} &= \varphi^{-1}((0, 1)) &= \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \varphi(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Dementsprechend wird  $H_0 : F \in \Lambda_0$

- verworfen, falls  $\varphi(x) = 1$ , also  $x \in K_1$ ,
- nicht verworfen, falls  $\varphi(x) = 0$ , also  $x \in K_0$ ;
- falls  $\varphi(x) \in (0, 1)$ , also  $x \in K_{01}$ , wird  $\varphi(x)$  als Bernoulli-Wahrscheinlichkeit interpretiert, und es wird eine Zufallsvariable  $Y \sim \text{Bernoulli}(\varphi(x))$  generiert, für die gilt:

$$Y = \begin{cases} 1 & \implies H_0 \text{ wird verworfen} \\ 0 & \implies H_0 \text{ wird nicht verworfen} \end{cases}$$

Falls  $K_{01} \neq \emptyset$ , wird eine solche Entscheidungsregel *randomisiert* genannt. Bei  $K_{01} = \emptyset$ , also  $\mathbb{R}^n = K_0 \cup K_1$  spricht man dagegen von *nicht-randomisierten* Tests. Dabei heißt  $K_0$  bzw.  $K_1$  *Annahmehereich* bzw. *Ablehnungsbereich* (*kritischer Bereich*) von  $H_0$ .  $K_{01}$  heißt *Randomisierungsbereich*.

**Bemerkung 3.1.1.** 1. Man sagt absichtlich „ $H_0$  wird nicht verworfen“, statt „ $H_0$  wird akzeptiert“, weil die schließende Statistik generell keine positiven, sondern nur negative Entscheidungen treffen kann. Dies ist generell ein philosophisches Problem der Falsifizierbarkeit von Hypothesen oder wissenschaftlichen Theorien, von denen aber keiner behaupten kann, dass sie der Wahrheit entsprechen (vergleiche die *wissenschaftliche Erkenntnistheorie von Karl Popper (1902-1994)*).

- Die randomisierten Tests sind hauptsächlich von theoretischem Interesse (vergleiche Abschnitt 3.3). In der Praxis werden meistens nicht-randomisierte Regeln verwendet, bei denen man aus der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  allein die Entscheidung über  $H_0$  treffen kann. Hier gilt  $\varphi(x) = I_{K_1}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

In diesem und in folgendem Abschnitt betrachten wir ausschließlich nicht-randomisierte Tests, um in Abschnitt 3.3 zu der allgemeinen Situation zurückzukehren.

**Definition 3.1.2.** Man sagt, dass die nicht-randomisierte Testregel  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$  einen (*nichtrandomisierten*) *statistischen Test zum Signifikanzniveau  $\alpha$*  angibt, falls für  $F \in \Lambda_0$  gilt

$$P_F(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) = P(H_0 \text{ verwerfen} \mid H_0 \text{ richtig}) \leq \alpha.$$

**Definition 3.1.3.** 1. Wenn man  $H_0$  verwirft, obwohl  $H_0$  richtig ist, begeht man den sogenannten *Fehler 1. Art*. Die Wahrscheinlichkeit

$$\alpha_n(F) = P_F(\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1), \quad F \in \Lambda_0$$

heißt die *Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art* und soll unter dem Niveau  $\alpha$  bleiben.

- Den *Fehler 2. Art* begeht man, wenn man die falsche Hypothese  $H_0$  nicht verwirft. Dabei ist

$$\beta_n(F) = P_F(\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0), \quad F \in \Lambda_1$$

die *Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art*.

Eine Zusammenfassung aller Möglichkeiten wird in folgender Tabelle festgehalten:

	$H_0$ richtig	$H_0$ falsch
$H_0$ verwerfen	Fehler 1. Art, Wahrscheinlichkeit $\alpha_n(F) \leq \alpha$	richtige Entscheidung
$H_0$ nicht verwerfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art mit Wahrscheinlichkeit $\beta_n(F)$

Dabei sollen  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  möglichst klein sein, was gegenläufige Tendenzen darstellt, weil beim Kleinwerden von  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art notwendigerweise wächst.

**Definition 3.1.4.**

1. Die Funktion

$$G_n(F) = P_F(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1), \quad F \in \Lambda$$

heißt *Gütefunktion* eines Tests  $\varphi$ .

2. Die Einschränkung von  $G_n$  auf  $\Lambda_1$  heißt *Stärke*, *Schärfe* oder *Macht* (englisch *power*) des Tests  $\varphi$ .

Es gilt

$$\begin{cases} G_n(F) = \alpha_n(F) \leq \alpha, & F \in \Lambda_0 \\ G_n(F) = 1 - \beta_n(F), & F \in \Lambda_1 \end{cases}$$

**Beispiel 3.1.5. Parametrische Tests.** Wie sieht ein parametrischer Test aus? Der Parameterraum  $\Theta$  wird als  $\Theta_0 \cup \Theta_1$  dargestellt, wobei  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ . Es gilt  $\Lambda_0 = \{F_\theta : \theta \in \Theta_0\}$ ,  $\Lambda_1 = \{F_\theta : \theta \in \Theta_1\}$ .  $P_F$  wird zu  $P_\theta$ ,  $\alpha_n$ ,  $G_n$  und  $\beta_n$  werden statt auf  $\Lambda$  auf  $\Theta$  definiert.

Welche Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  kommen oft bei parametrischen Tests vor? Zur Einfachheit betrachten wir den Spezialfall  $\Theta = \mathbb{R}$ .

1.  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2.  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta < \theta_0$
3.  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$
4.  $H_0 : \theta \in [a, b]$  vs.  $H_1 : \theta \notin [a, b]$

Im Fall (1) heißt der parametrische Test *zweiseitig*, in den Fällen (2) und (3) *einseitig* (*rechts-* bzw. *linksseitig*). In Fall (4) spricht man von der *Intervallhypothese*  $H_0$ .

Bei einem zweiseitigen bzw. einseitigen Test kann die Gütefunktion wie in Abbildung 3.1 (a) bzw. 3.1 (b) aussehen,

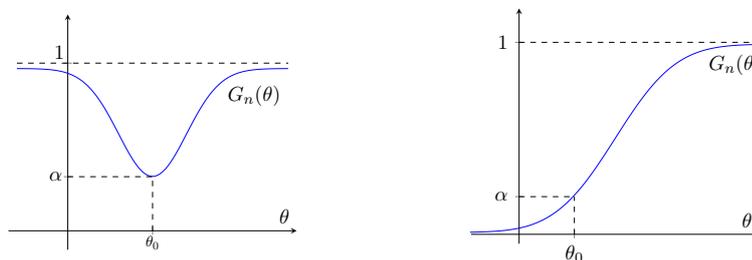


Abbildung 3.1: Gütefunktion

Bei einem allgemeinen (nicht notwendigerweise parametrischen) Modell kann man die ideale Gütefunktion wie in Abbildung 3.1 schematisch darstellen.

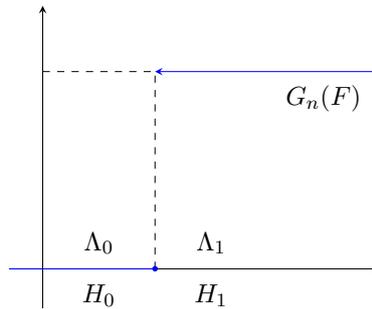


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der idealen Gütefunktion

- Man sieht aus Definition 3.1.3, dem Fehler 1. und 2. Art und der Ablehnungsregel, dass die Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  nicht symmetrisch behandelt werden, denn nur die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art wird kontrolliert. Dies ist der Grund dafür, dass Statistiker die eigentlich interessierende Hypothese nicht als  $H_0$ , sondern als  $H_1$  formulieren, damit, wenn man sich für  $H_1$  entscheidet, man mit Sicherheit sagen kann, dass die Wahrscheinlichkeit der Fehlentscheidung unter dem Niveau  $\alpha$  liegt.
- Wie wird ein statistischer, nicht randomisierter Test praktisch konstruiert? Die Konstruktion der Ablehnungsregel  $\varphi$  ähnelt sich sehr der von Konfidenzintervallen:
  1. Finde eine Teststatistik  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die unter  $H_0$  eine (möglicherweise asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$ ) bestimmte Prüfverteilung hat.
  2. Definiere  $B_0 = [t_{\alpha_1}, t_{1-\alpha_2}]$ , wobei  $t_{\alpha_1}$  und  $t_{1-\alpha_2}$  Quantile der Prüfverteilung von  $T$  sind,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in [0, 1]$ .
  3. Falls  $T(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R} \setminus B_0 = B_1$ , setze  $\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1$ .  $H_0$  wird verworfen. Ansonsten setze  $\varphi(X_1, \dots, X_n) = 0$ .
- Falls die Verteilung von  $T$  nur asymptotisch bestimmt werden kann, so heißt  $\varphi$  *asymptotischer Test*.
- Sehr oft aber ist auch die asymptotische Verteilung von  $T$  nicht bekannt. Dann verwendet man sogenannte *Monte-Carlo Tests*, in denen dann Quantile  $t_\alpha$  näherungsweise aus sehr vielen Monte-Carlo-Simulationen von  $T$  (unter  $H_0$ ) bestimmt werden: Falls  $t^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  die Werte von  $T$  in  $m$  unabhängigen Simulationsvorgängen sind, das heißt  $t^i = T(x_1^i, \dots, x_n^i)$ ,  $x_j^i$  sind unabhängige Realisierungen von  $X_j \sim F \in \Lambda_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, m$  dann bildet man ihre Ord-

nungsstatistiken  $t^{(1)}, \dots, t^{(m)}$  und setzt  $t_\alpha \approx t^{(\lfloor \alpha \cdot m \rfloor)}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , wobei  $t^{(0)} = -\infty$ .

**Bemerkung 3.1.6.** Man sieht deutlich, dass aus einem beliebigen Konfidenzintervall

$$I_\theta = [I_1^\theta(X_1, \dots, X_n), I_2^\theta(X_1, \dots, X_n)]$$

zum Niveau  $1 - \alpha$  für einen Parameter  $\theta \in \mathbb{R}$  ein Test für  $\theta$  konstruierbar ist. Die Hypothese  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  wird mit folgender Entscheidungsregel getestet:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } \theta_0 \notin [I_1^{\theta_0}(X_1, \dots, X_n), I_2^{\theta_0}(X_1, \dots, X_n)].$$

Das Signifikanzniveau des Tests ist  $\alpha$ .

**Beispiel 3.1.7.** *Normalverteilung, Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz.* Es seien

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

mit bekannter Varianz  $\sigma^2$ . Ein Konfidenzintervall für  $\mu$  ist

$$I^\mu = [I_1^\mu(X_1, \dots, X_n), I_2^\mu(X_1, \dots, X_n)] = \left[ \bar{X}_n - \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

(vergleiche Abschnitt 2.2.1)  $H_0 : \mu = \mu_0$  (gegen die Alternative  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ), wird verworfen, falls

$$|\mu_0 - \bar{X}_n| > \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}.$$

In der Testsprache bedeutet es, dass

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = I((x_1, \dots, x_n) \in K_1),$$

wobei

$$K_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mu_0 - \bar{x}_n| > \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right\}$$

der Ablehnungsbereich ist. Für die Teststatistik  $T(X_1, \dots, X_n)$  gilt:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

unter  $H_0 : \alpha_n(\mu_0) = \alpha$ .

Berechnen wir nun die Gütefunktion (vergleiche Abbildung 3.3).

$$\begin{aligned}
 G_n(\mu) &= P_\mu \left( |\mu_0 - \bar{X}_n| > \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - P_\mu \left( \left| \bar{X}_n - \mu_0 \right| \leq \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \\
 &= 1 - P_\mu \left( \left| \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \right) \\
 &= 1 - P_\mu \left( -z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \\
 &= 1 - \Phi \left( z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) + \Phi \left( -z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \\
 &= \Phi \left( -z_{1-\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) + \Phi \left( -z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right).
 \end{aligned}$$

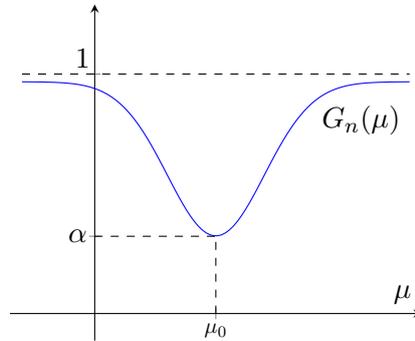


Abbildung 3.3: Gütefunktion für den zweiseitigen Test des Erwartungswertes einer Normalverteilung bei bekannter Varianz

Die „Ja-Nein“-Entscheidung des Testens wird oft als zu grob empfunden. Deswegen versucht man, ein feineres Maß der Verträglichkeit der Daten mit den Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  zu bestimmen. Dies ist der sogenannte  $p$ -Wert, der von den meisten Statistik-Softwarepaketen ausgegeben wird.

**Definition 3.1.8.** Es sei  $(x_1, \dots, x_n)$  die konkrete Stichprobe von Daten, die als Realisierung von  $(X_1, \dots, X_n)$  interpretiert wird und  $T(X_1, \dots, X_n)$  die Teststatistik, mit deren Hilfe die Entscheidungsregel  $\varphi$  konstruiert wurde. Der  $p$ -Wert des statistischen Tests  $\varphi$  ist das kleinste Signifikanzniveau, zu dem der Wert  $t = T(x_1, \dots, x_n)$  zur Verwerfung der Hypothese  $H_0$  führt. Im Beispiel eines einseitigen Tests mit dem Ablehnungsbereich  $B_1 = (t, \infty)$  sagt man grob, dass

$$p = „P(T(X_1, \dots, X_n) \geq t \mid H_0)“,$$

wobei die Anführungszeichen bedeuten, dass dies keine klassische, sondern eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist, die später präzise angegeben wird.

Bei der Verwendung des  $p$ -Wertes verändert sich die Ablehnungsregel: die Hypothese  $H_0$  wird zum Signifikanzniveau  $\alpha$  abgelehnt, falls  $\alpha \geq p$ . Früher hat man die Signifikanz der Testentscheidung (Ablehnung von  $H_0$ ) an Hand folgender Tabelle festgesetzt:

$p$ -Wert	Interpretation
$p \leq 0,001$	sehr stark signifikant
$0,001 < p \leq 0,01$	stark signifikant
$0,01 < p \leq 0,05$	schwach signifikant
$0,05 < p$	nicht signifikant

Da aber heute der  $p$ -Wert an sich verwendet werden kann, kann der Anwender der Tests bei vorgegebenem  $p$ -Wert selbst entscheiden, zu welchem Niveau er seine Tests durchführen will.

**Bemerkung 3.1.9.**

1. Das Signifikanzniveau darf nicht in Abhängigkeit von  $p$  festgelegt werden. Dies würde die allgemeine Testphilosophie zerstören!
2. Der  $p$ -Wert ist keine Wahrscheinlichkeit, sondern eine Zufallsvariable, denn er hängt von  $(X_1, \dots, X_n)$  ab. Der Ausdruck

$$p = P(T(X_1, \dots, X_n) \geq t \mid H_0),$$

der in Definition 3.1.8 für den  $p$ -Wert eines einseitigen Tests mit Teststatistik  $T$  gegeben wurde, soll demnach als *Überschreitungswahrscheinlichkeit* interpretiert werden, dass bei Wiederholung des Zufallsexperiments unter  $H_0$  der Wert  $t = T(x_1, \dots, x_n)$  oder extremere Werte in Richtung der Hypothese  $H_1$  beobachtet werden:

$$p = P(T(X'_1, \dots, X'_n) \geq T(x_1, \dots, x_n) \mid H_0),$$

wobei  $(X'_1, \dots, X'_n) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_n)$ . Falls wir von einer konkreten Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$  zur Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  übergehen, erhalten wir

$$p = p(X_1, \dots, X_n) = P(T(X'_1, \dots, X'_n) \geq T(X_1, \dots, X_n) \mid H_0, X_1, \dots, X_n).$$

3. Für andere Hypothesen  $H_0$  wird der  $p$ -Wert auch eine andere Form haben. Zum Beispiel für
  - (a) einen symmetrischen zweiseitigen Test ist

$$B_0 = \left[ -t_{1-\alpha/2}, t_{1-\alpha/2} \right]$$

der Akzeptanzbereich für  $H_0$ .

$$\Rightarrow p = P(|T(X'_1, \dots, X'_n)| \geq t \mid H_0), t = T(X_1, \dots, X_n)$$

(b) einen linksseitigen Test mit  $B_0 = [t_\alpha, \infty]$  gilt

$$p = P(T(X'_1, \dots, X'_n) \leq t | H_0), \quad t = T(X_1, \dots, X_n)$$

(c) Das Verhalten des  $p$ -Wertes kann folgendermaßen untersucht werden:

**Lemma 3.1.10.** Falls die Verteilungsfunktion  $F$  von  $T$  stetig und streng monoton steigend ist (die Verteilung von  $T$  ist absolut stetig mit zum Beispiel stetiger Dichte), dann ist  $p \sim U[0, 1]$ .

**Beweis** Wir zeigen es am speziellen Beispiel des rechtsseitigen Tests.

$$\begin{aligned} P(p \leq \alpha | H_0) &= P(\bar{F}_T(T(X_1, \dots, X_n)) \leq \alpha | H_0) \\ &= P(F_T(T(X_1, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha | H_0) \\ &= P(U \geq 1 - \alpha) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0, 1], \end{aligned}$$

da  $F_T(T(X_1, \dots, X_n)) \stackrel{d}{=} U \sim U[0, 1]$  und  $F_T$  absolut stetig ist.  $\square$

**Übungsaufgabe 3.1.11.** Zeigen Sie, dass für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  mit absolut stetiger Verteilung und streng monoton steigender Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt:

$$F_X(X) \sim U[0, 1]$$

Falls die Verteilung von  $T$  mit dem Wertebereich  $\{t_1, \dots, t_n\}$ ,  $t_i < t_j$  diskret ist für  $i < j$ , so ist auch die Verteilung von  $p$  diskret, somit gilt nicht  $p \sim U[0, 1]$ . In diesem Fall ist  $F_p(x)$  eine Treppenfunktion, die die Gerade  $y = u$  in den Punkten  $u = \sum_{i=1}^k P(T(X_1, \dots, X_n) = t_i)$ ,  $k = 1, \dots, n$  berührt (vgl. Abbildung 3.4).

**Definition 3.1.12.**

1. Falls die Macht  $G_n(\cdot)$  eines Tests  $\varphi$  zum Niveau  $\alpha$  die Ungleichung

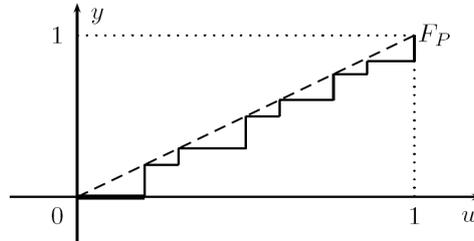
$$G_n(F) \geq \alpha, \quad F \in \Lambda_1$$

erfüllt, dann heißt der Test *unverfälscht*.

2. Es seien  $\varphi$  und  $\varphi^*$  zwei Tests zum Niveau  $\alpha$  mit Gütefunktionen  $G_n(\cdot)$  und  $G_n^*(\cdot)$ . Man sagt, dass der Test  $\varphi$  *besser* als  $\varphi^*$  ist, falls er eine größere Macht besitzt:

$$G_n(F) \geq G_n^*(F) \quad \forall F \in \Lambda_1.$$

Abbildung 3.4: Verteilung von  $p$  für diskrete  $T$



3. Der Test  $\varphi$  heißt konsistent, falls  $G_n(F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  für alle  $F \in \Lambda_1$ .

**Bemerkung 3.1.13.** 1. Die einseitigen Tests haben oft eine größere Macht als ihre zweiseitigen Versionen.

**Beispiel 3.1.14.** Betrachten wir zum Beispiel den Gauss-Test des Erwartungswertes der Normalverteilung bei bekannter Varianz. Beim zweiseitigen Test

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

erhalten wir die Gütefunktion

$$G_n(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} + \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} - \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right).$$

Beim einseitigen Test  $\varphi^*$  der Hypothesen

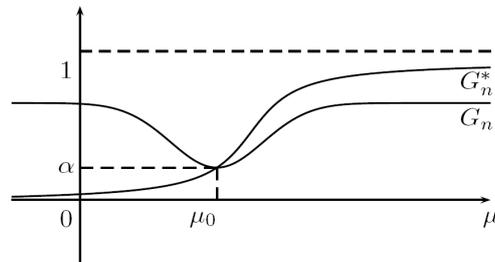
$$H_0^* : \mu \leq \mu_0 \text{ vs. } H_1^* : \mu > \mu_0$$

ist seine Gütefunktion gleich

$$G_n^*(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right).$$

Da  $G_n(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,  $G_n^*(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  sind beide Tests offensichtlich konsistent. Dabei ist  $\varphi^*$  besser als  $\varphi$ . Beide Tests sind unverfälscht (vergleiche Abbildung 3.5).

Abbildung 3.5: Gütefunktionen eines ein- bzw. zweiseitigen Tests der Erwartungswertes einer Normalverteilung



2. Beim Testen einer Intervallhypothese  $H_0 : \theta \in [a, b]$  vs.  $H_1 : \theta \notin [a, b]$  zum Niveau  $\alpha$  kann man wie folgt vorgehen: Teste

- (a)  $H_0^a : \theta \geq a$  vs.  $H_1^a : \theta < a$  zum Niveau  $\alpha/2$ .  
 (b)  $H_0^b : \theta \leq b$  vs.  $H_1^b : \theta > b$  zum Niveau  $\alpha/2$ .

$H_0$  wird nicht abgelehnt, falls  $H_0^a$  und  $H_0^b$  nicht abgelehnt werden. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art ist hier  $\alpha$ . Die Macht dieses Tests ist im Allgemeinen schlecht.

3. Je mehr Parameter für den Aufbau der Teststatistik  $T$  geschätzt werden müssen, desto kleiner wird in der Regel die Macht.

## 3.2 Nichtrandomisierte Tests

### 3.2.1 Parametrische Signifikanztests

In diesem Abschnitt geben wir Beispiele einiger Tests, die meistens aus den entsprechenden Konfidenzintervallen für die Parameter von Verteilungen entstehen. Deshalb werden wir sie nur kurz behandeln.

1. **Tests für die Parameter der Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$**

- (a) **Test von  $\mu$  bei unbekannter Varianz**

- Hypothesen:  $H_0 : \mu = \mu_0$  vs.  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .

- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \sim t_{n-1} \quad | H_0$$

- Entscheidungsregel:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } |T(X_1, \dots, X_n)| > t_{n-1, 1-\alpha/2}.$$

(b) **Test von  $\sigma^2$  bei bekanntem  $\mu$**

- Hypothesen:  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  vs.  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .
- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_n^2 \quad | H_0$$

mit  $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ .

- Entscheidungsregel:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } T(X_1, \dots, X_n) \notin [\chi_{n,\alpha/2}^2, \chi_{n,1-\alpha/2}^2].$$

- Gütefunktion:

$$\begin{aligned} G_n(\sigma^2) &= 1 - P_{\sigma^2} \left( \chi_{n,\alpha/2}^2 \leq \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n,1-\alpha/2}^2 \right) \\ &= 1 - P_{\sigma^2} \left( \frac{\chi_{n,\alpha/2}^2 \sigma_0^2}{\sigma^2} \leq \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{\chi_{n,1-\alpha/2}^2 \sigma_0^2}{\sigma^2} \right) \\ &= 1 - F_{\chi_n^2} \left( \chi_{n,1-\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) + F_{\chi_n^2} \left( \chi_{n,\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

(c) **Test von  $\sigma^2$  bei unbekanntem  $\mu$**

- Hypothesen:  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  vs.  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .
- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad | H_0,$$

wobei  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ .

- Entscheidungsregel:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } T(X_1, \dots, X_n) \notin [\chi_{n-1,\alpha/2}^2, \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2].$$

**Übungsaufgabe 3.2.1.**

- i. Finden Sie  $G_n(\cdot)$  für die einseitige Version der obigen Tests.
- ii. Zeigen Sie, dass diese einseitigen Tests unverfälscht sind, die zweiseitigen aber nicht.

## 2. Asymptotische Tests

Bei asymptotischen Tests ist die Verteilung der Teststatistik nur näherungsweise (für große  $n$ ) bekannt. Ebenso asymptotisch wird das Konfidenzniveau  $\alpha$  erreicht. Ihre Konstruktion basiert meistens auf Verwendung der Grenzwertsätze.

Die allgemeine Vorgehensweise wird im sogenannten *Wald-Test* (genannt nach dem Statistiker Abraham Wald (1902-1980)) fixiert:

- Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe,  $X_i$  seien unabhängig und identisch verteilt für  $i = 1, \dots, n$ , mit  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ .
- Wir testen  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Es sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein erwartungstreuer, asymptotisch normalverteilter Schätzer für  $\theta$ .

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1) \quad | H_0,$$

wobei  $\hat{\sigma}_n^2$  ein konsistenter Schätzer für die Varianz von  $\hat{\theta}_n$  sei.

Die Teststatistik ist

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta_0}{\hat{\sigma}_n} \sqrt{n}.$$

- Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  wird abgelehnt, wenn

$$|T(X_1, \dots, X_n)| > z_{1-\alpha/2}, \text{ wobei } z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Diese Entscheidungsregel soll nur bei großen  $n$  verwendet werden. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art ist asymptotisch gleich  $\alpha$ , denn  $P(|T(X_1, \dots, X_n)| > z_{1-\alpha/2} \mid H_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$  wegen der asymptotischen Normalverteilung von  $T$ .

Spezialfälle des Wald-Tests sind asymptotische Tests der Erwartungswerte bei einer Poisson- oder Bernoulliverteilten Stichprobe.

### Beispiel 3.2.2.

#### (a) Bernoulliverteilung

Es seien  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

- Hypothesen:  $H_0 : p = p_0$  vs.  $H_1 : p \neq p_0$ .

- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}, & \text{falls } \bar{X}_n \neq 0, 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$ .

(b) **Poissonverteilung**

Es seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

- Hypothesen:  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$
- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda_0}{\sqrt{\bar{X}_n}}, & \text{falls } \bar{X}_n > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$

### 3. Zwei-Stichproben-Probleme

Gegeben seien zwei Zufallsstichproben

$$Y_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), \quad Y_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), \quad n = \max\{n_1, n_2\}.$$

$X_{ij}$  seien unabhängig für  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $X_{ij} \sim F_{\theta_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

(a) **Test der Gleichheit zweier Erwartungswerte bei normalverteilten Stichproben**

- **bei bekannten Varianzen**

Es seien  $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Dabei seien  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  bekannt,  $X_{ij}$  seien unabhängig voneinander für alle  $i, j$ .

Die Hypothesen sind  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ . Wir betrachten die Teststatistik:

$$T(Y_1, Y_2) = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(Y_1, Y_2) \sim N(0, 1)$ . Als Entscheidungsregel gilt:  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $|T(Y_1, Y_2)| > z_{1-\alpha/2}$ .

- **bei unbekanntem (jedoch gleichen) Varianzen**

Es seien  $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Dabei sei  $\sigma^2$  und  $X_{ij}$  seien unabhängig voneinander für alle  $i, j$ .

Die Hypothesen sind:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ . Wir betrachten die Teststatistik

$$T(Y_1, Y_2) = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{S_{n_1 n_2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

wobei  $S_{n_1 n_2}^2$  gegeben ist durch

$$\frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left( \sum_{j=1}^{n_1} (X_{1j} - \bar{X}_{1n_1})^2 + v \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \bar{X}_{2n_2})^2 \right).$$

Man kann zeigen, dass unter  $H_0$  gilt:  $T(Y_1, Y_2) \sim t_{n_1+n_2-2}$ . Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  ablehnen, falls  $|T(Y_1, Y_2)| > t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha/2}$ .

(b) **Test der Gleichheit von Erwartungswerten bei verbundenen Stichproben**

Es seien  $Y_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})$  und  $Y_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  $n_1 = n_2 = n$ ,

$$Z_j = X_{1j} - X_{2j} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2), \quad j = 1, \dots, n$$

unabhängig und identisch verteilt mit  $\mu_i = E X_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ . Die Hypothesen sind:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$ . Als Teststatistik verwenden wir

$$T(Z_1, \dots, Z_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{Z}_n}{S_n},$$

wobei

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Z_j - \bar{Z}_n)^2.$$

Unter  $H_0$  gilt dann:  $T(Z_1, \dots, Z_n) \sim t_{n-1}$ . Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $|T(z_1, \dots, z_n)| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ .

(c) **Test der Gleichheit von Varianzen bei unabhängigen Gaußschen Stichproben**

Es seien  $Y_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$  und  $Y_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$  unabhängig und identisch verteilt mit  $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , wobei  $\mu_i$  und  $\sigma_i^2$  beide unbekannt sind. Die Hypothesen sind:  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  vs.  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ . Als Teststatistik verwenden wir

$$T(Y_1, Y_2) = \frac{S_{2n_2}^2}{S_{1n_1}^2},$$

wobei

$$S_{in_i}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_{in_i})^2, \quad i = 1, 2.$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(Y_1, Y_2) \sim F_{n_2-1, n_1-1}$ . Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  wird abgelehnt, falls

$$T(Y_1, Y_2) \notin \left[ F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2}, F_{n_2-1, n_1-1, 1-\alpha/2} \right].$$

(d) **Asymptotische Zwei-Stichproben-Tests**

• **bei Bernoulli-verteilten Stichproben**

Es gilt  $X_{ij} \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2$ . Die Hypothesen sind  $H_0 : p_1 = p_2$  vs.  $H_1 : p_1 \neq p_2$ . Als Teststatistik verwenden wir

$$T(Y_1, Y_2) = \frac{(\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2})}{\sqrt{\frac{\bar{X}_{1n_1}(1-\bar{X}_{1n_1})}{n_1} + \frac{\bar{X}_{2n_2}(1-\bar{X}_{2n_2})}{n_2}}}$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(Y_1, Y_2) \xrightarrow[n_1, n_2 \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$ . Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  wird verworfen, falls  $|T(Y_1, Y_2)| > z_{1-\alpha/2}$ . Dies ist ein Test zum asymptotischen Signifikanzniveau  $\alpha$ .

• **bei Poisson-verteilten Stichproben**

Es seien  $X_{ij}$  unabhängig,  $X_{ij} \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Die Hypothesen sind:  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$  vs.  $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$ . Als Teststatistik verwenden wir:

$$T(Y_1, Y_2) = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{\sqrt{\frac{\bar{X}_{1n_1}}{n_1} + \frac{\bar{X}_{2n_2}}{n_2}}}$$

Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  ablehnen, falls  $|T(Y_1, Y_2)| > z_{1-\alpha/2}$ . Dies ist ein Test zum asymptotischen Niveau  $\alpha$ .

**Bemerkung 3.2.3.** Asymptotische Tests dürfen nur für große Stichprobenumfänge verwendet werden. Bei ihrer Verwendung für kleine Stichproben kann das asymptotische Signifikanzniveau nicht garantiert werden.

### 3.3 Randomisierte Tests

In diesem Abschnitt werden wir klassische Ergebnisse von Neyman-Pearson über die besten Tests präsentieren. Dabei werden randomisierte Tests eine wichtige Rolle spielen.

### 3.3.1 Grundlagen

Gegeben sei eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit konkreter Ausprägung  $(x_1, \dots, x_n)$ . Sei unser Stichprobenraum  $(B, \mathcal{B})$  entweder  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$  oder  $(\mathbb{N}_0^n, \mathcal{B}_{\mathbb{N}_0^n})$ , je nachdem, ob die Stichprobenvariablen  $X_i, i = 1, \dots, n$  absolut stetig oder diskret verteilt sind.

Hier wird zur Einfachheit im Falle einer diskret verteilten Zufallsvariable  $X_i$  ihr diskreter Wertebereich mit  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  gleichgesetzt. Der Wertebereich sei mit einem Maß  $\mu$  versehen, wobei

$$\mu = \begin{cases} \text{Lebesgue-Ma\ss auf } \mathbb{R}, & \text{falls } B = \mathbb{R}^n, \\ \text{Z\ahlnma\ss auf } \mathbb{N}_0, & \text{falls } B = \mathbb{N}_0^n. \end{cases}$$

Dementsprechend gilt

$$\int g(x)\mu(dx) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g(x)dx, & \text{im absolut stetigen Fall,} \\ \sum_{x \in \mathbb{N}_0} g(x), & \text{im diskreten Fall.} \end{cases}$$

Es sei zus\atztzlich  $X_i \sim F_\theta, \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n$  (parametrisches Modell). F\ur  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$  formulieren wir die Hypothesen  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , die mit Hilfe eines randomisierten Tests

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_1, \\ \gamma \in (0, 1), & x \in K_{01} \\ 0, & x \in K_0 \end{cases} \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

getestet werden.

Im Falle  $x \in K_{01}$  wird mit Hilfe einer Zufallsvariable  $Y \sim \text{Bernoulli}(\gamma)$  entschieden, ob  $H_0$  verworfen wird ( $Y = 1$ ) oder nicht ( $Y = 0$ ).

**Definition 3.3.1.** 1. Die *G\utefunktion* eines randomisierten Tests  $\varphi$  sei

$$G_n(\theta) = G_n(\varphi, \theta) = E_\theta \varphi(X_1, \dots, X_n), \theta \in \Theta.$$

2. Der Test  $\varphi$  hat das *Signifikanzniveau*  $\alpha \in [0, 1]$ , falls  $G_n(\varphi, \theta) \leq \alpha$ , f\ur alle  $\theta \in \Theta_0$  ist. Die Zahl

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} G_n(\varphi, \theta)$$

wird *Umfang* des Tests  $\varphi$  genannt. Offensichtlich ist der Umfang eines Niveau- $\alpha$ -Tests kleiner gleich  $\alpha$ .

3. Sei  $\Psi(\alpha)$  die Menge aller Tests zum Niveau  $\alpha$ . Der Test  $\varphi_1 \in \Psi(\alpha)$  ist (*gleichm\assig*) *besser* als Test  $\varphi_2 \in \Psi(\alpha)$ , falls  $G_n(\varphi_1, \theta) \geq G_n(\varphi_2, \theta), \theta \in \Theta_1$ , also falls  $\varphi_1$  eine gr\o\ssere Macht besitzt.

4. Ein Test  $\varphi^* \in \Psi(\alpha)$  ist (*gleichmäßig bester Test*) in  $\Psi(\alpha)$ , falls

$$G_n(\varphi^*, \theta) \geq G_n(\varphi, \theta), \text{ für alle Tests } \varphi \in \Psi(\alpha), \theta \in \Theta_1.$$

**Bemerkung 3.3.2.**

1. Definition 3.3.1 1) ist eine offensichtliche Verallgemeinerung der Definition 3.1.4 der Gütefunktion eines nicht-randomisierten Tests  $\varphi$ . Nämlich, für  $\varphi(x) = I(x \in K_1)$  gilt:

$$\begin{aligned} G_n(\varphi, \theta) &= E_\theta \varphi(X_1, \dots, X_n) \\ &= P_\theta((X_1, \dots, X_n) \in K_1) \\ &= P_\theta(H_0 \text{ ablehnen}), \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

2. Ein bester Test  $\varphi^*$  in  $\Psi(\alpha)$  existiert nicht immer, sondern nur unter gewissen Voraussetzungen an  $P_\theta, \Theta_0, \Theta_1$  und  $\Psi(\alpha)$ .

**3.3.2 Neyman-Pearson-Tests bei einfachen Hypothesen**

In diesem Abschnitt betrachten wir einfache Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \tag{3.1}$$

wobei  $\theta_0, \theta_1 \in \Theta, \theta_1 \neq \theta_0$ .

Dementsprechend sind  $\Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}$ . Wir setzen voraus, dass  $F_{\theta_i}$  eine Dichte  $g_i(x)$  bezüglich  $\mu$  besitzt,  $i = 0, 1$ . Führen wir einige abkürzende Bezeichnungen  $P_0 = P_{\theta_0}, P_1 = P_{\theta_1}, E_0 = E_{\theta_0}, E_1 = E_{\theta_1}$  ein. Sei  $f_i(x) = \prod_{j=1}^n g_i(x_j), x = (x_1, \dots, x_n), i = 0, 1$  die Dichte der Stichprobe unter  $H_0$  bzw.  $H_1$ .

**Definition 3.3.3.** Ein *Neyman-Pearson-Test (NP-Test)* der einfachen Hypothesen in (3.1) ist gegeben durch die Regel

$$\varphi(x) = \varphi_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x) > K f_0(x), \\ \gamma, & \text{falls } f_1(x) = K f_0(x), \\ 0, & \text{falls } f_1(x) < K f_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

für Konstanten  $K > 0$  und  $\gamma \in [0, 1]$ .

**Bemerkung 3.3.4.**

1. Manchmal werden  $K = K(x)$  und  $\gamma = \gamma(x)$  als Funktionen von  $x$  und nicht als Konstanten betrachtet.
2. Der *Ablehnungsbereich* des Neyman-Pearson-Tests  $\varphi_K$  ist

$$K_1 = \{x \in B : f_1(x) > K f_0(x)\}.$$

3. Der *Umfang* des Neyman-Pearson-Tests  $\varphi_K$  ist

$$\begin{aligned} E_0 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) &= P_0(f_1(X_1, \dots, X_n) > K f_0(X_1, \dots, X_n)) \\ &\quad + \gamma P_0(f_1(X_1, \dots, X_n) = K f_0(X_1, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

4. Die Definition 3.3.3 kann man äquivalent folgendermaßen geben: Wir definieren eine Teststatistik

$$T(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_0(x)}, & x \in B : f_0(x) > 0, \\ \infty, & x \in B : f_0(x) = 0. \end{cases}$$

Dann wird der neue Test

$$\tilde{\varphi}_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > K, \\ \gamma, & \text{falls } T(x) = K, \\ 0, & \text{falls } T(x) < K \end{cases}$$

eingeführt, der für  $P_0$ - und  $P_1$ - fast alle  $x \in B$  äquivalent zu  $\varphi_K$  ist. In der Tat gilt  $\varphi_K(x) = \tilde{\varphi}_K(x) \forall x \in B \setminus C$ , wobei  $C = \{x \in B : f_0(x) = f_1(x) = 0\}$  das  $P_0$ - bzw.  $P_1$ -Maß Null besitzt.

In der neuen Formulierung ist der Umfang von  $\varphi$  bzw.  $\tilde{\varphi}_K$  gleich

$$E_0 \tilde{\varphi}_K = P_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) + \gamma \cdot P_0(T(X_1, \dots, X_n) = K).$$

**Satz 3.3.5. (Optimalitätssatz)** Es sei  $\varphi_K$  ein Neyman-Pearson-Test für ein  $K > 0$  und  $\gamma \in [0, 1]$ . Dann ist  $\varphi_K$  der beste Test zum Niveau  $\alpha = E_0 \varphi_K$  seines Umfangs.

**Beweis** Sei  $\varphi \in \Psi(\alpha)$ , also  $E_0(\varphi(X_1, \dots, X_n)) \leq \alpha$ . Um zu zeigen, dass  $\varphi_K$  besser als  $\varphi$  ist, genügt es bei einfachen Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  zu zeigen, dass  $E_1 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) \geq E_1 \varphi(X_1, \dots, X_n)$ . Wir führen dazu die folgenden Mengen ein:

$$\begin{aligned} M^+ &= \{x \in B : \varphi_K(x) > \varphi(x)\} \\ M^- &= \{x \in B : \varphi_K(x) < \varphi(x)\} \\ M^= &= \{x \in B : \varphi_K(x) = \varphi(x)\} \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich  $x \in M^+ \Rightarrow \varphi_K(x) > 0 \Rightarrow f_1(x) \geq K f_0(x)$ ,

$$x \in M^- \Rightarrow \varphi_K(x) < 1 \Rightarrow f_1(x) \leq K f_0(x) \text{ und } B = M^+ \cup M^- \cup M^=.$$

Als Folgerung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E_1(\varphi_K(X_1, \dots, X_n) - \varphi(X_1, \dots, X_n)) &= \int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\
 &= \left( \int_{M^+} + \int_{M^-} + \int_{M^=} \right) (\varphi_K(x) - \varphi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\
 &\geq \int_{M^+} (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K f_0(x) \mu(dx) \\
 &\quad + \int_{M^-} (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K f_0(x) \mu(dx) \\
 &= \int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K f_0(x) \mu(dx) \\
 &= K [E_0 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) - E_0 \varphi(X_1, \dots, X_n)] \\
 &\geq K(\alpha - \alpha) = 0,
 \end{aligned}$$

weil beide Tests das Niveau  $\alpha$  haben. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 3.3.6.**

1. Da im Beweis  $\gamma$  nicht vorkommt, wird derselbe Beweis im Falle von  $\gamma(x) \neq \text{const}$  gelten.
2. Aus dem Beweis folgt die Gültigkeit der Ungleichung

$$\int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) (f_1(x) - K f_0(x)) \mu(dx) \geq 0$$

im Falle des konstanten  $K$ , bzw.

$$\begin{aligned}
 E_1(\varphi_K(X_1, \dots, X_n) - \varphi(X_1, \dots, X_n)) &\geq \\
 &\int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K(x) f_0(x) \mu(dx)
 \end{aligned}$$

im allgemeinen Fall.

**Satz 3.3.7. (Fundamentallemma von Neyman-Pearson)**

1. Zu einem beliebigen  $\alpha \in (0, 1)$  gibt es einen Neyman-Pearson-Test  $\varphi_K$  mit Umfang  $\alpha$ , der dann nach Satz 3.3.5 der beste Niveau- $\alpha$ -Test ist.
2. Ist  $\varphi$  ebenfalls bester Test zum Niveau  $\alpha$ , so gilt  $\varphi(x) = \varphi_K(x)$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in K_0 \cup K_1 = \{x \in B : f_1(x) \neq K f_0(x)\}$  und  $\varphi_K$  aus Teil 1).

**Beweis** 1. Für  $\varphi_K(x)$  gilt

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in K_1 = \{x : f_1(x) > K \cdot f_0(x)\}, \\ \gamma, & \text{falls } x \in K_{01} = \{x : f_1(x) = K \cdot f_0(x)\}, \\ 0, & \text{falls } x \in K_0 = \{x : f_1(x) < K \cdot f_0(x)\}. \end{cases}$$

Der Umfang von  $\varphi_K$  ist

$$P_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) + \gamma P_0(T(X_1, \dots, X_n) = K) = \alpha, \quad (3.3)$$

wobei

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{f_0(x_1, \dots, x_n)}, & \text{falls } f_0(x_1, \dots, x_n) > 0, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun suchen wir ein  $K > 0$  und ein  $\gamma \in [0, 1]$ , sodass Gleichung (3.3) stimmt. Es sei  $\tilde{F}_0(x) = P_0(T(X_1, \dots, X_n) \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  die Verteilungsfunktion von  $T$ . Da  $T \geq 0$  ist, gilt  $\tilde{F}_0(x) = 0$ , falls  $x < 0$ . Außerdem ist  $P_0(T(X_1, \dots, X_n) < \infty) = 1$ , das heißt  $\tilde{F}_0^{-1}(\alpha) \in [0, \infty)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Die Gleichung (3.3) kann dann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$1 - \tilde{F}_0(K) + \gamma (\tilde{F}_0(K) - \tilde{F}_0(K-)) = \alpha, \quad (3.4)$$

wobei  $\tilde{F}_0(K-) = \lim_{x \rightarrow K-0} \tilde{F}_0(x)$ .

Sei  $K = \tilde{F}_0^{-1}(1 - \alpha)$ , dann gilt:

- (a) Falls  $K$  ein Stetigkeitspunkt von  $\tilde{F}_0$  ist, ist Gleichung (3.4) erfüllt für alle  $\gamma \in [0, 1]$ , zum Beispiel  $\gamma = 0$ .
- (b) Falls  $K$  kein Stetigkeitspunkt von  $\tilde{F}_0$  ist, dann ist  $\tilde{F}_0(K) - \tilde{F}_0(K-) > 0$ , woraus folgt

$$\gamma = \frac{\alpha - 1 + \tilde{F}_0(K)}{\tilde{F}_0(K) - \tilde{F}_0(K-)}$$

$\Rightarrow$  es gibt einen Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha$ .

2. Wir definieren  $M^\neq = \{x \in B : \varphi(x) \neq \varphi_K(x)\}$ . Es muss gezeigt werden, dass

$$\mu((K_0 \cup K_1) \cap M^\neq) = 0.$$

Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} E_1 \varphi(X_1, \dots, X_n) - E_1 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) &= 0 && (\varphi \text{ und } \varphi_K \text{ sind beste Tests}) \\ E_0 \varphi(X_1, \dots, X_n) - E_0 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) &\leq 0 && (\varphi \text{ und } \varphi_K \text{ sind } \alpha\text{-Tests} \\ &&& \text{mit Umfang von } \varphi_K = \alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_B (\varphi - \varphi_K) \cdot (f_1 - K \cdot f_0) \mu(dx) \geq 0.$$

In Bemerkung 3.3.6 wurde bewiesen, dass

$$\begin{aligned} \int_B (\varphi - \varphi_K)(f_1 - K \cdot f_0) d\mu &\leq 0 \\ \Rightarrow \int_B (\varphi - \varphi_K)(f_1 - K \cdot f_0) d\mu &= 0 = \int_{M^\# \cap (K_0 \cup K_1)} (\varphi - \varphi_K)(f_1 - K f_0) d\mu. \end{aligned}$$

Es gilt  $\mu(M^\# \cap (K_0 \cup K_1)) = 0$ , falls der Integrand  $(\varphi_K - \varphi)(f_1 - K f_0) > 0$  auf  $M^\#$  ist. Wir zeigen, dass

$$(\varphi_K - \varphi)(f_1 - K f_0) > 0 \text{ f\u00fcr } x \in M^\# \quad (3.5)$$

ist. Es gilt

$$\begin{aligned} f_1 - K f_0 > 0 &\Rightarrow \varphi_K - \varphi > 0, \\ f_1 - K f_0 < 0 &\Rightarrow \varphi_K - \varphi < 0, \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} f_1(x) > K f_0(x) &\Rightarrow \varphi_K(x) = 1 \\ &\text{und mit } \varphi(x) < 1 \Rightarrow \varphi_K(x) - \varphi(x) > 0 \text{ auf } M^\#. \\ f_1(x) < K f_0(x) &\Rightarrow \varphi_K(x) = 0 \\ &\text{und mit } \varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi_K(x) - \varphi(x) < 0 \text{ auf } M^\#. \end{aligned}$$

Daraus folgt die G\u00fcltigkeit der Ungleichung (3.5) und somit

$$\mu\left((K_0 \cup K_1) \cap M^\#\right) = 0.$$

□

**Bemerkung 3.3.8.** Falls  $\varphi$  und  $\varphi_K$  beste  $\alpha$ -Tests sind, dann sind sie  $P_0$ - bzw.  $P_1$ - fast sicher gleich.

**Beispiel 3.3.9** (Neyman-Pearson-Test f\u00fcr den Parameter der Poissonverteilung). Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe mit  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , wobei  $X_i$  unabh\u00e4ngig und identisch verteilt sind f\u00fcr  $i = 1, \dots, n$ . Wir testen die Hypothesen  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1 : \lambda = \lambda_1$ . Dabei ist

$$g_i(x) = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad i = 0, 1,$$

$$f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n g_i(x_j) = \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x_j}}{x_j!} = e^{-n\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i^{\sum_{j=1}^n x_j}}{(x_1! \cdot \dots \cdot x_n!)}$$

für  $i = 0, 1$ . Die Neyman-Pearson-Teststatistik ist

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot (\lambda_1/\lambda_0)^{\sum_{j=1}^n x_j}, & \text{falls } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Neyman-Pearson-Entscheidungsregel lautet

$$\varphi_K(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x_1, \dots, x_n) > K, \\ \gamma, & \text{falls } T(x_1, \dots, x_n) = K, \\ 0, & \text{falls } T(x_1, \dots, x_n) < K. \end{cases}$$

Wir wählen  $K > 0$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , sodass  $\varphi_K$  den Umfang  $\alpha$  hat. Dazu lösen wir

$$\alpha = P_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) + \gamma P_0(T(X_1, \dots, X_n) = K)$$

bezüglich  $\gamma$  und  $K$  auf.

$$\begin{aligned} P_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) &= \\ &= P_0(\log T(X_1, \dots, X_n) > \log K) \\ &= P_0\left(-n(\lambda_1 - \lambda_0) + \sum_{j=1}^n X_j \cdot \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > \log K\right) \\ &= P_0\left(\sum_{j=1}^n X_j > A_K\right) \end{aligned}$$

$$\text{wobei } A_K := \left\lfloor \frac{\log K + n \cdot (\lambda_1 - \lambda_0)}{\log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right\rfloor,$$

falls zum Beispiel  $\lambda_1 > \lambda_0$ . Im Falle  $\lambda_1 < \lambda_0$  ändert sich das  $>$  auf  $<$  in der Wahrscheinlichkeit.

Wegen der Faltungstabilität der Poissonverteilung ist unter  $H_0$

$$\sum_{j=1}^n X_j \sim \text{Poisson}(n\lambda_0),$$

also wählen wir  $K$  als minimale, nichtnegative Zahl für die gilt, dass

$$P_0\left(\sum_{j=1}^n X_j > A_K\right) \leq \alpha$$

und setzen

$$\gamma = \frac{\alpha - P_0(\sum_{j=1}^n X_j > A)}{P_0(\sum_{j=1}^n X_j = A)},$$

wobei

$$P_0 \left( \sum_{j=1}^n X_j > A \right) = 1 - \sum_{j=0}^A e^{-\lambda_0 n} \frac{(\lambda_0 n)^j}{j!},$$

$$P_0 \left( \sum_{j=1}^n X_j = A \right) = e^{-\lambda_0 n} \frac{(\lambda_0 n)^A}{A!}.$$

Somit haben wir die Parameter  $K$  und  $\gamma$  gefunden und damit einen Neyman-Pearson-Test  $\varphi_K$  konstruiert.

### 3.3.3 Einseitige Neyman-Pearson-Tests

Bisher betrachteten wir Neyman-Pearson-Tests für einfache Hypothesen der Form  $H_i : \theta = \theta_i, i = 0, 1$ . In diesem Abschnitt wollen wir einseitige Neyman-Pearson-Tests einführen, für Hypothesen der Form  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$ .

Zunächst konstruieren wir einen Test für diese Hypothesen: Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe,  $X_i$  seien unabhängig und identisch verteilt mit

$$X_i \sim F_\theta \in \Lambda = \{F_\theta : \theta \in \Theta\},$$

wobei  $\Theta \subset \mathbb{R}$  offen ist und  $\Lambda$  eindeutig parametrisiert, das heißt

$$\theta \neq \theta' \Rightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}.$$

Ferner besitze  $F_\theta$  eine Dichte  $g_\theta$  bezüglich des Lebesgue-Maßes (bzw. Zählmaßes) auf  $\mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{N}_0$ ). Dann ist

$$f_\theta(x) = \prod_{j=1}^n g_\theta(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

eine Dichte von  $(X_1, \dots, X_n)$  bezüglich  $\mu$  auf  $B$ .

**Definition 3.3.10.** Eine Verteilung auf  $B$  mit Dichte  $f_\theta$  gehört zur Klasse von *Verteilungen mit monotonen Dichtekoeffizienten* in  $T$ , falls es für alle  $\theta < \theta'$  eine Funktion  $h : \mathbb{R} \times \Theta^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ , die monoton wachsend in  $t \in \mathbb{R}$  ist und eine Statistik  $T : B \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, mit der Eigenschaft

$$\frac{f_{\theta'}(x)}{f_\theta(x)} = h(T(x), \theta, \theta'),$$

wobei

$$h(T(x), \theta, \theta') = \infty \quad \text{für alle } x \in B : f_\theta(x) = 0, f_{\theta'}(x) > 0.$$

Der Fall  $f_\theta(x) = f_{\theta'}(x) = 0$  tritt mit  $P_{\Theta}$ - bzw.  $P_{\Theta'}$ -Wahrscheinlichkeit 0 auf.

**Definition 3.3.11.** Es sei  $Q_\theta$  eine Verteilung auf  $(B, \mathcal{B})$  mit der Dichte  $f_\theta$  bzgl.  $\mu$ .  $Q_\theta$  gehört zur *einparametrischen Exponentialklasse* ( $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  offen), falls die Dichte folgende Form hat:

$$f_\theta(x) = \exp \{c(\theta) \cdot T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in B,$$

wobei  $c(\theta)$  eine monoton steigende Funktion ist, und  $\text{Var}_\theta T(X_1, \dots, X_n) > 0$ ,  $\theta \in \Theta$ .

**Lemma 3.3.12.** Verteilungen aus der einparametrischen Exponentialfamilie besitzen einen monotonen Dichtekoeffizienten.

**Beweis** Es sei  $Q_\theta$  aus der einparametrischen Exponentialfamilie mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \exp \{c(\theta) \cdot T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x).$$

Für  $\theta < \theta'$  ist dann

$$\frac{f_{\theta'}(x)}{f_\theta(x)} = \exp \{(c(\theta') - c(\theta)) \cdot T(x) + a(\theta') - a(\theta)\}$$

monoton bezüglich  $T$ , weil  $c(\theta') - c(\theta) > 0$  wegen der Monotonie von  $c(\theta)$ . Also besitzt  $f_\theta$  einen monotonen Dichtekoeffizienten.  $\square$

**Beispiel 3.3.13.**

1. *Normalverteilte Stichprobenvariablen*

Es seien  $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, mit unbekanntem Parameter  $\mu$  und bekannter Varianz  $\sigma_0^2$  (Hier wird  $\mu$  für die Bezeichnung des Erwartungswertes von  $X_i$  und nicht des Maßes auf  $\mathbb{R}$  verwendet. (wie früher)). Die Dichte des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ist gleich

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &= \prod_{i=1}^n g_\mu(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + \mu^2 n \right) \right\} \\ &= \exp \left( \underbrace{\frac{\mu}{\sigma_0^2}}_{c(\mu)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{T(x)} - \underbrace{\frac{\mu^2 n}{2\sigma_0^2}}_{a(\mu)} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \exp \left( -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma_0^2} \right)}_{l(x)}. \end{aligned}$$

Also gehört  $N(\mu, \sigma_0^2)$  zur einparametrischen Exponentialklasse mit  $c(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_0^2}$  und  $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ .

2. Binomialverteilte Stichprobenvariablen

Es seien  $X_i \sim \text{Bin}(k, p)$  unabhängig und identisch verteilt,  $i = 1, \dots, n$ . Der Parameter  $p$  sei unbekannt. Die Zähldichte des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ist

$$\begin{aligned} f_p(x) &= P_p(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \frac{(1-p)^{nk}}{(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} \\ &= \exp \left\{ \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}_{T(x)} \cdot \underbrace{\log \left( \frac{p}{1-p} \right)}_{c(p)} + \underbrace{nk \cdot \log(1-p)}_{a(p)} \right\} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i}}_{l(x)}, \end{aligned}$$

also gehört  $\text{Bin}(n, p)$  zur einparametrischen Exponentialklasse mit

$$c(p) = \log \left( \frac{p}{1-p} \right)$$

und

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

**Lemma 3.3.14.** Falls  $\varphi_K$  der Neyman-Pearson-Test der Hypothesen  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta = \theta_1$  ist, dann gilt:

$$\mu^n(\underbrace{\{x \in B : f_1(x) \neq K f_0(x)\}}_{K_0 \cup K_1}) > 0.$$

**Beweis** Wegen  $\theta_0 \neq \theta_1$  und der eindeutigen Parametrisierung gilt  $f_0 \neq f_1$  auf einer Menge mit  $\mu$ -Maß  $> 0$ .

Nun sei  $\mu(K_0 \cup K_1) = 0$ . Daraus folgt, dass  $f_1(x) = K \cdot f_0(x)$   $\mu$ -fast sicher. Das heißt

$$1 = \int_B f_1(x) dx = K \cdot \int_B f_0(x) dx,$$

woraus folgt, dass  $K = 1$  und  $f_1(x) = f_0(x)$   $\mu$ -fast sicher, was aber ein Widerspruch zur eindeutigen Parametrisierung ist.  $\square$

Im Folgenden sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $X_i \sim$  Dichte  $g_\theta$ ,  $i = 1, \dots, n$  und

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Dichte } f_\theta(x) = \prod_{i=1}^n g_\theta(x_i)$$

aus der Klasse der Verteilungen mit monotonen Dichtekoeffizienten und einer Statistik  $T(X_1, \dots, X_n)$ .

Wir betrachten die Hypothesen  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$  und den Neyman-Pearson-Test:

$$\varphi_{K^*}^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > K^*, \\ \gamma^*, & \text{falls } T(x) = K^*, \\ 0, & \text{falls } T(x) < K^* \end{cases} \quad (3.6)$$

für  $K^* \in \mathbb{R}$  und  $\gamma^* \in [0, 1]$ . Die Gütefunktion von  $\varphi_{K^*}^*$  bei  $\theta_0$  ist

$$G_n(\theta_0) = E_0 \varphi_{K^*}^* = P_0(T(X_1, \dots, X_n) > K^*) + \gamma^* \cdot P_0(T(X_1, \dots, X_n) = K^*)$$

**Satz 3.3.15.**

1. Falls  $\alpha = E_0 \varphi_{K^*}^* > 0$ , dann ist der soeben definierte Neyman-Pearson-Test ein bester Test der einseitigen Hypothesen  $H_0$  vs.  $H_1$  zum Niveau  $\alpha$ .
2. Zu jedem Konfidenzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  gibt es ein  $K^* \in \mathbb{R}$  und  $\gamma^* \in [0, 1]$ , sodass  $\varphi_{K^*}^*$  ein bester Test zum Umfang  $\alpha$  ist.
3. Die Gütefunktion  $G_n(\theta)$  von  $\varphi_{K^*}^*(\theta)$  ist monoton wachsend in  $\theta$ . Falls  $0 < G_n(\theta) < 1$ , dann ist sie sogar streng monoton wachsend.

**Beweis** 1. Wähle  $\theta_1 > \theta_0$  und betrachte die einfachen Hypothesen  $H'_0 : \theta = \theta_0$  und  $H'_1 : \theta = \theta_1$ . Sei

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} 1, & f_1(x) > K f_0(x), \\ \gamma, & f_1(x) = K f_0(x), \\ 0, & f_1(x) < K f_0(x) \end{cases}$$

der Neyman-Pearson-Test für  $H'_0, H'_1$  mit  $K > 0$ . Da  $f_\theta$  den monotonen Dichtekoeffizienten mit Statistik  $T$  besitzt,

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = h(T(x), \theta_0, \theta_1),$$

existiert ein  $K > 0$ , so dass

$$\left\{ x : \begin{array}{l} f_1(x)/f_0(x) > K \\ < K \end{array} \right\} \subset \left\{ T(x) \begin{array}{l} > K^* \\ < K^* \end{array} \right\} \quad \text{mit } K = h(K^*, \theta_0, \theta_1).$$

$\varphi_K$  ist ein bester Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi_K = \mathbb{E}_0 \varphi_{K^*}$ . Aus  $\alpha > 0$  folgt  $K < \infty$ , denn aus  $K = \infty$  würde folgen

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &= \mathbb{E}_0 \varphi_K \leq P_0(T(X_1, \dots, X_n) \geq K^*) \\ &\leq P_0\left(\frac{f_1(X_1, \dots, X_n)}{f_0(X_1, \dots, X_n)} = \infty\right) \\ &= P_0(f_1(X_1, \dots, X_n) > 0, f_0(X_1, \dots, X_n) = 0) \\ &= \int_B I(f_1(x) > 0, f_0(x) = 0) \cdot f_0(x) \mu(dx) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für den Test  $\varphi_{K^*}^*$  aus (3.6) gilt dann

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x)/f_0(x) > K, \\ \gamma^*(x), & \text{falls } f_1(x)/f_0(x) = K, \\ 0, & \text{falls } f_1(x)/f_0(x) < K, \end{cases}$$

wobei  $\gamma^*(x) \in \{\gamma^*, 0, 1\}$ . Daraus folgt, dass  $\varphi_{K^*}^*$  ein bester Neyman-Pearson-Test ist für  $H_0'$  vs.  $H_1'$  (vergleiche Bemerkung 3.3.4, 1.) und Bemerkung 3.3.6) für beliebige  $\theta_1 > \theta_0$ . Deshalb ist  $\varphi_{K^*}^*$  ein bester Neyman-Pearson-Test für  $H_0'' : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1'' : \theta > \theta_0$  ist.

Die selbe Behauptung erhalten wir aus dem Teil 3. des Satzes für  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$ , weil dann  $G_n(\theta) \leq G_n(\theta_0) = \alpha$  für alle  $\theta < \theta_0$ .

2. Siehe Beweis zu Satz 3.3.7, 1.).
3. Wir müssen zeigen, dass  $G_n(\theta)$  monoton ist. Dazu wählen wir  $\theta_1 < \theta_2$  und zeigen, dass  $\alpha_1 = G_n(\theta_1) \leq G_n(\theta_2)$ . Wir betrachten die neuen, einfachen Hypothesen  $H_0'' : \theta = \theta_1$  vs.  $H_1'' : \theta = \theta_2$ . Der Test  $\varphi_{K^*}^*$  kann genauso wie in 1. als Neyman-Pearson-Test dargestellt werden (für die Hypothesen  $H_0''$  und  $H_1''$ ), der ein bester Test zum Niveau  $\alpha_1$  ist. Betrachten wir einen weiteren konstanten Test  $\varphi(x) = \alpha_1$ . Dann ist  $\alpha_1 = \mathbb{E}_{\theta_2} \varphi \leq \mathbb{E}_{\theta_2} \varphi_{K^*}^* = G_n(\theta_2)$ . Daraus folgt, dass  $G_n(\theta_1) \leq G_n(\theta_2)$ . Nun zeigen wir, dass für  $G_n(\theta) \in (0, 1)$  gilt:  $G_n(\theta_1) < G_n(\theta_2)$ . Wir nehmen an, dass  $\alpha_1 = G_n(\theta_1) = G_n(\theta_2)$  und  $\theta_1 < \theta_2$  für  $\alpha \in (0, 1)$ .

Es folgt, dass  $\varphi(x) = \alpha_1$  auch ein bester Test für  $H_0''$  und  $H_1''$  ist. Aus Satz 3.3.7, 2.) folgt

$$\mu^n(\{x \in B : \underbrace{\varphi(x)}_{=\alpha_1} \neq \varphi_{K^*}^*(x)\}) = 0 \text{ auf } K_0 \cup K_1 = \{f_1(x) \neq Kf_0(x)\},$$

was ein Widerspruch zur Bauart des Tests  $\varphi_{K^*}$  ist, der auf  $K_0 \cup K_1$  nicht gleich  $\alpha_1 \in (0, 1)$  sein kann. □

**Bemerkung 3.3.16.**

1. Der Satz 3.3.15 ist genauso auf Neyman-Pearson-Tests der einseitigen Hypothesen

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta < \theta_0$$

anwendbar, mit dem entsprechenden Unterschied

$$\theta \mapsto -\theta$$

$$T \mapsto -T$$

Somit existiert der beste  $\alpha$ -Test auch in diesem Fall.

2. Man kann zeigen, dass die Gütefunktion  $G_n(\varphi_{K^*}^*, \theta)$  des besten Neyman-Pearson-Tests auf  $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0)$  folgende Minimalitätseigenschaft besitzt:

$$G_n(\varphi_{K^*}^*, \theta) \leq G_n(\varphi, \theta) \quad \forall \varphi \in \Psi(\alpha), \theta \leq \theta_0$$

**Beispiel 3.3.17.** Betrachten eine normalverteilte Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$ , wobei  $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$  und  $\sigma_0^2$  sei bekannt. Es werden die Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu > \mu_0,$$

getestet. Aus Beispiel 3.1.7 kennen wir die Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0},$$

wobei unter  $H_0$  gilt:  $T(X_1, \dots, X_n) \sim N(0, 1)$ .  $H_0$  wird verworfen, falls

$$T(X_1, \dots, X_n) > z_{1-\alpha}, \quad \text{wobei } \alpha \in (0, 1).$$

Wir zeigen, dass dieser Test der beste Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha$  ist. Aus Beispiel 3.3.13 ist bekannt, dass die Dichte  $f_n$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  aus der einparametrischen Exponentialklasse ist, mit

$$\tilde{T}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Dann gehört  $f_\mu$  von  $(x_1, \dots, x_n)$  zur einparametrischen Exponentialklasse auch bezüglich der Statistik

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0}$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &= \exp\left(\underbrace{\frac{\mu}{\sigma_0^2}}_{c(\mu)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{\dot{T}} - \underbrace{\frac{\mu^2 n}{2\sigma_0^2}}_{a(\mu)}\right) \cdot l(x) \\ &= \exp\left(\underbrace{\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma_0}}_{c(\mu)} \cdot \underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma_0}}_T + \underbrace{\frac{\mu^2 n}{2\sigma_0^2}}_{a(\mu)}\right) \cdot l(x). \end{aligned}$$

Die Statistik  $T$  kann also in der Konstruktion des Neyman-Pearson-Tests (Gleichung (3.6)) verwendet werden:

$$\varphi_{K^*}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > z_{1-\alpha}, \\ 0, & \text{falls } T(x) = z_{1-\alpha}, \\ 0, & \text{falls } T(x) < z_{1-\alpha} \end{cases}$$

(mit  $K^* = z_{1-\alpha}$  und  $\gamma^* = 0$ ). Nach Satz 3.3.15 ist dieser Test der beste Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha$  für unsere Hypothesen:

$$\begin{aligned} G_n(\varphi_{K^*}, \mu_0) &= P_0(T(X_1, \dots, X_n) > z_{1-\alpha}) + 0 \cdot P_0(T(X_1, \dots, X_n) \leq z_{1-\alpha}) \\ &= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

### 3.3.4 Unverfälschte zweiseitige Tests

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^n g_\theta(x_i).$$

Es wird ein zweiseitiger Test der Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

betrachtet. Für alle  $\alpha \in (0, 1)$  kann es jedoch keinen besten Test  $\varphi$  zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  vs.  $H_1$  geben. Denn, nehmen wir an,  $\varphi$  wäre der beste Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  vs.  $H_1$ , dann wäre  $\varphi$  der beste Test für die Hypothesen

1.  $H'_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H'_1 : \theta > \theta_0$

2.  $H_0'' : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1'' : \theta < \theta_0$ .

Dann ist nach Satz 3.3.15, 3. die Gütefunktion

1.  $G_n(\varphi, \theta) < \alpha$  auf  $\theta < \theta_0$ , bzw.
2.  $G_n(\varphi, \theta) > \alpha$  auf  $\theta < \theta_0$ ,

was ein Widerspruch ist!

Darum werden wir die Klasse aller möglichen Tests auf unverfälschte Tests (Definition 3.1.12) eingrenzen. Der Test  $\varphi$  ist unverfälscht genau dann, wenn

$$\begin{aligned} G_n(\varphi, \theta) &\leq \alpha \text{ für } \theta \in \Theta_0 \\ G_n(\varphi, \theta) &\geq \alpha \text{ für } \theta \in \Theta_1 \end{aligned}$$

**Beispiel 3.3.18.**

1.  $\varphi(x) \equiv \alpha$  ist unverfälscht.
2. Der zweiseitige Gauss-Test ist unverfälscht, vergleiche Beispiel 3.1.7:  
 $G_n(\varphi, \mu) \geq \alpha$  für alle  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Im Folgenden seien  $X_i$  unabhängig und identisch verteilt. Die Dichte  $f_\theta$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  gehöre zur einparametrischen Exponentialklasse:

$$f_\theta(x) = \exp \{c(\theta) \cdot T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x), \quad (3.7)$$

wobei  $c(\theta)$  und  $a(\theta)$  stetig differenzierbar auf  $\Theta$  sein sollen, mit

$$c'(\theta) > 0 \quad \text{und} \quad \text{Var}_\theta T(X_1, \dots, X_n) > 0$$

für alle  $\theta \in \Theta$ . Sei  $f_\theta(x)$  stetig in  $(x, \theta)$  auf  $B \times \Theta$ .

**Übungsaufgabe 3.3.19.** Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$a'(\theta) = -c'(\theta) \text{E}_\theta T(X_1, \dots, X_n).$$

**Lemma 3.3.20.** Es sei  $\varphi$  ein unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  für

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Dann gilt:

1.  $\alpha = \text{E}_0 \varphi(X_1, \dots, X_n) = G_n(\varphi, \theta_0)$
2.  $\text{E}_0 [T(X_1, \dots, X_n) \varphi(X_1, \dots, X_n)] = \alpha \cdot \text{E}_0 T(X_1, \dots, X_n)$

**Beweis**

1. Die Gütefunktion von  $\varphi$  ist

$$G_n(\varphi, \theta) = \int_B \varphi(x) f_\theta(x) \mu_n(dx)$$

Da  $f_\theta$  aus der einparametrischen Exponentialklasse ist, ist  $G_n(\varphi, \theta)$  differenzierbar (unter dem Integral) bezüglich  $\theta$  und somit stetig in  $\theta$ . Wegen der Unverfälschtheit von  $\varphi$  gilt

$$G_n(\varphi, \theta_0) \leq \alpha, \quad G_n(\varphi, \theta) \geq \alpha, \quad \theta \neq \theta_0$$

und daraus folgt  $G_n(\varphi, \theta_0) = \alpha$  und  $\theta_0$  ist ein Minimumpunkt von  $G_n$ . Somit ist 1) bewiesen.

2. Da  $\theta_0$  der Minimumpunkt von  $G_n$  ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= G'_n(\varphi, \theta_0) = \int_B \varphi(x) (c'(\theta_0)T(x) + a'(\theta_0)) f_0(x) \mu(dx) \\ &= c'(\theta_0) \cdot E_0 [\varphi(X_1, \dots, X_n)T(X_1, \dots, X_n)] + a'(\theta_0) \cdot G_n(\varphi, \theta_0) \\ &= c'(\theta_0) \cdot E_0 [\varphi(X_1, \dots, X_n)T(X_1, \dots, X_n)] + \alpha a'(\theta_0) \\ &\stackrel{\text{(Übung 3.3.19)}}{=} c'(\theta_0) (E_0(\varphi \cdot T) - \alpha E_0 T) \end{aligned}$$

Daraus folgt  $E_0(\varphi T) = \alpha E_0 T$  und damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir definieren jetzt die modifizierten Neyman-Pearson-Tests für einfache Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H'_1 : \theta = \theta_1, \quad \theta_1 \neq \theta_0.$$

Für  $\lambda, K \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma : B \rightarrow [0, 1]$  definieren wir

$$\varphi_{K,\lambda}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x) > (K + \lambda T(x)) f_0(x), \\ \gamma(x), & \text{falls } f_1(x) = (K + \lambda T(x)) f_0(x), \\ 0, & \text{falls } f_1(x) < (K + \lambda T(x)) f_0(x), \end{cases} \quad (3.8)$$

wobei  $T(x)$  die Statistik aus der Darstellung (3.7) ist.

Es sei  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  die Klasse aller Tests, die Aussagen 1) und 2) des Lemmas 3.3.20 erfüllen. Aus Lemma 3.3.20 folgt dann, dass die Menge der unverfälschten Tests zum Niveau  $\alpha$  eine Teilmenge von  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  ist.

**Satz 3.3.21.** Der modifizierte Neyman-Pearson-Test  $\varphi_{K,\lambda}$  ist der beste  $\alpha$ -Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  für Hypothesen  $H_0$  vs.  $H'_1$  zum Niveau  $\alpha = E_0 \varphi_{K,\lambda}$ , falls  $\varphi_{K,\lambda} \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ .

**Beweis** Es ist zu zeigen, dass  $E_1 \varphi_{K,\lambda} \geq E_1 \varphi$  für alle  $\varphi \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ , bzw.  $E_1(\varphi_{K,\lambda} - \varphi) \geq 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} E_1(\varphi_{K,\lambda} - \varphi) &= \int_B (\varphi_{K,\lambda}(x) - \varphi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\ &\stackrel{(\text{Bem. 3.3.6, 2.})}{\geq} \int_B (\varphi_{K,\lambda}(x) - \varphi(x)) (K + \lambda T(x)) f_0(x) \mu(dx) \\ &= K \left( \underbrace{E_0 \varphi_{K,\lambda}}_{=\alpha} - \underbrace{E_0 \varphi}_{=\alpha} \right) + \lambda \left( \underbrace{E_0(\varphi_{K,\lambda} \cdot T)}_{=\alpha E_0 T} - \underbrace{E_0(\varphi \cdot T)}_{=\alpha \cdot E_0 T} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

weil  $\varphi, \varphi_{K,\lambda} \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ . □

Wir definieren folgende Entscheidungsregel, die später zum Testen der zweiseitigen Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

verwendet wird:

$$\varphi_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) \notin (c_1, c_2), \\ \gamma_1, & \text{falls } T(x) = c_1, \\ \gamma_2, & \text{falls } T(x) = c_2, \\ 0, & \text{falls } T(x) \in (c_1, c_2), \end{cases} \quad (3.9)$$

für  $c_1 \leq c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$  und die Statistik  $T(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$ , die in der Dichte (3.7) vorkommt. Zeigen wir, dass  $\varphi_c$  sich als modifizierter Neyman-Pearson-Test schreiben lässt.

Für die Dichte

$$f_\theta(x) = \exp\{c(\theta)T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x)$$

wird (wie immer) vorausgesetzt, dass  $l(x) > 0$ ,  $c'(\theta) > 0$  und  $a'(\theta)$  existiert für  $\theta \in \Theta$ .

**Lemma 3.3.22.** Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte  $f_\theta(x)$ ,  $x \in B$ , die zur einparametrischen Exponentialfamilie gehört. Sei  $T(x)$  die dazugehörige Statistik, die im Exponenten der Dichte  $f_\theta$  vorkommt. Für beliebige reelle Zahlen  $c_1 \leq c_2$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$  und Parameterwerte  $\theta_0, \theta_1 \in \Theta : \theta_0 \neq \theta_1$  lässt sich der Test  $\varphi_c$  aus (3.9) als modifizierter Neyman-Pearson-Test  $\varphi_{K,\lambda}$  aus (3.8) mit gegebenen  $K, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(x) \in [0, 1]$  schreiben.

**Beweis** Falls wir die Bezeichnung

$$f_{\theta_i}(x) = f_i(x), \quad i = 0, 1$$

verwenden, dann gilt

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \exp \left\{ \underbrace{(c(\theta_1) - c(\theta_0))}_{c} T(x) + \underbrace{a(\theta_1) - a(\theta_0)}_a \right\},$$

und somit

$$\{x \in B : f_1(x) > (K + \lambda T(x)) f_0(x)\} = \{x \in B : \exp(cT(x) + a) > K + \lambda T(x)\}.$$

Finden wir solche  $K$  und  $\lambda$  aus  $\mathbb{R}$ , für die die Gerade  $K + \lambda t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  die konvexe Kurve  $\exp\{ct + a\}$  genau an den Stellen  $c_1$  und  $c_2$  schneidet (falls  $c_1 \neq c_2$ ) bzw. an der Stelle  $t = c_1$  berührt (falls  $c_1 = c_2$ ). Dies ist immer möglich, siehe Abbildung 3.3.4.

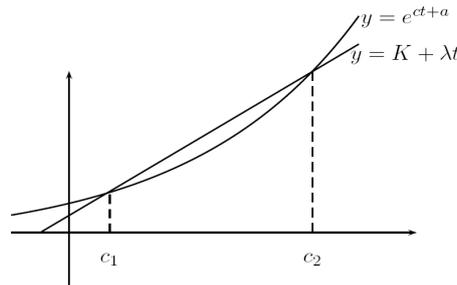


Abbildung 3.6: Schnittpunkt einer Geraden mit einer konvexen Kurve

Ferner setzen wir  $\gamma(x) = \gamma_i$  für  $\{x \in B : T(x) = c_i\}$ . Insgesamt gilt dann

$$\{x : \exp(cT(x) + a) > K + \lambda T(x)\} = \{x : T(x) \notin [c_1, c_2]\}$$

und

$$\{x : \exp(cT(x) + a) < K + \lambda T(x)\} = \{x : T(x) \in (c_1, c_2)\}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

**Bemerkung 3.3.23.**

1. Die Umkehrung des Lemmas stimmt nicht, denn bei vorgegebenen Kurven  $y = K + \lambda t$  und  $y = \exp\{ct + a\}$  muss es die Schnittpunkte  $c_1$  und  $c_2$  nicht unbedingt geben. So kann die Gerade vollständig unter der Kurve  $y = \exp\{ct + a\}$  liegen.
2. Der Test  $\varphi_c$  macht von den Werten  $\theta_0$  und  $\theta_1$  nicht explizit Gebrauch. Dies unterscheidet ihn vom Test  $\varphi_{K,\lambda}$ , für den die Dichten  $f_0$  und  $f_1$  gebraucht werden.

Jetzt sind wir bereit, den Hauptsatz über zweiseitige Tests zum Prüfen der Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

zu formulieren und zu beweisen.

**Satz 3.3.24.** (Hauptsatz über zweiseitige Tests)

Unter den Voraussetzungen des Lemmas 3.3.22 sei  $\varphi_c$  ein Test aus (3.9), für den  $\varphi_c \in \tilde{\Psi}(\alpha)$  gilt. Dann ist  $\varphi_c$  bester unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  (und dadurch bester Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$ ) der Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

**Beweis** Wählen wir ein beliebiges  $\theta_1 \in \Theta$ ,  $\theta_1 \neq \theta_0$ . Nach Lemma 3.3.22 ist  $\varphi_c$  ein modifizierter Neyman-Pearson-Test  $\varphi_{K,\lambda}$  für eine spezielle Wahl von  $K$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\varphi_{K,\lambda}$  ist aber nach Satz 3.3.21 bester Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  für  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1' : \theta = \theta_1$ . Da  $\varphi_c$  nicht von  $\theta_1$  abhängt, ist es bester Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  für  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Da unverfälschte Niveau- $\alpha$ -Tests in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  liegen, müssen wir nur zeigen, dass  $\varphi_c$  unverfälscht ist. Da  $\varphi_c$  der beste Test ist, ist er nicht schlechter als der konstante unverfälschte Test  $\varphi = \alpha$ , das heißt

$$G_n(\varphi_c, \theta) \geq G_n(\varphi, \theta) = \alpha, \quad \theta \neq \theta_0.$$

Somit ist auch  $\varphi_c$  unverfälscht. Der Beweis ist beendet.  $\square$

**Bemerkung 3.3.25.** Wir haben gezeigt, dass  $\varphi_c$  der beste Test seines Umfangs ist. Es wäre jedoch noch zu zeigen, dass für beliebiges  $\alpha \in (0, 1)$  Konstanten  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  gefunden werden, für die  $E_0 \varphi_c = \alpha$  gilt. Da der Beweis schwierig ist, wird er hier ausgelassen. Im folgenden Beispiel jedoch wird es klar, wie die Parameter  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  zu wählen sind.

**Beispiel 3.3.26** (Zweiseitiger Gauß-Test). Im Beispiel 3.1.7 haben wir folgenden Test des Erwartungswertes der normalverteilten Stichprobe  $X$  gegeben durch  $X = (X_1, \dots, X_n)$  mit unabhängigen und identisch verteilten  $X_i$  und  $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$  bei bekannten Varianzen  $\sigma_0^2$  betrachtet. Getestet werden die Hypothesen

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Der Test  $\varphi(x)$  lautet

$$\varphi(x) = I\left(x \in \mathbb{R}^n : |T(x)| > z_{1-\alpha/2}\right),$$

wobei

$$T(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0}.$$

Zeigen wir, dass  $\varphi$  der beste Test zum Niveau  $\alpha$  in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  (und somit bester unverfälschter Test) ist. Nach Satz 3.3.24 müssen wir lediglich prüfen, dass  $\varphi$  als  $\varphi_c$  mit (3.9) dargestellt werden kann, weil die  $n$ -dimensionale Normalverteilung mit Dichte  $f_\mu$  (siehe Beispiel 3.3.17) zu der einparametrischen Exponentialfamilie mit Statistik

$$T(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma_0}$$

gehört. Setzen wir  $c_1 = z_{1-\alpha/2}$ ,  $c_2 = -z_{1-\alpha/2}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Damit ist

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |T(x)| > z_{1-\alpha/2}, \\ 0, & \text{falls } |T(x)| \leq z_{1-\alpha/2}. \end{cases}$$

und die Behauptung ist bewiesen, weil aus der in Beispiel 3.1.7 ermittelten Gütefunktion  $G_n(\varphi, \theta)$  von  $\varphi$  ersichtlich ist, dass  $\varphi$  ein unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  ist (und somit  $\varphi \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ ).

**Bemerkung 3.3.27.** Bisher haben wir immer vorausgesetzt, dass nur *ein* Parameter der Verteilung der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  unbekannt ist, um die Theorie des Abschnittes 1.3 über die besten (Neyman-Pearson-) Tests im Fall der einparametrischen Exponentialfamilie aufstellen zu können. Um jedoch den Fall weiterer unbekannter Parameter betrachten zu können (wie im Beispiel der zweiseitigen Tests des Erwartungswertes der normalverteilten Stichprobe bei unbekannter Varianz (der sog. *t*-Test, vergleiche Abschnitt 1.2.1, 1 (a)), bedarf es einer tiefergehenden Theorie, die aus Zeitgründen in dieser Vorlesung nicht behandelt wird. Der interessierte Leser findet das Material dann im Buch [26].

### 3.4 Anpassungstests

Sei eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen  $(X_1, \dots, X_n)$  gegeben mit  $X_i \sim F$  (Verteilungsfunktion) für  $i = 1, \dots, n$ . Bei den Anpassungstests wird die Hypothese

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0$$

überprüft, wobei  $F_0$  eine vorgegebene Verteilungsfunktion ist.

Einen Test aus dieser Klasse haben wir bereits in der Vorlesung Stochastik I kennengelernt: den Kolmogorow-Smirnov-Test (vgl. Bemerkung 7.6.8 ElemWR).

Jetzt werden weitere nichtparametrische Anpassungstests eingeführt. Der erste ist der  $\chi^2$ -Anpassungstest von K. Pearson.

### 3.4.1 $\chi^2$ -Anpassungstest

Der Test von Kolmogorov-Smirnov basiert auf dem Abstand

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} | \hat{F}_n(x) - F_0(x) |$$

zwischen der empirischen Verteilungsfunktion der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  und der Verteilungsfunktion  $F_0$ . In der Praxis jedoch erscheint dieser Test zu feinfühlig, denn er ist zu sensibel gegenüber Unregelmäßigkeiten in den Stichproben und verwirft  $H_0$  zu oft. Einen Ausweg aus dieser Situation stellt die Vergrößerung der Haupthypothese  $H_0$  dar, auf welcher der folgende  $\chi^2$ -Anpassungstest beruht.

Man zerlegt den Wertebereich der Stichprobenvariablen  $X_i$  in  $r$  Klassen  $(a_j, b_j]$ ,  $j = 1, \dots, r$  mit der Eigenschaft

$$-\infty \leq a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots = a_r < b_r \leq \infty.$$

Anstelle von  $X_i, i = 1, \dots, n$  betrachten wir die sogenannten *Klassenstärken*  $Z_j, j = 1, \dots, r$ , wobei

$$Z_j = \#\{i : a_j < X_i \leq b_j, 1 \leq i \leq n\}.$$

**Lemma 3.4.1.** Der Zufallsvektor  $Z = (Z_1, \dots, Z_r)^\top$  ist *multinomialverteilt* mit Parametervektor

$$p = (p_1, \dots, p_{r-1})^\top \in [0, 1]^{r-1},$$

wobei

$$p_j = P(a_j < X_1 \leq b_j) = F(b_j) - F(a_j), \quad j = 1, \dots, r-1, \quad p_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} p_j.$$

Schreibweise:

$$Z \sim M_{r-1}(n, p)$$

**Beweis** Es ist zu zeigen, dass für alle Zahlen  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$  mit  $k_1 + \dots + k_r = n$  gilt:

$$P(Z_i = k_i, i = 1, \dots, r) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}. \quad (3.10)$$

Da  $X_i$  unabhängig und identisch verteilt sind, gilt

$$P\left(X_j \in (a_{i_j}, b_{i_j}], j = 1, \dots, n\right) = \prod_{j=1}^n P\left(a_{i_j} < X_1 \leq b_{i_j}\right) = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r},$$

falls die Folge von Intervallen  $(a_{i_j}, b_{i_j}]_{j=1, \dots, n}$  das Intervall  $(a_i, b_i]$   $k_i$  Mal enthält,  $i = 1, \dots, r$ . Die Formel (3.10) ergibt sich aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit als Summe über die Permutationen von Folgen  $(a_{i_j}, b_{i_j}]_{j=1, \dots, n}$  dieser Art.  $\square$

Im Sinne des Lemmas 3.4.1 werden neue Hypothesen über die Beschaffenheit von  $F$  geprüft.

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs. } H_1 : p \neq p_0,$$

wobei  $p = (p_1, \dots, p_{r-1})^\top$  der Parametervektor der Multinomialverteilung von  $Z$  ist, und  $p_0 = (p_{01}, \dots, p_{0,r-1})^\top \in (0, 1)^{r-1}$  mit  $\sum_{i=1}^{r-1} p_{0i} < 1$ . In diesem Fall ist

$$\Lambda_0 = \{F \in \Lambda : F(b_j) - F(a_j) = p_{0j}, \quad j = 1, \dots, r-1\},$$

$\Lambda_1 = \Lambda \setminus \Lambda_0$ , wobei  $\Lambda$  die Menge aller Verteilungsfunktionen ist. Um  $H_0$  vs.  $H_1$  zu testen, führen wir die *Pearson-Teststatistik*

$$T_n(x) = \sum_{j=1}^r \frac{(z_j - np_{0j})^2}{np_{0j}}$$

ein, wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Stichprobe der Daten ist und  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  ihre Klassenstärken sind.

Unter  $H_0$  gilt

$$E Z_j = np_{0j}, \quad j = 1, \dots, r,$$

somit soll  $H_0$  abgelehnt werden, falls  $T_n(X)$  ungewöhnlich große Werte annimmt.

Im nächsten Satz zeigen wir, dass  $T(X_1, \dots, X_n)$  asymptotisch (für  $n \rightarrow \infty$ )  $\chi_{r-1}^2$ -verteilt ist, was zu folgendem Anpassungstest ( $\chi^2$ -Anpassungstest) führt:

$$H_0 \text{ wird verworfen, falls } T_n(x_1, \dots, x_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2.$$

Dieser Test ist nach seinem Entdecker *Karl Pearson* (1857-1936) benannt worden.

**Satz 3.4.2.** Unter  $H_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{p_0} \left( T_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2 \right) = \alpha, \quad \alpha \in (0, 1),$$

das heißt, der  $\chi^2$ -Pearson-Test ist ein asymptotischer Test zum Niveau  $\alpha$ .

**Beweis** Führen wir die Bezeichnung  $Z_{nj} = Z_j(X_1, \dots, X_n)$  der Klassenstärken ein, die aus der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  entstehen. Nach Lemma 3.4.1 ist

$$Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{nr}) \sim M_{r-1}(n, p_0) \text{ unter } H_0.$$

Inbesondere soll  $E Z_{nj} = np_{0j}$  und

$$\text{Cov}(Z_{ni}, Z_{nj}) = \begin{cases} np_{0j}(1 - p_{0j}), & i = j, \\ -np_{0i}p_{0j}, & i \neq j \end{cases}$$

für alle  $i, j = 1, \dots, r$  gelten. Da

$$Z_{nj} = \sum_{i=1}^n I(a_j < X_i \leq b_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

ist  $Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{n,r-1})$  eine Summe von  $n$  unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren  $Y_i \in \mathbb{R}^{r-1}$  mit Koordinaten  $Y_{ij} = I(a_j < X_i \leq b_j)$ ,  $j = 1, \dots, r-1$ . Daher gilt nach dem multivariaten Grenzwertsatz (der in Lemma 3.4.3 bewiesen wird), dass

$$Z'_n = \frac{Z_n - E Z_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - nE Y_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, K),$$

mit  $N(0, K)$  eine  $(r-1)$ -dimensionale multivariate Normalverteilung (vergleiche Vorlesungsskript WR, Beispiel 3.4.1. 3.) mit Erwartungswertvektor Null und Kovarianzmatrix  $K = (\sigma_{ij}^2)$ , wobei

$$\sigma_{ij}^2 = \begin{cases} -p_{0i}p_{0j}, & i \neq j, \\ p_{0i}(1 - p_{0j}), & i = j \end{cases}$$

für  $i, j = 1, \dots, r-1$  ist. Diese Matrix  $K$  ist invertierbar mit  $K^{-1} = A = (a_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p_{0r}}, & i \neq j, \\ \frac{1}{p_{0i}} + \frac{1}{p_{0r}}, & i = j. \end{cases}$$

Außerdem ist  $K$  (als Kovarianzmatrix) symmetrisch und positiv definit. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass es eine invertierbare  $(r-1) \times (r-1)$ -Matrix  $A^{1/2}$  gibt, mit der Eigenschaft  $A = A^{1/2}(A^{1/2})^\top$ . Daraus folgt,

$$K = A^{-1} = ((A^{1/2})^\top)^{-1} \cdot (A^{1/2})^{-1}.$$

Wenn wir  $(A^{1/2})^\top$  auf  $Z'_n$  anwenden, so bekommen wir

$$(A^{1/2})^\top \cdot Z'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (A^{1/2})^\top \cdot Y,$$

wobei

$$(A^{1/2})^\top \cdot Y \sim N\left(0, (A^{1/2})^\top \cdot K \cdot A^{1/2}\right) = N(0, \mathcal{I}_{r-1})$$

nach der Eigenschaft der multivariaten Normalverteilung, die im Kapitel 4, Satz 4.1.12 behandelt wird. Des Weiteren wurde hier der Stetigkeitssatz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt, dass

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \implies \varphi(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \varphi(Y)$$

für beliebige Zufallsvektoren  $\{Y_n\}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$  und stetige Abbildungen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diesen Satz haben wir in WR für Zufallsvariablen bewiesen (Satz 6.4.3, Vorlesungsskript WR). Die erneute Anwendung des Stetigkeitssatzes ergibt

$$\left| (A^{1/2})^\top Z'_n \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} |Y|^2 = R \sim \chi_{r-1}^2.$$

Zeigen wir, dass

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \left| (A^{1/2})^\top Z'_n \right|^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| (A^{1/2})^\top Z'_n \right|^2 &= ((A^{1/2})^\top Z'_n)^\top ((A^{1/2})^\top Z'_n) \\ &= Z_n'^\top \cdot \underbrace{A^{1/2} \cdot (A^{1/2})^\top}_A Z'_n = Z_n'^\top A Z'_n \\ &= n \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{p_{0j}} \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right)^2 + \frac{n}{p_{0r}} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \left( \frac{Z_{ni}}{n} - p_{0i} \right) \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} + \frac{n}{p_{0r}} \left( \sum_{j=1}^{r-1} \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} + \frac{n}{p_{0r}} \left( \frac{Z_{nr}}{n} - p_{0r} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} = T_n(X_1, \dots, X_n), \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-1} Z_{nj} &= n - Z_{nr}, \\ \sum_{j=1}^{r-1} p_{0j} &= 1 - p_{0r}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.4.3** (Multivariater zentraler Grenzwertsatz). Sei  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren, mit  $E Y_1 = \mu$  und Kovarianzmatrix  $K$ . Dann gilt

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, K). \quad (3.11)$$

**Beweis** Sei  $Y_j = (Y_{j1}, \dots, Y_{jm})^\top$ . Nach dem Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen ist die Konvergenz (3.11) äquivalent zu

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(t) \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad (3.12)$$

wobei

$$\varphi_n(t) = E e^{itS_n} = E \exp \left\{ i \sum_{j=1}^m t_j \frac{Y_{1j} + \dots + Y_{nj} - n\mu_j}{\sqrt{n}} \right\}$$

die charakteristische Funktion vom Zufallsvektor

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sqrt{n}}$$

und

$$\varphi(t) = e^{-t^\top K t / 2}$$

die charakteristische Funktion der  $N(0, K)$ -Verteilung ist. Die Funktion  $\varphi_n(t)$  kann in der Form

$$\varphi_n(t) = E \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^m t_j (Y_{ij} - \mu_j)}{\sqrt{n}} \right\}, \quad t = (t_1, \dots, t_m)^\top \in \mathbb{R}^m$$

umgeschrieben werden, wobei für die Zufallsvariable

$$L_i := \sum_{j=1}^m t_j (Y_{ij} - \mu_j)$$

gilt:

$$E L_i = 0, \\ \text{Var } L_i = E \left[ \sum_{k,j=1}^m t_j (Y_{ij} - \mu_j) (Y_{ik} - \mu_k) t_k \right] = t^\top K t, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Falls  $t^\top Kt = 0$ , dann gilt  $L_i = 0$  fast sicher, für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Hieraus folgt  $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 1$ , also gilt die Konvergenz 3.11.

Falls jedoch  $t^\top Kt > 0$ , dann kann  $\varphi_n(t)$  als charakteristische Funktion der Zufallsvariablen

$$\sum_{i=1}^n L_i / \sqrt{n}$$

an Stelle 1, und  $\varphi(t)$  als charakteristische Funktion der eindimensionalen Normalverteilung  $N(0, t^\top Kt)$  an Stelle 1 interpretiert werden. Aus dem zentralen Grenzwertsatz für eindimensionale Zufallsvariablen (vgl. Satz 5.2.2. ElemWR) gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} L \sim N(0, t^\top Kt)$$

und somit

$$\varphi_n(t) = \varphi(\sum_{i=1}^n L_i / \sqrt{n})(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_L(1) = \varphi(t).$$

Somit ist die Konvergenz (3.11) bewiesen. □

**Bemerkung 3.4.4.**

1. Die im letzten Beweis verwendete Methode der Reduktion einer mehrdimensionalen Konvergenz auf den eindimensionalen Fall mit Hilfe von Linearkombinationen von Zufallsvariablen trägt den Namen von *Cramér-Wold*.
2. Der  $\chi^2$ -Pearson-Test ist asymptotisch, also für große Stichprobenumfänge, anzuwenden. Aber welches  $n$  ist groß genug? Als „Faustregel“ gilt:  $np_{0j}$  soll größer gleich  $a$  sein,  $a \in (2, \infty)$ . Für eine größere Klassenanzahl  $r \geq 10$  kann sogar  $a = 1$  verwendet werden. Wir zeigen jetzt, dass der  $\chi^2$ -Anpassungstest konsistent ist.

**Lemma 3.4.5.** Der  $\chi^2$ -Pearson-Test ist konsistent, das heißt

für alle  $p \in [0, 1]^{r-1}$ ,  $p \neq p_0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(T_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2) = 1$

**Beweis** Unter  $H_1$  gilt

$$Z_{nj}/n = \frac{\sum_{i=1}^n I(a_j < X_i \leq b_j)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \underbrace{\mathbb{E} I(a_j < X_1 \leq b_j)}_{=p_j}$$

nach dem starken Gesetz der großen Zahlen. Wir wählen  $j$  so, dass  $p_j \neq p_{0j}$ . Es gilt

$$T_n(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} \geq \underbrace{n \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right)^2}_{\sim n(p_j - p_{0j})^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \infty.$$

Somit ist auch

$$P_p \left( T_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 1.$$

□

### 3.4.2 $\chi^2$ -Anpassungstest von Pearson-Fisher

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wir wollen testen, ob die Verteilungsfunktion  $F$  von  $X_i$  zu einer parametrischen Familie

$$\Lambda_0 = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}, \quad \Theta \subset \mathbb{R}^m$$

gehört. Seien die Zahlen  $a_i, b_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  vorgegeben mit der Eigenschaft  $m < r$ ,

$$-\infty \leq a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots = a_r < b_r \leq \infty$$

und

$$Z_{nj} = \#\{X_i, i = 1, \dots, n : a_j < X_i \leq b_j\}, \quad j = 1, \dots, r, \\ Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{nr})^\top.$$

Nach Lemma 3.4.1 gilt:  $Z \sim M_{r-1}(n, p)$ ,  $p = (p_0, \dots, p_{r-1})^\top \in [0, 1]^{r-1}$ . Unter der Hypothese  $H_0 : F \in \Lambda_0$  gilt:  $p = p(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Wir vergrößern die Hypothese  $H_0$  und wollen folgende neue Hypothese testen:

$$H_0 : p \in \{p(\theta) : \theta \in \Theta\} \text{ vs. } H_1 : p \notin \{p(\theta) : \theta \in \Theta\}.$$

Um dieses Hypothesenpaar zu testen, wird der  $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test wie folgt aufgebaut:

1. Ein Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  (schwach konsistent) für  $\theta$  wird gefunden:  $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ . Dabei muß  $\{\hat{\theta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  asymptotisch normalverteilt sein.
2. Es wird der Plug-In-Schätzer  $p(\hat{\theta}_n)$  für  $p(\theta)$  gebildet.

3. Die Testgröße

$$\hat{T}_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^r \frac{(Z_{nj} - np_j(\hat{\theta}))^2}{np_j(\hat{\theta})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \eta \sim \chi_{r-m-1}^2$$

unter  $H_0$  und gewissen Voraussetzungen.

4.  $H_0$  wird verworfen, falls  $\hat{T}_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-m-1, 1-\alpha}^2$ . Dies ist ein asymptotischer Test zum Niveau  $\alpha$ .

**Bemerkung 3.4.6.**

1. Bei einem  $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test wird vorausgesetzt, dass die Funktion  $p(\theta)$  explizit bekannt ist,  $\theta$  jedoch unbekannt. Das bedeutet, dass für jede Klasse von Verteilungen  $\Lambda_0$  die Funktion  $p(\cdot)$  berechnet werden soll.
2. Warum kann  $\hat{T}_n$  die Hypothese  $H_0$  von  $H_1$  unterscheiden? Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\frac{1}{n}Z_{nj} - p_j(\hat{\theta}_n) = \underbrace{\frac{1}{n}Z_{nj} - p_j(\theta)}_{\xrightarrow{P} 0} - \underbrace{(p_j(\hat{\theta}_n) - p_j(\theta))}_{\xrightarrow{P} 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

falls  $\hat{\theta}_n$  schwach konsistent ist und  $p_j(\cdot)$  eine stetige Funktion für alle  $j = 1, \dots, r$  ist.

Das heißt, unter  $H_0$  soll  $\hat{T}_n(X_1, \dots, X_n)$  relativ kleine Werte annehmen. Eine signifikante Abweichung von diesem Verhalten soll zur Ablehnung von  $H_0$  führen, vergleiche Punkt 4.

Für die Verteilung  $F_\theta$  von  $X_i$  gelten folgende Regularitätsvoraussetzungen (vgl Satz 1.2.21).

1. Die Verteilungsfunktion  $F_\theta$  ist entweder diskret oder absolut stetig für alle  $\theta \in \Theta$ .
2. Die Parametrisierung ist eindeutig, das heißt:  $\theta \neq \theta_1 \Leftrightarrow F_\theta \neq F_{\theta_1}$ .
3. Der Träger der Likelihood-Funktion

$$L(x, \theta) = \begin{cases} P_\theta(X_1 = x), & \text{im Falle von diskreten } F_\theta, \\ f_\theta(x), & \text{im absolut stetigen Fall.} \end{cases}$$

$\text{supp } L(x, \theta) = \{x \in \mathbb{R} : L(x, \theta) > 0\}$  hängt nicht von  $\theta$  ab.

4.  $L(x, \theta)$  sei 3 Mal stetig differenzierbar, und es gelte für  $k = 1, \dots, 3$  und  $i_1, \dots, i_k \in \{1 \dots m\}$ , dass

$$\left(\sum\right) \int \frac{\partial^k L(x, \theta)}{\partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_k}} dx = \frac{\partial^k}{\partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_k}} \left(\sum\right) \int L(x, \theta) dx = 0.$$

5. Für alle  $\theta_0 \in \Theta$  gibt es eine Konstante  $c_{\theta_0}$  und eine messbare Funktion  $g_{\theta_0} : \text{supp } L \rightarrow \mathbb{R}_+$ , sodass

$$\left| \frac{\partial^3 \log L(x, \theta)}{\partial \theta_{i_1} \partial \theta_{i_2} \partial \theta_{i_3}} \right| \leq g_{\theta_0}(x), \quad |\theta - \theta_0| < c_{\theta_0}$$

und

$$E_{\theta_0} g_{\theta_0}(X_1) < \infty.$$

Wir definieren die *Informationsmatrix von Fisher* durch

$$I(\theta) = \left( E \left[ \frac{\partial \log L(X_1, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log L(X_1, \theta)}{\partial \theta_j} \right] \right)_{i,j=1,\dots,m}. \quad (3.13)$$

**Satz 3.4.7** (asymptotische Normalverteiltheit von konsistenten ML-Schätzern  $\hat{\theta}_n$ , multivariater Fall  $m > 1$ ). Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt mit Likelihood-Funktion  $L$ , die den Regularitätsbedingungen 1-5 genügt. Sei  $I(\theta)$  positiv definit für alle  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  eine Folge von schwach konsistenten Maximum-Likelihood-Schätzern für  $\theta$ . Dann gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, I^{-1}(\theta)).$$

Ohne Beweis; siehe den Beweis des Satzes 1.2.21.

Für unsere vergrößerte Hypothese  $H_0 : p \in \{p(\theta), \theta \in \Theta\}$  stellen wir folgende, stückweise konstante, Likelihood-Funktion auf:

$$L(x, \theta) = p_j(\theta), \text{ falls } x \in (a_j, b_j].$$

Dann ist die Likelihood-Funktion der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  gleich

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \theta) &= \prod_{j=1}^r p_j(\theta)^{Z_j(x_1, \dots, x_n)} \\ \Rightarrow \log L(x_1, \dots, x_n, \theta) &= \sum_{j=1}^r Z_j(x_1, \dots, x_n) \cdot \log p_j(\theta). \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) &= \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \log L(x_1, \dots, x_n, \theta) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^r Z_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{1}{p_j(\theta)} &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Aus  $\sum_{j=1}^r p_j(\theta) = 1$  folgt

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^r \frac{Z_j(x_1, \dots, x_n) - np_j(\theta)}{p_j(\theta)} \cdot \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

**Lemma 3.4.8.** Im obigen Fall gilt  $I(\theta) = C^\top(\theta) \cdot C(\theta)$ , wobei  $C(\theta)$  eine  $(r \times m)$ -Matrix mit Elementen

$$c_{ij}(\theta) = \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_i(\theta)}} \quad \text{ist.}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} E_0 \left[ \frac{\partial \log L(X_1, \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \log L(X_1, \theta)}{\partial \theta_j} \right] &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial \log p_k(\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \log p_k(\theta)}{\partial \theta_j} \cdot p_k(\theta) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial p_k(\theta)}{\partial \theta_i} \frac{1}{p_k(\theta)} \cdot \frac{\partial p_k(\theta)}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{p_k(\theta)} \cdot p_k(\theta) \\ &= \left( C^\top(\theta) \cdot C(\theta) \right)_{ij}, \end{aligned}$$

$$\text{denn } \log L(X_1, \theta) = \sum_{i=1}^r \log p_j(\theta) \cdot I(x \in (a_j, b_j]).$$

□

Deshalb gilt die Folgerung aus Satz 3.4.7:

**Folgerung 3.4.9.** Sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Maximum-Likelihood-Schätzer von  $\theta$  im vergrößerten Modell, der schwach konsistent ist und den obigen Regularitätsbedingungen genügt. Sei die Informationsmatrix von Fisher  $I(\theta) = C^\top(\theta) \cdot C(\theta)$  für alle  $\theta \in \Theta$  positiv definit. Dann ist  $\hat{\theta}$  asymptotisch normalverteilt:

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, I^{-1}(\theta))$$

**Satz 3.4.10.** Es sei  $\hat{\theta}_n$  ein Maximum-Likelihood-Schätzer im vergrößerten Modell für  $\theta$ , für den alle Voraussetzungen der Folgerung 3.4.9 erfüllt sind. Die Teststatistik

$$\hat{T}_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^r \frac{(Z_j(X_1, \dots, X_n) - np_j(\hat{\theta}_n))^2}{np_j(\hat{\theta}_n)}$$

ist unter  $H_0$  asymptotisch  $\chi_{r-m-1}^2$ -verteilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \hat{T}_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-m-1, 1-\alpha}^2 \right) = \alpha.$$

ohne Beweis (siehe [27]).

Aus diesem Satz folgt, dass der  $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test ein asymptotischer Test zum Niveau  $\alpha$  ist.

**Beispiel 3.4.11.**

1.  $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test der Normalverteilung

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe. Es soll geprüft werden, ob  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Es gilt

$$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Sei  $(a_j, b_j]_{j=1, \dots, r}$  eine beliebige Aufteilung von  $\mathbb{R}$  in  $r$  disjunkte Intervalle. Sei

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

die Dichte der  $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung.

$$p_j(\theta) = P_0(a_j < X_1 \leq b_j) = \int_{a_j}^{b_j} f_\theta(x) dx, \quad j = 1, \dots, r$$

mit den Klassenstärken

$$Z_j = \#\{i : X_i \in (a_j, b_j]\}.$$

Wir suchen den Maximum-Likelihood-Schätzer im vergrößerten Modell:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \mu} &= \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial}{\partial \mu} f_\theta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{a_j}^{b_j} \frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \sigma^2} &= \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} f_\theta(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_j}^{b_j} \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \left( \frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2} \right) \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \int_{a_j}^{b_j} f_\theta(x) dx + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \int_{a_j}^{b_j} (x-\mu)^2 f_\theta(x) dx \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen des Maximums sind:

$$\sum_{i=1}^r Z_j \frac{\int_{a_j}^{b_j} x f_{\theta}(x) dx}{\int_{a_j}^{b_j} f_{\theta}(x) dx} - \mu \underbrace{\sum_{j=1}^r Z_j}_{=n} = 0,$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^r Z_j \frac{\int_{a_j}^{b_j} (x - \mu)^2 f_{\theta}(x) dx}{\int_{a_j}^{b_j} f_{\theta}(x) dx} - \underbrace{\sum_{j=1}^r Z_j}_{=n} = 0.$$

Daraus folgen die Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\sigma}^2$  für  $\mu$  und  $\sigma^2$ :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r Z_j \frac{\int_{a_j}^{b_j} x f_{\theta}(x) dx}{\int_{a_j}^{b_j} f_{\theta}(x) dx},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r Z_j \frac{\int_{a_j}^{b_j} (x - \mu)^2 f_{\theta}(x) dx}{\int_{a_j}^{b_j} f_{\theta}(x) dx}.$$

Wir konstruieren eine Näherung zu  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\sigma}^2$  für  $r \rightarrow \infty$ . Falls  $r \rightarrow \infty$  (und somit auch  $n \rightarrow \infty$ ), dann ist  $b_j - a_j$  klein und nach der einfachen Quadraturregel gilt:

$$\int_{a_j}^{b_j} x f_{\theta}(x) dx \approx (b_j - a_j) y_j f_{\theta}(y_j),$$

$$\int_{a_j}^{b_j} f_{\theta}(x) dx \approx (b_j - a_j) f_{\theta}(y_j),$$

wobei  $y_1 = b_1$ ,  $y_r = b_{r-1} = a_r$ ,

$$y_j = (b_{j+1} + b_j)/2, \quad j = 2, \dots, r-1.$$

Daraus folgen für die Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\sigma}^2$ :

$$\hat{\mu} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r y_j \cdot Z_j = \tilde{\mu}$$

$$\hat{\sigma}^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r (y_j - \tilde{\mu})^2 Z_j = \tilde{\sigma}^2,$$

$$\tilde{\theta} = (\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2).$$

Der  $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test lautet dann:  $H_0$  wird abgelehnt, falls

$$\hat{T}_n = \frac{\sum_{j=1}^r (Z_j - np_j(\tilde{\theta}))^2}{np_j(\tilde{\theta})} > \chi_{r-3, 1-\alpha}^2.$$

## 2. $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test der Poissonverteilung

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Wir wollen testen, ob  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Es gilt  $\theta = \lambda$  und  $\Theta = (0, +\infty)$ . Die Vergrößerung von  $\Theta$  hat die Form

$$-\infty = a_1 < \underbrace{b_1}_{=0} = a_2 < \underbrace{b_2}_{=1} = a_3 < \dots < \underbrace{b_{r-1}}_{=r-2} = a_r < b_r = +\infty.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} p_j(\lambda) &= P_\lambda(X_1 = j-1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = 1, \dots, r-1, \\ p_r(\lambda) &= \sum_{i=r-1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \\ \frac{dp_j(\lambda)}{d\lambda} &= -e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} + (j-1) \frac{\lambda^{j-2}}{(j-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \left( \frac{j-1}{\lambda} - 1 \right) \\ &= p_j(\lambda) \cdot \left( \frac{j-1}{\lambda} - 1 \right), \quad j = 1, \dots, r-1 \\ \frac{dp_r(\lambda)}{d\lambda} &= \sum_{i \geq r-1} p_i(\lambda) \left( \frac{i-1}{\lambda} - 1 \right). \end{aligned}$$

Die Maximum-Likelihood-Gleichung lautet

$$0 = \sum_{j=1}^{r-1} Z_j \cdot \left( \frac{j-1}{\lambda} - 1 \right) + Z_r \frac{\sum_{i \geq r-1} p_i(\lambda) \left( \frac{i-1}{\lambda} - 1 \right)}{p_r(\lambda)}$$

Falls  $r \rightarrow \infty$ , so findet sich  $r(n)$  für jedes  $n$ , für das  $Z_{r(n)} = 0$ . Deshalb gilt für  $r > r(n)$ :

$$\sum_{j=1}^{r-1} (j-1)Z_j - \lambda \underbrace{\sum_{j=1}^r Z_j}_{=n} = 0,$$

woraus der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r-1} (j-1)Z_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X}_n$$

folgt. Der  $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test lautet:  $H_0$  wird verworfen, falls

$$\hat{T}_n = \sum_{j=1}^r \frac{(Z_j - np_j(\bar{X}_n))^2}{(np_j(\bar{X}_n))^2} > \chi_{r-2, 1-\alpha}^2.$$

### 3.4.3 Anpassungstest von Shapiro

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen,  $X_i \sim F$ . Getestet werden soll die Hypothese

$$H_0 : F \in \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\} \text{ vs.}$$

$$H_1 : F \notin \{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}.$$

Die in den Abschnitten 3.4.1 - 3.4.2 vorgestellten  $\chi^2$ -Tests sind asymptotisch; deshalb können sie für relativ kleine Stichprobenumfänge nicht verwendet werden.

Der folgende Test wird diese Lücke füllen und eine Testentscheidung über  $H_0$  selbst bei kleinen Stichproben ermöglichen.

Man bildet Ordnungsstatistiken  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ ,  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  und vergleicht ihre Korreliertheit mit den Mittelwerten der entsprechenden Ordnungsstatistiken der  $N(0, 1)$ -Verteilung. Sei  $(Y_1, \dots, Y_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen,  $Y_1 \sim N(0, 1)$ . Es sei  $a_i = EY_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Falls der empirische Korrelationskoeffizient  $\rho_{aX}$  zwischen  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  bei 1 liegt, dann ist die Stichprobe normalverteilt. Formalisieren wir diese Heuristik:

Es sei  $b_i$  der Erwartungswert der  $i$ -ten Ordnungsstatistik in einer Stichprobe von  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten, unabhängigen Zufallsvariablen  $Z_i$ :  $b_i = EZ_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Es gilt:  $b_i = \mu + \sigma a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Betrachten wir den Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{bX} = \frac{\sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b}_n) (X_{(i)} - \bar{X}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b}_n)^2 \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \bar{X}_n)^2}}. \quad (3.14)$$

Da  $\rho$  invariant bezüglich Lineartransformationen ist und

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} Y_i = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right) = 0, \quad \text{gilt:}$$

$$\begin{aligned} \rho_{bX} = \rho_{aX} &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i (X_{(i)} - \bar{X}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)} - \bar{X}_n \overbrace{\sum_{i=1}^n a_i}^{=0}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}} \end{aligned}$$

Die Teststatistik lautet:

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}} \quad (\text{Shapiro-Francia-Test})$$

Die Werte  $a_i$  sind bekannt und können den Tabellen bzw. der Statistik-Software entnommen werden. Es gilt:  $|T_n| \leq 1$ .

$H_0$  wird abgelehnt, falls  $T_n \leq q_{n,\alpha}$ , wobei  $q_{n,\alpha}$  das  $\alpha$ -Quantil der Verteilung von  $T_n$  ist. Diese Quantile sind aus den Tabellen bekannt, bzw. können durch Monte-Carlo-Simulationen berechnet werden.

**Bemerkung 3.4.12.** Einen anderen, weit verbreiteten Test dieser Art bekommt man, wenn man die Lineartransformation  $b_i = \mu + \sigma a_i$  durch eine andere Lineartransformation ersetzt:

$$(a'_1, \dots, a'_n)^\top = K^{-1} \cdot (a_1, \dots, a_n),$$

wobei  $K = (k_{ij})_{j=1}^n$  die Kovarianzmatrix von  $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$  ist:

$$k_{ij} = \mathbb{E} (Y_{(i)} - a_i) (Y_{(j)} - a_j), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

Der so konstruierte Test trägt den Namen *Shapiro-Wilk-Test*.

## 3.5 Weitere, nicht parametrische Tests

### 3.5.1 Binomialtest

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Getestet werden soll:

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs. } H_1 : p \neq p_0$$

Die Teststatistik lautet

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i \underset{H_0}{\sim} \text{Bin}(n, p_0),$$

und die Entscheidungsregel ist:  $H_0$  wird verworfen, falls

$$T_n \notin [\text{Bin}(n, p_0)_{\alpha/2}, \text{Bin}(n, p_0)_{1-\alpha/2}],$$

wobei  $\text{Bin}(n, p)_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der  $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung ist.

Für andere  $H_0$ , wie zum Beispiel  $p \leq p_0$  ( $p \geq p_0$ ) muss der Ablehnungsbereich entsprechend angepasst werden.

Die Quantile  $\text{Bin}(n, p)_\alpha$  erhält man aus Tabellen oder aus Monte-Carlo-Simulationen. Falls  $n$  groß ist, können diese Quantile durch die Normalapproximation berechnet werden:

Nach dem zentralen Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace gilt:

$$P(T_n \leq x) = P\left(\frac{T_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \Phi\left(\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} z_\alpha &\approx \frac{\text{Bin}(n, p_0)_\alpha - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \\ \Rightarrow \text{Bin}(n, p_0)_\alpha &\approx \sqrt{np_0(1-p_0)} \cdot z_\alpha + np_0 \end{aligned}$$

Nach der Poisson-Approximation (für  $n \rightarrow \infty, np_0 \rightarrow \lambda_0$ ) gilt:

$$\begin{aligned} \text{Bin}(n, p_0)_{\alpha/2} &\approx \text{Poisson}(\lambda_0)_{\alpha/2}, \\ \text{Bin}(n, p_0)_{1-\alpha/2} &\approx \text{Poisson}(\lambda_0)_{1-\alpha/2}, \quad \text{wobei } \lambda_0 = np_0. \end{aligned}$$

**Zielstellung:** Wie kann mit Hilfe des oben beschriebenen Binomialtests die Symmetrieeigenschaft einer Verteilung getestet werden?

Es sei  $(Y_1, \dots, Y_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$ . Getestet werden soll:

$$H_0 : F \text{ ist symmetrisch vs. } H_1 : F \text{ ist nicht symmetrisch.}$$

Eine symmetrische Verteilung besitzt den Median bei Null. Deswegen vergrößern wir die Hypothese  $H_0$  und testen:

$$H'_0 : F^{-1}(0,5) = 0 \text{ vs. } H'_1 : F^{-1}(0,5) \neq 0.$$

Noch allgemeiner: Für ein  $\beta \in [0, 1]$ :

$$H''_0 : F^{-1}(\beta) = \gamma_\beta \text{ vs. } H''_1 : F^{-1}(\beta) \neq \gamma_\beta.$$

$H_0''$  vs.  $H_1''$  wird mit Hilfe des Binomialtests wie folgt getestet: Sei  $X_i = I(Y_i \leq \gamma_\beta)$ . Unter  $H_0''$  gilt:

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(F(\gamma_\beta)) = \text{Bernoulli}(\beta).$$

Seien  $a_1 = -\infty$ ,  $b_1 = \gamma_\alpha$ ,  $a_2 = b_1$ ,  $b_2 = +\infty$  zwei disjunkte Klassen  $(a_1, b_1]$ ,  $(a_2, b_2]$  in der Sprache des  $\chi^2$ -Pearson-Tests. Die Testgröße ist:

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i = \# \{Y_i : Y_i \leq \gamma_\beta\} \sim \text{Bin}(n, \beta), \quad p = F(\gamma_\beta)$$

Die Hypothese  $F^{-1}(\beta) = \gamma_\beta$  ist äquivalent zu  $H_0''' : p = \beta$ . Die Entscheidungsregel lautet dann:  $H_0'''$  wird verworfen, falls

$$T_n \notin \left[ \text{Bin}(n, \beta)_{\alpha/2}, \text{Bin}(n, \beta)_{1-\alpha/2} \right].$$

Dies ist ein Test zum Niveau  $\alpha$ .

### 3.5.2 Iterationstests auf Zufälligkeit

In manchen Fragestellungen der Biologie untersucht man eine Folge von 0 oder 1 auf ihre „Zufälligkeit“ bzw. Vorhandensein von größeren Clustern von 0 oder 1. Diese Hypothesen kann man mit Hilfe der sogenannten *Iterationstests* statistisch überprüfen.

Sei eine Stichprobe  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  gegeben,  $X_i \in \{0, 1\}$ ,  $\sum_{i=1}^n X_i = n_1$  die Anzahl der Einsen,  $n_2 = n - n_1$  die Anzahl der Nullen,  $n_1, n_2$  vorgegeben. Eine Realisierung von  $(X_1, \dots, X_n)$  mit  $n = 18$ ,  $n_1 = 12$  wäre zum Beispiel

$$x = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$$

Es soll getestet werden, ob

$H_0$  : jede Folge  $x$  ist gleichwahrscheinlich vs.

$H_1$  : Es gibt bevorzugte Folgen (Clusterbildung)

stimmt.

Sei

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_i = 0 \text{ oder } 1, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = n_1 \right\}$$

der Stichprobenraum. Dann ist der Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,

$$P(x) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{n}{n_1}}$$

ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum.

Sei

$$\begin{aligned} T_n(X) &= \#\{\text{Iterationen in } X\} = \#\{\text{Teilfolgen der Nullen oder Einsen}\} \\ &= \#\{\text{Wechselstellen von 0 auf 1 oder von 1 auf 0}\} + 1. \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist für  $x = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $T_n(x) = 7 = 6 + 1$ .  $T_n(X)$  wird folgendermaßen als Teststatistik für  $H_0$  vs.  $H_1$  benutzt.  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $T(x)$  klein ist, das heißt, falls  $T_n(x) < F_{T_n}^{-1}(\alpha)$ . Dies ist ein Test zum Niveau  $\alpha$ . Wie berechnen wir die Quantile  $F_{T_n}^{-1}$ ?

**Satz 3.5.1.** Unter  $H_0$  gelten folgende Aussagen:

1.

$$P(T_n = k) = \begin{cases} \frac{2 \binom{n_1-1}{i-1} \binom{n_2-1}{i-1}}{\binom{n}{n_1}}, & \text{falls } k = 2i, \\ \frac{\binom{n_1-1}{i} \cdot \binom{n_2-1}{i-1} + \binom{n_1-1}{i-1} \cdot \binom{n_2-1}{i}}{\binom{n}{n_1}}, & \text{falls } k = 2i + 1. \end{cases}$$

2.

$$E T_n = 1 + \frac{2n_1 n_2}{n}$$

3.

$$\text{Var}(T_n) = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n)}{n^2 (n - 1)}$$

**Beweis**

1. Wir nehmen an, dass  $k = 2i$  (der ungerade Fall ist analog). Wie können  $i$  Klumpen von Einsen gewählt werden? Die Anzahl dieser Möglichkeiten = die Anzahl der Möglichkeiten, wie  $n_1$  Teilchen auf  $i$  Klassen verteilt werden.

$$0|00|\dots|0|(n_1)$$

Dies ist gleich der Anzahl an Möglichkeiten, wie  $i - 1$  Trennwände auf  $n_1 - 1$  Positionen verteilt werden können =  $\binom{n_1-1}{i-1}$ . Das selbe gilt für die Nullen.

2. Sei  $Y_j = I\{X_{j-1} \neq X_j\}_{j=2, \dots, n}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow E T_n(X) &= 1 + \sum_{j=2}^n E Y_j = 1 + \sum_{j=2}^n P(X_{j-1} \neq X_j). \\ P(X_{j-1} \neq X_j) &= \frac{2 \binom{n-2}{n_1-1}}{\binom{n}{n_1}} = 2 \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-(n_1-1))!(n_1-1)!}}{\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}} \\ &= \frac{2n_1(n-n_1)}{(n-1)n} \\ &= \frac{2n_1n_2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E T_n = 1 + (n-1) \frac{2n_1n_2}{n(n-1)} = 1 + 2 \frac{n_1n_2}{n}.$$

3.

**Übungsaufgabe 3.5.2.** Beweisen Sie Punkt 3.

□

**Beispiel 3.5.3** (*Test von Wald-Wolfowitz*). Seien  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ ,  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$  unabhängige Stichproben von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen,  $Y_i \sim F$ ,  $Z_i \sim G$ . Getestet werden soll:

$$H_0 : F = G \text{ vs. } H_1 : F \neq G.$$

Sei  $(Y, Z) = (Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$  und seien  $X'_i$  Stichprobenvariablen von  $(Y, Z)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n = n_1 + n_2$ . Wir bilden die Ordnungsstatistiken  $X'_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  und setzen

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } X'_{(i)} = Y_j \text{ für ein } j = 1, \dots, n_1, \\ 0, & \text{falls } X'_{(i)} = Z_j \text{ für ein } j = 1, \dots, n_2. \end{cases}$$

Unter  $H_0$  sind die Stichprobenwerte in  $(Y, Z)$  gut gemischt, das heißt jede Kombination von 0 und 1 in  $(X_1, \dots, X_n)$  ist gleichwahrscheinlich. Darum können wir den Iterationstest auf Zufälligkeit anwenden, um  $H_0$  vs.  $H_1$  zu testen:  $H_0$  wird verworfen, falls  $T_n(x) \leq F^{-1}(\alpha)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Wie können die Quantile von  $F_{T_n}$  für große  $n$  berechnet werden? Falls

$$\frac{n_1}{n_1 + n_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \in (0, 1),$$

dann ist  $T_n$  asymptotisch normalverteilt.

**Satz 3.5.4.** Unter der obigen Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} T_n}{n} &= 2p(1-p) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Var } T_n &= 4p^2(1-p)^2 \\ \frac{T_n - 2p(1-p)}{2\sqrt{np(1-p)}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0,1), \quad \text{falls } \frac{n_1}{n_1+n_2} \rightarrow p \in (0,1).\end{aligned}$$

So können Quantile von  $T_n$  näherungsweise für große  $n$  folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left(T_n \leq F_{T_n}^{-1}(\alpha)\right) = P\left(\frac{T_n - 2np(1-p)}{2\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x - 2np(1-p)}{2\sqrt{np(1-p)}}\right) \Bigg|_{x=F_{T_n}^{-1}(\alpha)} \\ &\approx \Phi\left(\frac{F_{T_n}^{-1}(\alpha) - 2np(1-p)}{2\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\Rightarrow z_\alpha \approx \frac{F_{T_n}^{-1}(\alpha) - 2np(1-p)}{2\sqrt{np(1-p)}}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Quantile:

$$F_{T_n}^{-1}(\alpha) \approx 2np(1-p) + 2\sqrt{np(1-p)} \cdot z_\alpha$$

In der Praxis setzt man  $\hat{p} = \frac{n_1}{n_1+n_2}$  für  $p$  ein.

## Kapitel 4

# Lineare Regression

In Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (vgl. Abschnitt 6.7.3) betrachteten wir die einfache lineare Regression der Form

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

In Matrix-Form schreiben wir  $Y = X\beta + \varepsilon$ , wobei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  der Vektor der Zielzufallsvariablen ist,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

eine  $(n \times 2)$ -Matrix, die die Ausgangsvariablen  $x_i, i = 1, \dots, n$  enthält und deshalb *Design-Matrix* genannt wird,  $\beta = (\beta_0, \beta_1)^\top$  der Parametervektor und  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top$  der Vektor der Störgrößen. Bisher waren oft  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\varepsilon \sim N(0, \mathcal{I} \cdot \sigma^2)$  multivariat normalverteilt. Die multivariate (das bedeutet, nicht einfache) lineare Regression lässt eine beliebige  $(n \times m)$ -Design-Matrix

$$X = (x_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

und einen  $m$ -dimensionalen Parametervektor  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$  zu, für  $m \geq 2$ . Das heißt, es gilt

$$Y = X\beta + \varepsilon, \tag{4.1}$$

wobei  $\varepsilon \sim N(0, K)$  ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor der Störgrößen mit Kovarianzmatrix  $K$  ist, die im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander sind:

$$K \neq \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2).$$

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Schätzer und Tests für  $\beta$  zu entwickeln. Zuvor müssen jedoch die Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung untersucht werden.

## 4.1 Multivariate Normalverteilung

Im Vorlesungsskript Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde die multivariate Normalverteilung in Beispiel 3.4.5 folgendermaßen eingeführt:

**Definition 4.1.1.** Es sei  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor,  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $K$  eine symmetrische, positiv definite  $(n \times n)$ -Matrix.  $X$  ist *multivariat normalverteilt* mit den Parametern  $\mu$  und  $K$  ( $X \sim N(\mu, K)$ ), falls  $X$  absolut stetig verteilt ist mit der Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(K)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^\top K^{-1} (x - \mu) \right\},$$

wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ .

Wir geben drei weitere Definitionen von  $N(\mu, K)$  an und wollen die Zusammenhänge zwischen ihnen untersuchen:

**Definition 4.1.2.** Der Zufallsvektor  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ist multivariat normalverteilt ( $X \sim N(\mu, K)$ ) mit Parametern  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und  $K$  (eine symmetrische, nicht-negativ definite  $(n \times n)$ -Matrix), falls die charakteristische Funktion  $\varphi_X(t) = E e^{i(t, X)}$ ,  $t \in \mathbb{R}^n$ , gegeben ist durch

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ it^\top \mu - \frac{1}{2} t^\top K t \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

**Definition 4.1.3.** Der Zufallsvektor  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ist multivariat normalverteilt ( $X \sim N(\mu, K)$ ) mit Parametern  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und einer symmetrischen, nicht negativ definiten  $(n \times n)$ -Matrix  $K$ , falls

$$\text{für alle } a \in \mathbb{R}^n : \text{ die Zufallsvariable } (a, X) = a^\top X \sim N(a^\top \mu, a^\top K a)$$

eindimensional normalverteilt ist.

**Definition 4.1.4.** Es sei  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $K$  eine nicht-negativ definite, symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix. Ein Zufallsvektor  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ist multivariat normalverteilt mit Parametern  $\mu$  und  $K$  ( $X \sim N(\mu, K)$ ), falls

$$X \stackrel{d}{=} \mu + C \cdot Y,$$

wobei  $C$  eine  $(n \times m)$ -Matrix mit  $\text{rang}(C) = m$ ,  $K = C \cdot C^\top$  und  $Y \sim N(0, \mathcal{I}) \in \mathbb{R}^m$  ein  $m$ -dimensionaler Zufallsvektor mit unabhängigen und identisch verteilten Koordinaten  $Y_j \sim N(0, 1)$  ist,  $j = 1, \dots, m$ .

**Bemerkung 4.1.5.** Dies ist das Analogon im eindimensionalen Fall:  $Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y \stackrel{d}{=} \mu + \sigma X$  mit  $X \sim N(0, 1)$ .

**Übungsaufgabe 4.1.6.** Prüfen Sie, dass die in Definition 4.1.1 angegebene Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(K)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^\top K^{-1} (x - \mu) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

tatsächlich eine Verteilungsdichte darstellt.

**Lemma 4.1.7.** Es seien  $X$  und  $Y$   $n$ -dimensionale Zufallsvektoren mit charakteristischen Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E} e^{i(t,X)} = \mathbb{E} e^{it^\top X} \\ \varphi_Y(t) &= \mathbb{E} e^{i(t,Y)} = \mathbb{E} e^{it^\top Y} \end{aligned}$$

für  $t \in \mathbb{R}^n$ . Es gelten folgende Eigenschaften:

1. *Eindeutigkeitssatz:*

$$X \stackrel{d}{=} Y \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

2. Falls  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, dann gilt:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

ohne Beweis (vgl. Beweis des Satzes 2.1.4 (5), Folgerung 2.1.10 WT&SP).

**Satz 4.1.8.**

1. Die Definitionen 4.1.2 - 4.1.4 der multivariaten Normalverteilung sind äquivalent.
2. Die Definitionen 4.1.1 und 4.1.4 sind im Falle  $n = m$  äquivalent.

**Bemerkung 4.1.9.**

1. Falls die Matrix  $K$  in Definition 4.1.4 den vollen Rang  $n$  besitzt, so besitzt sie die Dichte aus Definition 4.1.1. Sie wird in dem Fall *regulär* genannt.
2. Falls  $\text{Rang}(K) = m < n$ , dann ist die Verteilung  $N(\mu, K)$  laut Definition 4.1.4 auf dem  $m$ -dimensionalen linearen Unterraum

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y = \mu + Cx, x \in \mathbb{R}^m\}$$

konzentriert.  $N(\mu, K)$  ist in diesem Fall offensichtlich nicht absolutstetig verteilt und wird daher *singulär* genannt.

**Beweis** Wir beweisen: Definition 4.1.3  $\Leftrightarrow$  4.1.2  $\Leftrightarrow$  4.1.4.

1. (a) Wir zeigen: Die Definitionen 4.1.2 und 4.1.3 sind äquivalent. Dazu ist zu zeigen: Für die Zufallsvariable  $X$  mit der charakteristischen Funktion

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \exp\left\{it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top Kt\right\} \\ \Leftrightarrow \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n : a^\top X &\sim N(a^\top \mu, a^\top K a).\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\varphi_{t^\top X}(1) = \mathbb{E} e^{it^\top X \cdot 1} \stackrel{\varphi_{N(\mu, \sigma^2)}}{=} \exp\left\{it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top Kt\right\} = \varphi_X(t),$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . (Dies nennt man das *Verfahren von Cramér-Wold*, vergleiche den multivariaten zentralen Grenzwertsatz).

- (b) Wir zeigen: Die Definitionen 4.1.3 und 4.1.4 sind äquivalent. Dazu ist zu zeigen:  $X = \mu + C \cdot Y$  (mit  $\mu$ ,  $C$ , und  $Y$  wie in Definition 4.1.4)  $\Leftrightarrow \varphi_X(t) = \exp\left\{it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top Kt\right\}$ , wobei  $K = C \cdot C^\top$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu+CY}(t) &= \mathbb{E} e^{i(t, \mu+CY)} = \mathbb{E} e^{it^\top \mu + it^\top CY} = e^{it^\top \mu} \cdot \mathbb{E} e^{i \overbrace{(C^\top t, Y)}^y} \\ &\stackrel{Y \sim N(0, I)}{=} e^{it^\top \mu} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}y^\top \cdot y\right) \\ &= \exp\left\{it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top C \cdot C^\top t\right\} \\ &= \exp\left\{it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top Kt\right\}, \quad t \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

2. Zu zeigen ist: Aus  $X \sim N(\mu, K)$  im Sinne von Definition 4.1.4,  $Y \sim N(\mu, K)$  im Sinne der Definition 4.1.1,  $\text{Rang}(K) = n$  folgt, dass  $\varphi_X = \varphi_Y$ .

Aus der Definition 4.1.2 (die äquivalent zu Definition 4.1.4 ist) folgt, dass

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \exp\left\{it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top Kt\right\}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi_Y(t) &= \mathbb{E} e^{it^\top Y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{it^\top y} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det K}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \overbrace{(y-\mu)}^x \top K^{-1} \overbrace{(y-\mu)}^x\right\} dy \\ &= e^{it^\top \mu} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det K}} \cdot \exp\left\{it^\top x - \frac{1}{2}x^\top K^{-1}x\right\} dx\end{aligned}$$

Wir diagonalisieren  $K$  :  $\exists$  orthogonale  $(n \times n)$ -Matrix  $V : V^\top = V^{-1}$  und  $V^\top K V = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , wobei  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ . Mit der neuen Substitution:  $x = Vz, t = Vs$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \frac{e^{it^\top \mu}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det K}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ is^\top V^\top V z - \frac{1}{2} z^\top V^\top K^{-1} V z \right\} dz \\ &= \frac{e^{it^\top \mu}}{\sqrt{(2\pi)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ is^\top z - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{\lambda_i} \right\} dz_1 \cdots dz_n \\ &= e^{it^\top \mu} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \lambda_i}} e^{is_i z_i - \frac{z_i^2}{2\lambda_i}} dz_i \\ &= e^{it^\top \mu} \cdot \prod_{i=1}^n \varphi_{N(0, \lambda_i)}(s_i) = e^{it^\top \mu} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{s_i^2 \lambda_i}{2}} \\ &= \exp \left\{ it^\top \mu - \frac{1}{2} s^\top \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) s \right\} \\ &= \exp \left\{ it^\top \mu - \frac{1}{2} (V^\top t)^\top V^\top K V V^\top t \right\} \\ &= \exp \left\{ it^\top \mu - \frac{1}{2} t^\top \underbrace{V V^\top}_I K \underbrace{V V^\top}_I t \right\} \\ &= \exp \left\{ it^\top \mu - \frac{1}{2} t^\top K t \right\}, t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

#### 4.1.1 Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung

**Satz 4.1.10.** Es sei  $X = (X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu, K)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $K$  symmetrisch und nicht-negativ definit. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1.  $\mu$  ist der Erwartungswertvektor von  $X$ :

$$E X = \mu, \quad \text{das heißt: } E X_i = \mu_i, i = 1, \dots, n.$$

$K$  ist die Kovarianzmatrix von  $X$ :

$$K = (k_{ij}), \text{ mit } k_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j).$$

2. Jeder Teilvektor  $X' = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})^\top$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ) von  $X$  ist ebenso multivariat normalverteilt,  $X' \sim N(\mu', K')$ , wobei  $\mu' = (\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k})^\top$ ,  $K' = (k'_{jl}) = (\text{Cov}(X_{i_j}, X_{i_l}))$ ,  $j, l = 1, \dots, k$ . Insbesondere sind  $X_i \sim N(\mu_i, k_{ii})$ , wobei  $k_{ii} = \text{Var} X_i, i = 1, \dots, n$ .

3. Zwei Teilvektoren von  $X$  sind unabhängig genau dann, wenn entsprechende Elemente  $k_{ij}$  von  $K$ , die ihre Kreuzkovarianzen darstellen, Null sind, das heißt:  $X' = (X_1, \dots, X_k)^\top$ ,  $X'' = (X_{k+1}, \dots, X_n)$  unabhängig (wobei die Reihenfolge nur wegen der Einfachheit so gewählt wurde, aber unerheblich ist)  $\Leftrightarrow k_{ij} = 0$  für  $1 \leq i \leq k, j > k$  oder  $i > k, 1 \leq j \leq k$ .

$$K = \left( \begin{array}{c|c} K' & 0 \\ \hline 0 & K'' \end{array} \right)$$

$K'$  und  $K''$  sind Kovarianzmatrizen von  $X'$  bzw.  $X''$ .

4. *Faltungsstabilität:* Falls  $X$  und  $Y$  unabhängige,  $n$ -dimensionale Zufallsvektoren mit  $X \sim N(\mu_1, K_1)$  und  $Y \sim N(\mu_2, K_2)$  sind, dann ist

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, K_1 + K_2).$$

**Übungsaufgabe 4.1.11.** Beweisen Sie Satz 4.1.10.

**Satz 4.1.12** (*Lineare Transformation von  $N(\mu, K)$* ). Sei  $X \sim N(\mu, K)$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor,  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix mit  $\text{Rang}(A) = m \leq n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist der Zufallsvektor  $Y = AX + b$  multivariat normalverteilt:

$$Y \sim N(A\mu + b, AK A^\top).$$

**Beweis** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $\mu = 0$  und  $b = 0$ , weil  $\varphi_{Y-a}(t) = e^{-it^\top a} \cdot \varphi_Y(t)$ , für  $a = A\mu + b$ . Es ist zu zeigen:

$$Y = AX, X \sim N(0, K) \Rightarrow Y \sim N(0, AK A^\top)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \varphi_{AX}(t) = \mathbb{E} e^{it^\top AX} = \mathbb{E} e^{i(X, \overbrace{A^\top t}^{:=s})} \\ &\stackrel{\text{(Def. 4.1.2)}}{=} \exp \left\{ -\frac{1}{2} s^\top K s \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^\top AK A^\top t \right\}, t \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow Y \sim N(0, AK A^\top). \end{aligned}$$

□

#### 4.1.2 Lineare und quadratische Formen von normalverteilten Zufallsvariablen

**Definition 4.1.13.** Seien  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  und  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  Zufallsvektoren auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $A$  eine  $(n \times n)$ -Matrix aus  $\mathbb{R}^{n^2}$ , die symmetrisch ist.

1.  $Z = AX$  heißt *lineare Form* von  $X$  mit Matrix  $A$ .
2.  $Z = Y^\top AX$  heißt *bilineare Form* von  $X$  und  $Y$  mit Matrix  $A$ ,

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j Y_i.$$

3. Die Zufallsvariable  $Z = X^\top AX$  (die eine bilineare Form aus 2. mit  $Y = X$  ist) heißt *quadratische Form* von  $X$  mit Matrix  $A$ .

**Satz 4.1.14.** Sei  $Z = Y^\top AX$  eine bilineare Form von Zufallsvektoren  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  bzgl. der symmetrischen Matrix  $A$ . Falls  $\mu_X = EX$ ,  $\mu_Y = EY$  und  $K_{XY} = (\text{Cov}(X_i, Y_j))_{i,j=1,\dots,n}$  die Kreuzkovarianzmatrix von  $X$  und  $Y$  ist, dann gilt:

$$EZ = \mu_Y^\top A \mu_X + \text{Spur}(AK_{XY}).$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} EZ &= E \text{Spur}(Z) = E \text{Spur}(Y^\top AX) \quad (\text{da } \text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)) \\ &= E \text{Spur}(AXY^\top) = \text{Spur}(AE(XY^\top)) \\ &= \text{Spur}\left(AE\left((X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)^\top + \mu_X Y^\top + X \mu_Y^\top - \mu_X \mu_Y^\top\right)\right) \\ &= \text{Spur}\left(A(K_{XY} + \mu_X \mu_Y^\top + \mu_X \mu_Y^\top - \mu_X \mu_Y^\top)\right) \\ &= \text{Spur}\left(AK_{XY} + A\mu_X \mu_Y^\top\right) \\ &= \text{Spur}(AK_{XY}) + \text{Spur}\left(A\mu_X \cdot \mu_Y^\top\right) \\ &= \text{Spur}\left(\mu_Y^\top A \mu_X\right) + \text{Spur}(AK_{XY}) = \mu_Y^\top A \mu_X + \text{Spur}(AK_{XY}). \end{aligned}$$

□

**Folgerung 4.1.15.** Für quadratische Formen gilt

$$E(X^\top AX) = \mu_X^\top A \mu_X + \text{Spur}(A \cdot K),$$

wobei  $\mu_X = EX$  und  $K$  die Kovarianzmatrix von  $X$  ist.

**Satz 4.1.16** (*Kovarianz quadratischer Formen*). Es sei  $X \sim N(\mu, K)$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor und  $A, B \in \mathbb{R}^{n^2}$  zwei symmetrische  $(n \times n)$ -Matrizen. Dann gilt Folgendes:

$$\text{Cov}\left(X^\top AX, X^\top BX\right) = 4\mu^\top AKB\mu + 2 \cdot \text{Spur}(AKBK).$$

**Lemma 4.1.17** (*gemischte Momente*). Es sei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top \sim N(0, K)$  ein Zufallsvektor. Dann gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} E(Y_i Y_j Y_k) &= 0, \\ E(Y_i Y_j Y_k Y_l) &= k_{ij} \cdot k_{kl} + k_{ik} \cdot k_{jl} + k_{jk} \cdot k_{il}, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n, \end{aligned}$$

wobei  $K = (k_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  die Kovarianzmatrix von  $Y$  ist.

**Übungsaufgabe 4.1.18.** Beweisen Sie dieses Lemma.

**Beweis von Satz 4.1.16.**

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X^\top AX, X^\top BX) &= \mathbb{E}(X^\top AX \cdot X^\top BX) \\
&\quad - \mathbb{E}(X^\top AX) \cdot \mathbb{E}(X^\top BX) \\
&\stackrel{\text{(Folgerung 4.1.15)}}{=} \mathbb{E}\left(\overbrace{(X - \mu + \mu)}{:=Y}^\top A \overbrace{(X - \mu + \mu)}{:=Y} \cdot \overbrace{(X - \mu + \mu)}{:=Y}^\top B \overbrace{(X - \mu + \mu)}{:=Y}\right) \\
&\quad - \left(\mu^\top A \mu + \text{Spur}(AK)\right) \left(\mu^\top B \mu + \text{Spur}(BK)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(Y^\top AY + 2\mu^\top AY + \mu^\top A\mu\right) \left(Y^\top BY + 2\mu^\top BY + \mu^\top B\mu\right)\right] \\
&\quad - \mu^\top A\mu \cdot \mu^\top B\mu - \mu^\top A\mu \cdot \text{Spur}(BK) - \mu^\top B\mu \cdot \text{Spur}(AK) \\
&\quad - \text{Spur}(AK) \cdot \text{Spur}(BK) \\
&= \mathbb{E}(Y^\top AY \cdot Y^\top BY) + 2\mathbb{E}(Y^\top AY \cdot \mu^\top BY) + \mathbb{E}(Y^\top AY) \cdot \mu^\top B\mu \\
&\quad + 2\mathbb{E}(\mu^\top AY \cdot Y^\top BY) + 4\mathbb{E}(\underbrace{\mu^\top AY \cdot \mu^\top BY}_{=0}) + 2\mathbb{E}(\underbrace{\mu^\top AY}_{=0}) \mu^\top B\mu \\
&\quad + \mu^\top A\mu \cdot \mathbb{E}(Y^\top BY) + 2\mu^\top A\mu \cdot \underbrace{\mathbb{E}\mu^\top BY}_{=0} + \mu^\top A\mu \cdot \mu^\top B\mu \\
&\quad - \mu^\top A\mu \cdot \mu^\top B\mu - \mu^\top A\mu \cdot \text{Spur}(BK) - \mu^\top B\mu \cdot \text{Spur}(AK) \\
&\quad - \text{Spur}(AK) \cdot \text{Spur}(BK) \\
&= \mathbb{E}(Y^\top AY \cdot Y^\top BY) + 2\mu^\top B \mathbb{E}\left(\overbrace{Y \cdot Y^\top AY}^{=0 \text{ (Lemma 4.1.17)}}\right) + \mu^\top B\mu \cdot \text{Spur}(AK) \\
&\quad + 2\mu^\top A \mathbb{E}\left(\overbrace{Y \cdot Y^\top BY}^{=0}\right) + 4\mu^\top A \mathbb{E}\left(\overbrace{YY^\top}^{=K}\right) B\mu + \mu^\top A\mu \cdot \text{Spur}(BK) \\
&\quad - \mu^\top A\mu \cdot \text{Spur}(BK) - \mu^\top B\mu \cdot \text{Spur}(AK) - \text{Spur}(AK) \text{Spur}(BK) \\
&= \mathbb{E}(Y^\top AY \cdot Y^\top BY) + 4\mu^\top AKB\mu - \text{Spur}(AK) \cdot \text{Spur}(BK).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( Y^\top AY \cdot Y^\top BY \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} Y_i Y_j \cdot \sum_{k,l=1}^n b_{kl} Y_k Y_l \right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} b_{kl} \mathbb{E} (Y_i Y_j Y_k Y_l) \\
&\stackrel{\text{(Lemma 4.1.17)}}{=} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} b_{kl} (k_{ij} \cdot k_{kl} + k_{ik} \cdot k_{jl} + k_{jk} \cdot k_{il}) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} k_{ij} \cdot \sum_{k,l=1}^n b_{kl} \cdot k_{kl} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} \cdot k_{jl} \cdot b_{lk} \cdot k_{ki} \\
&= 2 \cdot \text{Spur} (AKBK) + \text{Spur} (AK) \cdot \text{Spur} (BK)
\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left( X^\top AX, X^\top BX \right) \\
&= 2 \cdot \text{Spur} (AKBK) + \text{Spur} (AK) \cdot \text{Spur} (BK) + 4\mu^\top AKB\mu \\
&\quad - \text{Spur} (AK) \cdot \text{Spur} (BK) = 4\mu^\top AKB\mu + 2 \cdot \text{Spur} (AKBK).
\end{aligned}$$

□

**Folgerung 4.1.19.**

$$\text{Var} \left( X^\top AX \right) = 4\mu^\top AK A\mu + 2 \cdot \text{Spur} \left( (AK)^2 \right)$$

**Satz 4.1.20.** Es seien  $X \sim N(\mu, K)$  und  $A, B \in \mathbb{R}^{n^2}$  zwei symmetrische Matrizen. Dann gilt:

$$\text{Cov} (BX, X^\top AX) = 2BK A\mu$$

**Beweis**

$$\begin{aligned}
\text{Cov} (BX, X^\top AX) &= \\
&\stackrel{\text{(Folgerung 4.1.15)}}{=} \mathbb{E} \left[ (BX - B\mu)(X^\top AX - \mu^\top A\mu - \text{Spur} (AK)) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ B(X - \mu) \left( (X - \mu)^\top A(X - \mu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\mu^\top AX - 2\mu^\top A\mu - \text{Spur} (AK) \right) \right],
\end{aligned}$$

denn

$$(X - \mu)^\top A(X - \mu) = X^\top AX - \mu^\top AX - X^\top A\mu + \mu^\top A\mu$$

und mit der Substitution  $Z = X - \mu$  (und damit  $E Z = 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Cov}(BX, X^\top AX) &= E \left[ BZ(Z^\top AZ + 2\mu^\top AZ - \text{Spur}(AK)) \right] \\ &= E(BZ \cdot Z^\top AZ) + 2E(BZ \cdot \mu^\top AZ) \\ &\quad - \text{Spur}(AK) \cdot \overbrace{E(BZ)}^{=BE Z=0} \\ &= 2E(BZ \cdot Z^\top A\mu) + E(BZZ^\top AZ) \\ &= 2B \underbrace{E(ZZ^\top)}_{\text{Cov } X=K} A\mu + B \cdot \underbrace{E(ZZ^\top AZ)}_{=0} \\ &= 2BKA\mu, \end{aligned}$$

wegen  $Z \sim N(0, K)$  und Lemma 4.1.17 und dem Beweis von Satz 4.1.16.  $\square$

**Definition 4.1.21.** Es seien  $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$  unabhängig. Dann besitzt die Zufallsvariable

$$Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$$

die sogenannte *nicht-zentrale  $\chi_{n,\mu}^2$ -Verteilung* mit  $n$  Freiheitsgraden und dem *Nichtzentralitätsparameter*

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i^2.$$

In Bemerkung 2.2.6, WT&SP, haben wir momenterzeugende Funktionen von Zufallsvariablen eingeführt. Jetzt benötigen wir für den Beweis des Satzes 4.1.23 folgenden Eindeutigkeitsatz:

**Lemma 4.1.22** (*Eindeutigkeitsatz für momenterzeugende Funktionen*). Es seien  $X_1$  und  $X_2$  zwei absolutstetige Zufallsvariablen mit momenterzeugenden Funktionen

$$M_{X_i}(t) = E e^{tX_i}, \quad i = 1, 2,$$

die auf einem Intervall  $(a, b)$  definiert sind. Falls  $f_1$  und  $f_2$  die Dichten der Verteilung von  $X_1$  und  $X_2$  sind, dann gilt

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M_{X_1}(t) = M_{X_2}(t), t \in (a, b).$$

Ohne Beweis.

**Satz 4.1.23.** Die Dichte einer  $\chi_{n,\mu}^2$ -verteilten Zufallsvariable  $X$  (mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mu > 0$ ) ist gegeben durch die Mischung der Dichten von  $\chi_{n+2J}^2$ -Verteilungen mit Mischungsvariable  $J \sim \text{Poisson}(\mu/2)$ :

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\mu/2} \frac{(\mu/2)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-x/2} x^{\frac{n+2j}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n+2j}{2}) \cdot 2^{\frac{n+2j}{2}}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

**Beweis**

1. Wir berechnen zuerst  $M_X(t)$ ,  $X \sim \chi_{n,\mu}^2$ :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E} \exp \left\{ t \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_i^2} \cdot e^{-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2}} dx_i \quad \left( t < \frac{1}{2}, X_i \sim N(\mu_i, 1) \right) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} tx_i^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2} &= \frac{1}{2}(2tx_i^2 - x_i^2 + 2x_i\mu_i - \mu_i^2) \\ &= -\frac{1}{2} \left( x_i^2(1-2t) - 2x_i\mu_i + \frac{\mu_i^2}{(1-2t)} - \frac{\mu_i^2}{(1-2t)} + \mu_i^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \left( x_i \cdot \sqrt{1-2t} - \frac{\mu_i}{\sqrt{1-2t}} \right)^2 + \mu_i^2 \left( 1 - \frac{1}{1-2t} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{(x_i(1-2t) - \mu_i)^2}{1-2t} - \mu_i^2 \cdot \frac{2t}{1-2t} \right) \end{aligned}$$

Wir substituieren

$$y_i = \frac{(x_i \cdot (1-2t) - \mu_i)}{\sqrt{1-2t}}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} M_X(t) &= (1-2t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \mu_i^2 \cdot \left( \frac{t}{1-2t} \right) \right\} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_i^2}{2}} dy_i}_{=1} \\ &= (1-2t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{1-2t} \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(1-2t)^{n/2}} \cdot \exp \left\{ \frac{\mu t}{1-2t} \right\}, \quad t < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Es sei  $Y$  eine Zufallsvariable mit der Dichte (4.2). Wir berechnen

$M_Y(t)$ :

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2}} \frac{(\mu/2)^j}{j!} \int_0^{\infty} e^{xt} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n+2j}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n+2j}{2}\right) \cdot \frac{n+2j}{2}}}_{=M_{\chi_{n+2j}^2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{(n+2j)/2}} \text{ Satz 1.1.4}} dx \\
 &= \frac{e^{-\frac{\mu}{2}}}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\mu}{2(1-2t)} \right)^j \cdot \frac{1}{j!} \\
 &= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2(1-2t)} \right\} \\
 &= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp \left\{ \frac{\mu \cdot (1 - (1-2t))}{2 \cdot (1-2t)} \right\} \\
 &= (1-2t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp \left\{ \frac{\mu t}{1-2t} \right\} \\
 \implies M_X(t) &= M_Y(t), \quad t < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1.22 gilt dann,  $f_X(x) = f_Y(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ .

□

**Bemerkung 4.1.24.**

1. Die Definition 4.1.21 kann in folgender Form umgeschrieben werden:  
Falls  $X \sim N(\vec{\mu}, \mathcal{I})$ ,  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ , dann gilt  $|X|^2 = X^\top X \sim \chi_{n,\mu}^2$ , wobei  $\mu = |\vec{\mu}|^2$ .
2. Die obige Eigenschaft kann auf  $X \sim N(\vec{\mu}, K)$ , mit einer symmetrischen, positiv definiten  $(n \times n)$ -Matrix  $K$  verallgemeinert werden:

$$X^\top K^{-1} X \sim \chi_{n,\tilde{\mu}}^2, \quad \text{wobei } \tilde{\mu} = \vec{\mu}^\top K^{-1} \vec{\mu},$$

denn weil  $K$  positiv definit ist, gibt es ein  $K^{\frac{1}{2}}$ , sodass  $K = K^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}\top}$ . Dann gilt

$$Y = K^{-\frac{1}{2}} X \sim N(K^{-\frac{1}{2}} \mu, \mathcal{I}),$$

weil

$$K^{-\frac{1}{2}} K K^{-\frac{1}{2}\top} = K^{-\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}\top} \cdot K^{-\frac{1}{2}\top} = \mathcal{I}$$

und daher  $Y^\top Y \stackrel{\text{Punkt 1}}{\sim} \chi_{n,\tilde{\mu}}^2$ , mit

$$\tilde{\mu} = \left( K^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} \right)^\top K^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} = \vec{\mu}^\top K^{-\frac{1}{2}\top} K^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu} = \vec{\mu}^\top K^{-1} \vec{\mu}.$$

**Satz 4.1.25.** Es sei  $X \sim N(\mu, K)$ , wobei  $K$  eine symmetrische, positiv definite  $(n \times n)$ -Matrix ist, und sei  $A$  eine weitere symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix mit der Eigenschaft  $AK = (AK)^2$  (Idempotenz) und  $\text{Rang}(A) = r \leq n$ . Dann gilt:

$$X^\top AX \sim \chi_{r, \tilde{\mu}}^2, \text{ wobei } \tilde{\mu} = \mu^\top A \mu.$$

**Beweis** Wir zeigen, dass  $A$  nicht negativ definit ist.

$$\begin{aligned} AK &= (AK)^2 = AK \cdot AK \quad | \cdot K^{-1} \\ \implies A &= AKA \implies \forall x \in \mathbb{R}^n : x^\top Ax = x^\top AKAx \\ &= \underbrace{(Ax)^\top}_{=y} K \underbrace{(Ax)}_{=y} \geq 0 \text{ wegen der positiven Definitheit von } K. \\ \implies A &\text{ ist nicht negativ definit.} \\ \implies \exists H &: \text{ eine } (n \times r)\text{-Matrix mit } \text{Rang}(H) = r : A = HH^\top \end{aligned}$$

Somit gilt

$$X^\top AX = X^\top H \cdot H^\top X = \underbrace{(H^\top X)^\top}_{=Y} \cdot H^\top X = Y^\top Y$$

Es gilt:  $Y \sim N(H^\top \mu, \mathcal{I}_r)$ , denn nach Satz 4.1.12 ist  $Y \sim N(H^\top \mu, H^\top KH)$  und  $\text{Rang}(H) = r$ . Das heißt,  $H^\top H$  ist eine invertierbare  $(r \times r)$ -Matrix, und

$$\begin{aligned} H^\top KH &= (H^\top H)^{-1} \underbrace{(H^\top H \cdot H^\top KH \cdot (H^\top H))}_{=AKA=A} (H^\top H)^{-1} \\ &= (H^\top H)^{-1} H^\top \cdot \underbrace{A}_{=HH^\top} \cdot H (H^\top H)^{-1} \\ &= \mathcal{I}_r \end{aligned}$$

Dann ist

$$X^\top AX = |Y|^2 \sim \chi_{r, \tilde{\mu}}^2 \text{ mit } \tilde{\mu} = (H^\top \mu)^\top = \mu^\top H \cdot H^\top \mu = \mu^\top A \mu.$$

□

**Satz 4.1.26** (Unabhängigkeit). Es sei  $X \sim N(\mu, K)$  und  $K$  eine symmetrische, nicht-negativ definite  $(n \times n)$ -Matrix.

1. Es seien  $A, B$   $(r_1 \times n)$  bzw.  $(r_2 \times n)$ -Matrizen,  $r_1, r_2 \leq n$  mit  $AKB^\top = 0$ . Dann sind die Vektoren  $AX$  und  $BX$  unabhängig.
2. Sei ferner  $C$  eine symmetrische, nicht-negativ definite  $(n \times n)$ -Matrix mit der Eigenschaft  $AKC = 0$ . Dann sind  $AX$  und  $X^\top CX$  unabhängig.

**Beweis**

1. Nach Satz 4.1.10, 3) gilt:  $AX$  und  $BX$  sind unabhängig, genau dann wenn  $\varphi_{(AX,BX)}(t) = \varphi_{AX}(t) \cdot \varphi_{BX}(t)$ ,  $t = (t_1, t_2)^\top \in \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ ,  $t_1 \in \mathbb{R}^{r_1}$ ,  $t_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$ . Es ist zu zeigen:

$$\varphi_{(AX,BX)}(t) = \mathbb{E} e^{i(t_1^\top A + t_2^\top B) \cdot X} \stackrel{!}{=} \mathbb{E} e^{it_1^\top AX} \cdot \mathbb{E} e^{it_2^\top BX}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{(AX,BX)}(t) &= \mathbb{E} e^{i(t_1^\top A + t_2^\top B) \cdot X} \\ &\stackrel{(Def. 4.1.2)}{=} e^{i(t_1^\top A + t_2^\top B) \cdot \mu - \frac{1}{2} \cdot (t_1^\top A + t_2^\top B) \cdot K \cdot (t_1^\top A + t_2^\top B)^\top}, \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} &(t_1^\top A + t_2^\top B) \cdot K \cdot (t_1^\top A + t_2^\top B)^\top \\ &= (t_1^\top A) K (t_1^\top A)^\top + (t_1^\top A)^\top K (t_2^\top B) \\ &\quad + (t_2^\top B) K (t_1^\top A)^\top + (t_2^\top B) K (t_2^\top B)^\top \\ &= t_1^\top A K A^\top t_1 + t_1^\top \cdot \underbrace{AKB^\top}_{=0} \cdot t_2 + t_2^\top \cdot \underbrace{BKA^\top}_{=(AKB^\top)^\top=0} \cdot t_1 + t_2^\top B K B^\top t_2 \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \varphi_{(AX,BX)}(t) &= e^{it^\top A - \frac{1}{2} t_1^\top A K A^\top t_1} \cdot e^{it_2^\top B - \frac{1}{2} t_2^\top B K B^\top t_2} \\ &= \varphi_{AX}(t_1) \cdot \varphi_{BX}(t_2), \quad t_1 \in \mathbb{R}^{r_1}, t_2 \in \mathbb{R}^{r_2} \end{aligned}$$

2.  $C$  ist symmetrisch, nicht-negativ definit  $\implies$  Es gibt eine  $(n \times r)$ -Matrix  $H$  mit  $\text{Rang}(H) = r \leq n$  und  $C = HH^\top$ ,  $\implies H^\top H$  hat Rang  $r$  und ist somit invertierbar. Dann gilt:

$$X^\top CX = X^\top HH^\top X = (H^\top X)^\top \cdot H^\top X = |H^\top X|^2.$$

Falls  $AX$  und  $H^\top X$  unabhängig sind, dann sind auch  $AX$  und  $X^\top CX = |H^\top X|^2$  unabhängig, nach dem Transformationssatz für Zufallsvektoren. Nach 1) sind  $AX$  und  $H^\top X$  unabhängig, falls  $AK(H^\top)^\top = AKH = 0$ . Da nach Voraussetzung

$$AKC = AKH \cdot H^\top = 0 \implies AKH \cdot H^\top H = 0,$$

da aber  $\exists (H^\top H)^{-1}$ , folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= AKH \cdot H^\top H \cdot (H^\top H)^{-1} = AKH \implies AKH = 0 \\ &\implies AX \text{ und } H^\top X \text{ sind unabhängig} \\ &\implies AX \text{ und } X^\top CX \text{ sind unabhängig.} \end{aligned}$$

□

## 4.2 Multivariate lineare Regressionsmodelle mit vollem Rang

Die *multivariate lineare Regression* hat die Form

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

wobei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  der Zufallsvektor der Zielvariablen ist,

$$X = (x_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

ist eine deterministische *Design-Matrix* mit vollem Rang,  $\text{Rang}(X) = r = m \leq n$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$  ist der *Parametervektor* und  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top$  ist der Zufallsvektor der *Störgrößen*, mit  $E\varepsilon_i = 0$ ,  $\text{Var}\varepsilon_i = \sigma^2 > 0$ . Das Ziel dieses Abschnittes wird sein,  $\beta$  und  $\sigma^2$  geeignet zu schätzen.

### 4.2.1 Methode der kleinsten Quadrate

Sei  $X = (X_1, \dots, X_m)$ , wobei die deterministischen Vektoren gegeben durch  $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^\top$ ,  $j = 1, \dots, m$  einen  $m$ -dimensionalen linearen Unterraum  $L_X = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$  aufspannen. Sei

$$e(\beta) = \frac{1}{n} |Y - X\beta|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - x_{i1}\beta_1 - \dots - x_{im}\beta_m)^2$$

die mittlere quadratische Abweichung zwischen  $Y$  und  $X\beta$ . Der *MKQ-Schätzer*  $\hat{\beta}$  für  $\beta$  ist definiert durch

$$\hat{\beta} = \text{argmin}(e(\beta)). \quad (4.3)$$

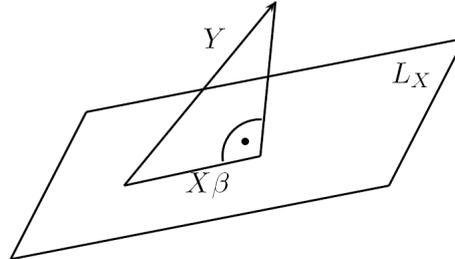
Warum existiert eine Lösung  $\beta \in \mathbb{R}^m$  des quadratischen Optimierungsproblems (4.3)? Geometrisch kann  $X\hat{\beta}$  als die orthogonale Projektion des Datenvektors  $Y$  auf den linearen Unterraum  $L_X$  interpretiert werden. Formal zeigen wir die Existenz der Lösung mit folgendem Satz.

**Satz 4.2.1.** Unter den obigen Voraussetzungen existiert der eindeutig bestimmte MKQ-Schätzer  $\hat{\beta}$ , der die Lösung der sogenannten *Normalengleichung* ist:

$$X^\top X\beta = X^\top Y. \quad (4.4)$$

Daher gilt:

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y.$$

Abbildung 4.1: Projektion auf den linearen Unterraum  $L_X$ 

**Beweis** Die notwendige Bedingung für die Existenz des Minimums ist  $e'(\beta) = 0$ , das heißt

$$e'(\beta) = \left( \frac{\partial e(\beta)}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial e(\beta)}{\partial \beta_m} \right)^\top = 0.$$

Es gilt:

$$e'(\beta) = \frac{2}{n} (X^\top X \beta - X^\top Y)$$

$\implies \hat{\beta}$  ist eine Lösung der Normalengleichung  $X^\top X \beta = X^\top Y$ . Wir zeigen die hinreichende Bedingung des Minimums:

$$e''(\beta) = \left( \frac{\partial^2 e(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right)_{i,j=1,\dots,m} = \frac{2}{n} X^\top X.$$

$X^\top X$  ist symmetrisch und positiv definit, weil  $X$  einen vollen Rang hat:

$$\forall y \neq 0, y \in \mathbb{R}^m : \quad y^\top X^\top X y = (Xy)^\top Xy = |Xy|^2 > 0$$

und aus  $y \neq 0 \implies Xy \neq 0$ , folgt, dass  $e''(\beta)$  positiv definit ist. Also ist  $X^\top X$  invertierbar. Das heißt,  $\hat{\beta}$  ist der Minimumpunkt von  $e(\beta)$ . Den Schätzer  $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  bekommt man, indem man die Normalengleichung  $X^\top X \beta = X^\top Y$  von links mit  $(X^\top X)^{-1}$  multipliziert.  $\square$

**Beispiel 4.2.2.**

1. *Einfache lineare Regression*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad m = 2, \beta = (\beta_1, \beta_2)^\top, Y = X\beta + \varepsilon$$

$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  ergibt den MKQ-Schätzer aus der Stochastik I

$$\hat{\beta}_2 = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}^2}, \quad \hat{\beta}_1 = \bar{Y}_n - \bar{X}_n \hat{\beta}_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, & \bar{Y}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \\ S_{XY}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \\ S_{XX}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 4.2.3.** Beweisen Sie dies!

2. *Multiple lineare Regression*

$Y = X\beta + \varepsilon$  mit Designmatrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{für } \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)^\top.$$

Der MKQ-Schätzer  $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  ist offensichtlich ein linearer Schätzer bezüglich  $Y$ .

Wir werden jetzt zeigen, dass  $\hat{\beta}$  der *beste lineare, erwartungstreue Schätzer* von  $\beta$  (im Englischen *BLUE = best linear unbiased estimator*) in der Klasse

$$\mathcal{L} = \left\{ \tilde{\beta} = AY + b : E\tilde{\beta} = \beta \right\}$$

aller linearen erwartungstreuen Schätzer ist.

**Satz 4.2.4** (*Güteeigenschaften des MKQ-Schätzers  $\hat{\beta}$* ). Es sei  $Y = X\beta + \varepsilon$  ein multivariates lineares Regressionsmodell mit vollem Rang  $m$  und Störgrößen  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top$ , die folgende Voraussetzungen erfüllen:

$$\mathbb{E} \varepsilon = 0, \quad \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \text{ für ein } \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Dann gilt Folgendes:

1. Der MKQ-Schätzer  $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  ist erwartungstreu:  $\mathbb{E} \hat{\beta} = \beta$ .
2.  $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^\top X)^{-1}$
3.  $\hat{\beta}$  besitzt die minimale Varianz:

$$\forall \tilde{\beta} \in \mathcal{L}: \quad \text{Var} \tilde{\beta}_j \geq \text{Var} \hat{\beta}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

**Beweis** 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{\beta} &= \mathbb{E} \left[ (X^\top X)^{-1} X^\top (X\beta + \varepsilon) \right] \\ &= (X^\top X)^{-1} \cdot X^\top X \cdot \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top \cdot \underbrace{\mathbb{E} \varepsilon}_{=0} \\ &= \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

2. Für alle  $\tilde{\beta} = AY + b \in \mathcal{L}$  gilt:

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbb{E} \tilde{\beta} = \mathbb{E} AY + b = AX\beta + b \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m. \\ &\implies b = 0, \quad AX = \mathcal{I}. \\ &\implies \tilde{\beta} = AY = A(X\beta + \varepsilon) = AX\beta + A\varepsilon \\ &= \beta + A\varepsilon. \end{aligned}$$

Für

$$\hat{\beta} = \underbrace{(X^\top X)^{-1} X^\top}_{=A} Y$$

gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \hat{\beta} &= \left( \mathbb{E} \left( (\hat{\beta}_i - \beta_i) (\hat{\beta}_j - \beta_j) \right) \right)_{i,j=1,\dots,m} \\ &= \mathbb{E} (A\varepsilon \cdot (A\varepsilon)^\top) = \mathbb{E} (A\varepsilon \varepsilon^\top A^\top) = A \mathbb{E} (\varepsilon \varepsilon^\top) \cdot A^\top \\ &= A \cdot \sigma^2 \mathcal{I} A^\top = \sigma^2 AA^\top = \sigma^2 (X^\top X)^{-1} X^\top \left( (X^\top X)^{-1} X^\top \right)^\top \\ &= \sigma^2 (X^\top X)^{-1} X^\top X (X^\top X)^{-1} = \sigma^2 (X^\top X)^{-1}. \end{aligned}$$

3. Sei  $\tilde{\beta} \in \mathcal{L}$ ,  $\tilde{\beta} = \beta + A\varepsilon$ . Zu zeigen ist, dass

$$\left(\text{Cov}(\tilde{\beta})\right)_{ii} = \sigma^2(AA^\top)_{ii} \geq \left(\text{Cov}(\hat{\beta})\right)_{ii} = \sigma^2(X^\top X)_{ii}^{-1},$$

für  $i = 1, \dots, m$ .

Sei  $D = A - (X^\top X)^{-1}X^\top$ , dann folgt:  $A = D + (X^\top X)^{-1}X^\top$ ,

$$\begin{aligned} AA^\top &= \left(D + (X^\top X)^{-1}X^\top\right) \left(D^\top + X(X^\top X)^{-1}\right) \\ &= DD^\top + (X^\top X)^{-1}, \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} DX(X^\top X)^{-1} &= \underbrace{(AX)}_{=I} - \underbrace{(X^\top X)^{-1}X^\top X}_{=I} (X^\top X)^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (X^\top X)^{-1}X^\top D^\top &= (X^\top X)^{-1}X^\top \left(A^\top - X(X^\top X)^{-1}\right) \\ &= (X^\top X)^{-1} \left(\underbrace{(AX)^\top}_{=I} - \underbrace{X^\top X(X^\top X)^{-1}}_{=I}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\implies (AA^\top)_{ii} = \underbrace{(DD^\top)_{ii}}_{\geq 0} + (X^\top X)_{ii}^{-1} \geq (X^\top X)_{ii}^{-1}$$

$$\implies \text{Var} \hat{\beta}_i \leq \text{Var} \tilde{\beta}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

□

**Satz 4.2.5.** Es sei  $\hat{\beta}_n$  der MKQ-Schätzer im oben eingeführten multivariaten linearen Regressionsmodell. Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Zahlenfolge mit  $a_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Es wird vorausgesetzt, dass eine invertierbare  $(m \times m)$ -Matrix  $Q$  existiert mit

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n (X_n^\top X_n).$$

Dann ist  $\hat{\beta}_n$  schwach konsistent:

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \beta.$$

**Beweis**

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \beta \iff P\left(|\hat{\beta}_n - \beta| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\begin{aligned} P\left(|\hat{\beta}_n - \beta| > \varepsilon\right) &= P\left(|\hat{\beta}_n - \beta|^2 > \varepsilon^2\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^m |\hat{\beta}_{in} - \beta_i|^2 > \varepsilon^2\right) \\ &\leq P\left(\bigcup_{i=1}^m \left\{|\hat{\beta}_{in} - \beta_i|^2 > \frac{\varepsilon^2}{m}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m P\left(|\hat{\beta}_{in} - \beta_i| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right) \\ &\stackrel{\text{Tschebyschew}}{\leq} m \sum_{i=1}^m \frac{\text{Var } \hat{\beta}_{in}}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ &\quad \text{falls } \text{Var } \hat{\beta}_{in} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Var  $\hat{\beta}_{in}$  ist ein Diagonaleintrag von der Matrix

$$\text{Cov } \hat{\beta}_n \stackrel{\text{(Satz 4.2.4)}}{=} \sigma^2 \left(X_n^\top X_n\right)^{-1}.$$

Wenn wir zeigen, dass  $\text{Cov } \hat{\beta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , ist der Satz bewiesen.

Es existiert

$$Q^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \left(X_n^\top X_n\right)^{-1}$$

und damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov } \hat{\beta}_n &= \sigma^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(X_n^\top X_n\right)^{-1} = \sigma^2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{a_n} \left(X_n^\top X_n\right)^{-1} \\ &= 0 \cdot Q^{-1} \cdot \sigma^2 = 0. \end{aligned}$$

□

#### 4.2.2 Schätzer der Varianz $\sigma^2$

Wir führen den Schätzer  $\hat{\sigma}^2$  für die Varianz  $\sigma^2$  der Störgrößen  $\varepsilon_i$  folgendermaßen ein:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} |Y - X\hat{\beta}|^2. \quad (4.5)$$

Dies ist eine verallgemeinerte Version des Varianzschätzers aus der einfachen linearen Regression, die wir bereits in Stochastik I kennenlernten. Dabei ist  $\hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$  der Vektor der Residuen.

**Satz 4.2.6** (*Erwartungstreue*). Der Varianzschätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} \|Y - X\hat{\beta}\|^2$$

ist erwartungstreu. Das heißt,

$$\mathbb{E} \hat{\sigma}^2 = \sigma^2.$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-m} (Y - X\hat{\beta})^\top (Y - X\hat{\beta}) \\ &= \frac{1}{n-m} (Y - X(X^\top X)^{-1}X^\top Y)^\top (Y - X(X^\top X)^{-1}X^\top Y) \\ &= \frac{1}{n-m} (DY)^\top DY \end{aligned}$$

wobei  $D = \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top$  eine  $(n \times n)$ -Matrix ist. Dann ist

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} Y^\top D^\top DY = \frac{1}{n-m} Y^\top D^2 Y = \frac{1}{n-m} Y^\top DY, \text{ falls}$$

$D^\top = D$  und  $D^2 = D$  (das heißt, dass  $D$  symmetrisch und idempotent ist).  
Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} D^\top &= \mathcal{I} - (X^\top)^\top (X^\top X)^{\top -1} X^\top = \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top = D. \\ D^2 &= (\mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top) (\mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top) \\ &= \mathcal{I} - 2X(X^\top X)^{-1}X^\top + X(X^\top X)^{-1}X^\top X(X^\top X)^{-1}X^\top \\ &= \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top = D. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-m} \cdot \text{Spur} (Y^\top DY) = \frac{1}{n-m} \cdot \text{Spur} (DYY^\top) \\ \implies \mathbb{E} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-m} \cdot \text{Spur} (D \mathbb{E} (YY^\top)) = \frac{\sigma^2}{n-m} \cdot \text{Spur} (D), \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \text{Spur} (D \cdot \mathbb{E} (YY^\top)) &= \\ &= \text{Spur} (D(X\beta)(X\beta)^\top + DX\beta \underbrace{\mathbb{E} \varepsilon^\top}_{=0} + D \underbrace{\mathbb{E} \varepsilon}_{=0} (X\beta)^\top + D \cdot \underbrace{\mathbb{E} \varepsilon \varepsilon^\top}_{= \text{Cov } \varepsilon = \sigma^2 \cdot \mathcal{I}}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} DX &= \left( \mathcal{I} - X (X^\top X)^{-1} X^\top \right) X \\ &= X - X (X^\top X)^{-1} X^\top X = X - X = 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\text{Spur}(D) = n - m$ :

$$\begin{aligned} \text{Spur}(D) &= \text{Spur} \left( \mathcal{I} - X (X^\top X)^{-1} X^\top \right) \\ &= \text{Spur}(\mathcal{I}) - \text{Spur} \left( X (X^\top X)^{-1} X^\top \right) \\ &= n - \text{Spur} \left( \underbrace{X^\top X \cdot (X^\top X)^{-1}}_{\text{eine } (m \times m)\text{-Matrix}} \right) = n - m. \end{aligned}$$

□

### 4.2.3 Maximum-Likelihood-Schätzer für $\beta$ und $\sigma^2$

Um Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\beta$  und  $\sigma^2$  bzw. Verteilungseigenschaften der MKQ-Schätzer  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\sigma}^2$  herleiten zu können, muß die Verteilung von  $\varepsilon$  bzw.  $Y$  präzisiert werden. Wir werden ab sofort normalverteilte Störgrößen betrachten, die unabhängig und identisch verteilt sind:

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I}), \quad \sigma^2 > 0.$$

Daraus folgt:

$$Y \sim N(X\beta, \sigma^2 \mathcal{I}).$$

Wie sieht die Verteilung der MKQ-Schätzer  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\sigma}^2$  aus? Da  $\hat{\beta}$  linear von  $Y$  abhängt, erwartungstreu ist und die Cov  $\hat{\beta} = \hat{\sigma}^2 (X^\top X)^{-1}$  besitzt, gilt:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma^2 (X^\top X)^{-1}\right).$$

Berechnen wir nun Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\beta$  und  $\sigma^2$ , und zwar  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\sigma}^2$ . Dann zeigen wir, dass sie im Wesentlichen mit den MKQ-Schätzern übereinstimmen.

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \hat{\beta}, \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{n-m}{n} \hat{\sigma}^2. \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst die Likelihood-Funktion von  $Y$ :

$$L(y, \beta, \sigma^2) = f_Y(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)^\top (y - X\beta) \right\}$$

und die Log-Likelihood-Funktion

$$\log L(y, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \underbrace{\frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} |y - X\beta|^2}_{:=g}.$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzer sind dann

$$(\tilde{\beta}, \tilde{\sigma}^2) = \operatorname{argmax}_{\beta \in \mathbb{R}^m, \sigma^2 > 0} \log L(y, \beta, \sigma^2),$$

sofern sie existieren.

**Satz 4.2.7** (*Maximum-Likelihood-Schätzung von  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\sigma}^2$* ). Es existieren eindeutig bestimmte Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\beta$  und  $\sigma^2$ , die folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{n-m}{n} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} |Y - X\tilde{\beta}|^2. \end{aligned}$$

**Beweis** Wir fixieren  $\sigma^2 > 0$  und suchen

$$\tilde{\beta} = \operatorname{argmax}_{\beta \in \mathbb{R}^m} \log L(Y, \beta, \sigma^2) = \operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^m} |Y - X\beta|^2,$$

woraus folgt, dass  $\tilde{\beta}$  mit dem bekannten MKQ-Schätzer  $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  identisch ist, der nicht von  $\sigma^2$  abhängt. Berechnen wir jetzt

$$\tilde{\sigma}^2 = \operatorname{argmax}_{\sigma^2 > 0} \log L(Y, \tilde{\beta}, \sigma^2) = \operatorname{argmax}_{\sigma^2 > 0} g(\sigma^2).$$

Es gilt

$$g(\sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow +\infty} -\infty, \quad g(\sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} -\infty,$$

weil  $|Y - X\tilde{\beta}|^2 \neq 0$ , dadurch, dass  $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 \mathcal{I}) \in \{Xy : y \in \mathbb{R}^m\}$  mit Wahrscheinlichkeit Null. Da

$$g'(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{|Y - X\tilde{\beta}|^2}{2(\sigma^2)^2} = 0, \quad \text{ist } \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} |Y - X\tilde{\beta}|^2$$

ein Maximumpunkt von  $g(\sigma^2)$ , das heißt,  $\tilde{\sigma}^2$  ist ein Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\sigma^2$ .  $\square$

**Satz 4.2.8.** Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

1.  $E \tilde{\sigma}^2 = \frac{n-m}{n} \sigma^2$ , das heißt,  $\tilde{\sigma}^2$  ist nicht erwartungstreu; allerdings ist er asymptotisch unverzerrt.
2.  $\frac{n}{\sigma^2} \tilde{\sigma}^2 \sim \chi_{n-m}^2$ ,  $\frac{n-m}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-m}^2$ .

**Beweis** 1. Trivial (vergleiche den Beweis von Satz 4.2.6)

2. Wir zeigen den Satz nur für  $\hat{\sigma}^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{n-m}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{\sigma^2} |Y - X\hat{\beta}|^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} Y^\top \underbrace{D}_{=D^2} Y \quad (\text{nach dem Beweis von Satz 4.2.6}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (DY)^\top DY = \frac{1}{\sigma^2} \underbrace{(D(X\beta + \varepsilon))^\top}_{=0} \cdot \underbrace{D(X\beta + \varepsilon)}_{=0} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (D\varepsilon)^\top D\varepsilon = \left( \frac{\varepsilon^\top}{\sigma} \right) D \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right) \sim N(0, \mathcal{I}).$$

Nach Satz 4.1.25 gilt

$$\frac{\varepsilon^\top}{\sigma} D \frac{\varepsilon}{\sigma} \sim \chi_r^2,$$

wobei  $r = \text{Rang}(D)$ , weil  $D\mathcal{I} = D$  idempotent ist. Falls  $r = n - m$ , dann ist  $(n - m)\hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-m}^2$ . Zeigen wir, dass  $\text{Rang}(D) = r = n - m$ . Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass  $\text{Rang}(D) = n - \dim(\text{Kern}(D))$ . Wir zeigen, dass  $\text{Kern}(D) = \{Xx : x \in \mathbb{R}^m\}$  und damit  $\dim(\text{Kern}(D)) = m$ , weil  $\text{Rang}(X) = m$ . Es ist  $\{Xx : x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \text{Kern}(D)$ , da

$$DX = (\mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top)X = X - (X^\top X)^{-1}X^\top X = 0.$$

und  $\text{Kern}(D) \subseteq \{Xx : x \in \mathbb{R}^m\}$ , weil

$$\begin{aligned} \forall y \in \text{Kern}(D) : \quad Dy = 0 &\iff (\mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top)y = 0 \\ &\iff y = X \cdot \underbrace{(X^\top X)^{-1}X^\top y}_x = Xx \in \{Xx : x \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

□

**Satz 4.2.9.** Sei  $Y = X\beta + \varepsilon$  ein multivariates lineares Regressionsmodell mit  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ , Designmatrix  $X$  mit  $\text{Rang}(X) = m$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$ ,  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I})$ . Dann sind die Schätzer  $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  für  $\beta$  bzw.  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} |Y - X\hat{\beta}|^2$  für  $\sigma^2$  unabhängig voneinander.

**Beweis** In diesem Beweis verwenden wir den Satz 4.1.26, für dessen Anwendung wir  $\hat{\beta}$  als lineare und  $\hat{\sigma}^2$  als quadratische Form von  $\varepsilon$  darstellen. Es ist in den Beweisen der Sätze 4.2.4 und 4.2.8 gezeigt worden, dass

$$\hat{\beta} = \beta + \underbrace{(X^\top X)^{-1} X^\top}_{=A} \varepsilon,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} \varepsilon^\top D \varepsilon, \text{ wobei } D = \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1} X^\top.$$

Zusätzlich gilt  $AD = 0$ , weil nach dem Beweis des Satzes 4.2.6

$$(AD)^\top = D^\top A^\top = \underbrace{D \cdot X}_{=0} ((X^\top X)^{-1})^\top = 0.$$

Da  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I})$ , folgt daraus

$$A\sigma^2 \mathcal{I} D = 0.$$

Deshalb sind die Voraussetzungen des Satzes 4.1.26 erfüllt, und  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\sigma}^2$  sind unabhängig.  $\square$

#### 4.2.4 Tests für Regressionsparameter

In diesem Abschnitt wird zunächst die Hypothese

$$H_0 : \beta = \beta_0 \text{ vs. } H_1 : \beta \neq \beta_0$$

für ein  $\beta_0 \in \mathbb{R}^m$  getestet. Dafür definieren wir die Testgröße

$$T = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)^\top X^\top X (\hat{\beta} - \beta_0)}{m\hat{\sigma}^2}.$$

Man kann zeigen (vgl. Satz 4.2.11), dass unter  $H_0$  gilt:

$$T \sim F_{m, n-m}.$$

Daraus folgt, dass  $H_0$  abgelehnt werden soll, falls  $T > F_{m, n-m, 1-\alpha}$ , wobei  $F_{m, n-m, 1-\alpha}$  das  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $F_{m, n-m}$ -Verteilung darstellt. Dies ist ein Test zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$ .

*Spezialfall:* Der Fall  $\beta_0 = 0$  beschreibt einen *Test auf Zusammenhang*; das heißt, man testet, ob die Parameter  $\beta_1, \dots, \beta_m$  für die Beschreibung der Daten  $Y$  relevant sind.

**Bemerkung 4.2.10.**

1. Wie kann man verstehen, dass die Testgröße  $T$  tatsächlich  $H_0$  von  $H_1$  unterscheiden soll? Führen wir die Bezeichnung

$$\tilde{Y} = Y - \underbrace{X\hat{\beta}}_{:=\hat{Y}}$$

ein; dabei gilt:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} |\tilde{Y}|^2$$

und  $\tilde{Y}$  ist der Vektor der *Residuen*.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $\beta_0 = 0$ . Falls  $H_0$  nicht gelten soll, dann ist  $\beta \neq 0$ , und somit

$$|X\beta|^2 = (X\beta)^\top X\beta = \beta^\top X^\top X\beta > 0,$$

weil  $X$  den vollen Rang hat. Daraus folgt, dass  $H_0$  abgelehnt werden soll, falls

$$|\hat{Y}|^2 = |X\hat{\beta}|^2 = \hat{\beta}^\top X^\top X\hat{\beta} \gg 0.$$

In der Testgröße  $|X\hat{\beta}|^2$  sind allerdings die Schwankungen der Schätzung von  $\beta$  nicht berücksichtigt. Deswegen teilt man  $|X\hat{\beta}|^2$  durch  $\hat{\sigma}^2$ :

$$T = \frac{\hat{\beta}^\top X^\top X\hat{\beta}}{m \cdot \hat{\sigma}^2} = \frac{|\hat{Y}|^2}{\frac{m}{n-m} |Y - \hat{Y}|^2}.$$

Der Satz von Pythagoras liefert

$$|Y|^2 = |\tilde{Y}|^2 + |\hat{Y}|^2,$$

wobei unter  $H_0$

$E|\hat{Y}|^2 = E|Y|^2 - E|Y - \hat{Y}|^2 = n\sigma^2 - E|\tilde{Y}|^2$  gilt, und somit

$$\frac{E|\hat{Y}|^2}{E\left(\frac{m}{n-m} |\tilde{Y}|^2\right)} \stackrel{(H_0)}{=} \frac{n\sigma^2 - E|\tilde{Y}|^2}{\frac{m}{n-m} E|\tilde{Y}|^2} = \frac{n-m}{m} \left( \frac{n\sigma^2}{E|\tilde{Y}|^2} - 1 \right),$$

weil  $E|Y|^2 = E(Y^\top Y) = \sigma^2 \cdot n$ , wegen  $Y \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I})$ .

$\implies$  Die Testgröße  $T$  ist sensibel gegenüber Abweichungen von  $H_0$ .

2. Die Größe

$$|\tilde{Y}|^2 = |Y - \hat{Y}|^2$$

wird *Reststreuung* genannt. Mit deren Hilfe kann der Begriff des *Bestimmtheitsmaßes*  $R^2$  aus der Stochastik I wie folgt verallgemeinert werden:

$$R^2 = 1 - \frac{|\tilde{Y}|^2}{|Y - \bar{Y}_n \cdot e|^2},$$

wobei  $e = (1, \dots, 1)^\top$ ,  $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

**Satz 4.2.11.** Unter  $H_0 : \beta = \beta_0$  gilt

$$T = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)^\top X^\top X (\hat{\beta} - \beta_0)}{m \hat{\sigma}^2} \sim F_{m, n-m}.$$

**Beweis** Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\sim N\left(\beta_0, \sigma^2 (X^\top X)^{-1}\right) \\ \implies \hat{\beta} - \beta_0 &\sim N\left(0, \underbrace{\sigma^2 (X^\top X)^{-1}}_{:=K}\right). \end{aligned}$$

Falls  $A = \frac{X^\top X}{\sigma^2}$ , dann ist  $AK = \mathcal{I}$  idempotent. Dann gilt nach Satz 4.1.25

$$(\hat{\beta} - \beta_0)^\top A (\hat{\beta} - \beta_0) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_m^2$$

(Zur Information: Unter  $H_1$  wäre  $(\hat{\beta} - \beta_0)^\top A (\hat{\beta} - \beta_0)$  nicht-zentral  $\chi^2$ -verteilt).

Es gilt zusätzlich:

$$\frac{n-m}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-m}^2.$$

Aus Satz 4.2.9 folgt die Unabhängigkeit von  $(\hat{\beta} - \beta_0)^\top A (\hat{\beta} - \beta_0)$  und  $\frac{n-m}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2$ .

$$\implies T = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)^\top (X^\top X) (\hat{\beta} - \beta_0) / m}{(n-m) \hat{\sigma}^2 / (n-m)} \sim F_{m, n-m}$$

nach der Definition der  $F$ -Verteilung. □

Jetzt wird die Relevanz der einzelnen Parameter  $\beta_j$  getestet:

$$H_0 : \beta_j = \beta_{0j} \text{ vs. } H_1 : \beta_j \neq \beta_{0j}.$$

**Satz 4.2.12.** Unter  $H_0 : \beta_j = \beta_{0j}$  gilt:

$$T_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{0j}}{\hat{\sigma} \sqrt{x^{jj}}} \sim t_{n-m}, \text{ wobei}$$

$$(X^\top X)^{-1} = (x^{ij})_{i,j=1,\dots,m}.$$

**Beweis** Aus  $\hat{\beta} \stackrel{H_0}{\sim} N(\beta_0, \sigma^2(X^\top X)^{-1})$  folgt  $\hat{\beta}_j \stackrel{H_0}{\sim} N(\beta_{0j}, \sigma^2 x^{jj})$  und somit  $\hat{\beta}_j - \beta_{0j} \sim N(0, \sigma^2 x^{jj})$ . Dann ist  $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_{0j}}{\sigma \sqrt{x^{jj}}} \sim N(0, 1)$ . Zusätzlich gilt:  $\frac{(n-m)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{n-m}^2$ , und nach Satz 4.2.9 sind beide Größen unabhängig. Daraus folgt:

$$T_j = \frac{\frac{\hat{\beta}_j - \beta_{0j}}{\sigma \sqrt{x^{jj}}}}{\sqrt{\frac{(n-m)\hat{\sigma}^2}{(n-m)\sigma^2}}} \sim t_{n-m}.$$

□

Somit wird  $H_0 : \beta_j = \beta_{j0}$  abgelehnt, falls  $|T| > t_{n-m, 1-\alpha/2}$ . Dies ist ein Test von  $H_0$  vs.  $H_1$  zum Niveau  $\alpha$ .

Sei nun

$$H_0 : \beta_{j_1} = \beta_{0j_1}, \dots, \beta_{j_l} = \beta_{0j_l} \text{ vs. } H_1 : \exists i \in \{1, \dots, l\} : \beta_{j_i} \neq \beta_{0j_i}$$

die zu testende Hypothese.

**Übungsaufgabe 4.2.13.** Zeigen Sie, dass unter  $H_0$  folgende Verteilungsaussage gilt:

$$T = \frac{(\hat{\beta}' - \beta_0')^\top K' (\hat{\beta}' - \beta_0')}{l \hat{\sigma}^2} \sim F_{l, n-m},$$

wobei

$$\hat{\beta}' = (\hat{\beta}_{j_1}, \dots, \hat{\beta}_{j_l}),$$

$$\beta_0' = (\beta_{0j_1}, \dots, \beta_{0j_l}),$$

$$K' = \begin{pmatrix} x^{j_1 j_1} & \dots & x^{j_1 j_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{j_l j_1} & \dots & x^{j_l j_l} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Konstruieren Sie den dazugehörigen  $F$ -Test!

**Test auf Linearkombination von Parametern**

Sei nun

$$H_0 : H\beta = c \text{ vs. } H_1 : H\beta \neq c,$$

wobei  $H$  eine  $(r \times m)$ -Matrix und  $c \in \mathbb{R}^r$  sind.

**Satz 4.2.14.** Unter  $H_0$  gilt

$$T = \frac{(H\hat{\beta} - c)^\top (H(X^\top X)^{-1}H^\top)^{-1}(H\hat{\beta} - c)}{r\hat{\sigma}^2} \sim F_{r,n-m}.$$

Deshalb wird  $H_0 : H\beta = c$  abgelehnt, falls  $T > F_{r,n-m,1-\alpha}$ .

**Übungsaufgabe 4.2.15.** Beweisen Sie Satz 4.2.14!

**4.2.5 Konfidenzbereiche**

1. *Konfidenzintervall für  $\beta_j$*

Im Satz 4.2.12 haben wir gezeigt, dass

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}}} \sim t_{n-m},$$

wobei  $(X^\top X)^{-1} = (x^{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ . Daraus kann mit den üblichen Überlegungen folgendes Konfidenzintervall für  $\beta_j$  zum Niveau  $1 - \alpha$  abgeleitet werden:

$$P\left(\hat{\beta}_j - t_{n-m,1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t_{n-m,1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}\right) = 1 - \alpha.$$

2. *Simultaner Konfidenzbereich für  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$*

Falls  $A_j$  wie unten definiert ist, dann erhält man mit Hilfe folgender *Bonferroni-Ungleichung*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^m A_j\right) \geq \sum_{j=1}^m P(A_j) - (m - 1),$$

dass

$$\begin{aligned} & P\left(A_j, j = 1, \dots, m\right) \\ & \stackrel{\text{(Bonferroni)}}{\geq} \sum_{j=1}^m P(A_j) - (m - 1) = m \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) - m + 1 = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$A_j := \left\{ \beta_j \in \left[ \hat{\beta}_j - t_{n-m,1-\alpha/(2m)} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}, \hat{\beta}_j + t_{n-m,1-\alpha/(2m)} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}} \right] \right\}.$$

Daraus folgt, dass

$$\left\{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top : \beta_j \in A_j \right\}$$

ein simultaner Konfidenzbereich für  $\beta$  zum Niveau  $1 - \alpha$  ist.

3. *Konfidenzellipsoid für  $\beta$ .*

In Satz 4.2.11 haben wir bewiesen, dass

$$T = \frac{(\hat{\beta} - \beta)^\top (X^\top X)(\hat{\beta} - \beta)}{m\hat{\sigma}^2} \sim F_{m,n-m}.$$

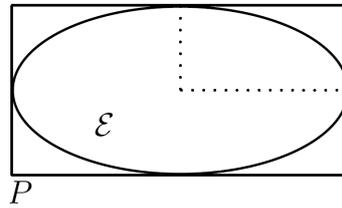
Daraus folgt, dass

$$P(T \leq F_{m,n-m,1-\alpha}) = 1 - \alpha \quad \text{und}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^m : \frac{(\hat{\beta} - \beta)^\top (X^\top X)(\hat{\beta} - \beta)}{m\hat{\sigma}^2} \leq F_{m,n-m,1-\alpha} \right\}$$

ein Konfidenzellipsoid zum Niveau  $1 - \alpha$  ist, siehe Abbildung 4.2.

Abbildung 4.2: Konfidenzellipsoid



Da ein Ellipsoid in das minimale Parallelepiped  $P$  eingebettet werden kann, sodass die Seitenlängen von  $P$  gleich  $2 \times$  der Halbachsenlängen von  $\mathcal{E}$  sind, ergibt sich folgender simultaner Konfidenzbereich für  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$ :

$$P = \left\{ \beta : \hat{\beta}_j - \hat{\sigma} \sqrt{m x^{jj} F_{m,n-m,1-\alpha}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + \hat{\sigma} \sqrt{m x^{jj} F_{m,n-m,1-\alpha}} \right\}$$

$$j = 1, \dots, m.$$

4. *Konfidenzintervall für den erwarteten Zielwert  $x_{01}\beta_1 + \dots + x_{0m}\beta_m$ .*

Sei  $Y_0 = x_{01}\beta_1 + \dots + x_{0m}\beta_m + \varepsilon_0$  eine neue Zielvariable mit  $E\varepsilon_0 = 0$ . Dann ist

$$E Y_0 = \sum_{i=1}^m x_{0i} \beta_i.$$

Wir konstruieren ein Konfidenzintervall für  $E Y_0$ . Dazu verwenden wir die Beweisidee des Satzes 4.2.12 kombiniert mit Satz 4.2.14 mit  $H = (x_{01}, \dots, x_{0m}) = x_0^\top$ ,  $r = 1$ . Dann ist

$$T = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i x_{0i} - \sum_{i=1}^m \beta_i x_{0i}}{\hat{\sigma} \sqrt{x_0^\top (X^\top X)^{-1} x_0}} \sim t_{n-m}.$$

Darum ist

$$\left\{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top : \sum_{i=1}^m x_{0i} \hat{\beta}_i - \hat{\sigma} \sqrt{x_0^\top (X^\top X)^{-1} x_0} \cdot t_{n-m, 1-\alpha/2} \leq \sum_{i=1}^m x_{0i} \beta_i \leq \sum_{i=1}^m x_{0i} \hat{\beta}_i + \hat{\sigma} \sqrt{x_0^\top (X^\top X)^{-1} x_0} \cdot t_{n-m, 1-\alpha/2} \right\}$$

ein Konfidenzintervall für  $\sum_{i=1}^m x_{0i} \beta_i$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

5. Prognoseintervall für die Zielvariable  $Y_0$ .

Für  $Y_0 = \sum_{i=1}^m x_{0i} \beta_i + \varepsilon_0$  mit  $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $\varepsilon_0$  unabhängig von  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , gilt:

$$\begin{aligned} x_0^\top \hat{\beta} - Y_0 &\sim N(0, \sigma^2(1 + x_0^\top (X^\top X)^{-1} x_0)) \\ \implies \frac{x_0^\top \hat{\beta} - Y_0}{\sigma \sqrt{1 + x_0^\top (X^\top X)^{-1} x_0}} &\sim N(0, 1) \\ \implies \frac{x_0^\top \hat{\beta} - Y_0}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + x_0^\top (X^\top X)^{-1} x_0}} &\sim t_{n-m}, \end{aligned}$$

Also ist

$$\left( x_0^\top \hat{\beta} - c, x_0^\top \hat{\beta} + c \right)$$

$$\text{mit } c = \hat{\sigma} \sqrt{1 + x_0^\top (X^\top X)^{-1} \cdot x_0} \cdot t_{n-m, 1-\alpha/2}$$

ein Prognoseintervall für die Zielvariable  $Y_0$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

6. Konfidenzband für die Regressionsebene  $y = \beta_1 + \sum_{i=2}^m x_i \beta_i$  im multiplen Regressionsmodell.

Es sei  $Y = X\beta + \varepsilon$ , wobei

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{und } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \cdot \mathcal{I}).$$

Wir wollen ein zufälliges Konfidenzband  $B(x)$  für  $y$  angeben. Es gilt

$$P\left(y = \beta_1 + \sum_{i=2}^m \beta_i x_i \in B(x)\right) = 1 - \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^{m-1}, \quad \text{wobei}$$

$$\mathbb{R}_1^{m-1} = \left\{ (1, x_2, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

**Satz 4.2.16.** Es gilt:

$$P\left(\max_{x \in \mathbb{R}_1^{m-1}} \frac{\overbrace{\left(x^\top \hat{\beta} - \left(\beta_1 + \sum_{i=2}^m \beta_i x_i\right)\right)^2}^{=y}}{\hat{\sigma}^2 x^\top (X^\top X)^{-1} x} \leq m \cdot F_{m, n-m, 1-\alpha}\right) = 1 - \alpha.$$

Ohne Beweis.

### 4.3 Multivariate lineare Regression mit Rang $(X) < m$

Es sei  $Y = X\beta + \varepsilon$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $X$  eine  $(n \times m)$ -Matrix mit  $\text{Rang}(X) = r < m$  ist,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ ,  $E\varepsilon = 0$ ,  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \delta_{ij} \sigma^2$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\sigma^2 > 0$ .

Der MKQ-Schätzer  $\hat{\beta}$  ist nach wie vor eine Lösung der Normalengleichung

$$(X^\top X) \beta = X^\top Y.$$

$X^\top X$  ist aber nicht mehr invertierbar, weil

$$\text{Rang}(X^\top X) \leq \min \{ \text{Rang}(X), \text{Rang}(X^\top) \} = r < m.$$

Um  $\hat{\beta}$  aus der Normalengleichung zu gewinnen, sollen beide Seiten der Gleichung mit der sogenannten *verallgemeinerten Inversen* von  $X^\top X$  multipliziert werden.

#### 4.3.1 Verallgemeinerte Inverse

**Definition 4.3.1.** Sei  $A$  eine  $(n \times m)$ -Matrix. Eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A^-$  heißt *verallgemeinerte Inverse* von  $A$ , falls

$$AA^-A = A \quad \text{gilt.}$$

Die Matrix  $A^-$  ist nicht eindeutig bestimmt, was die folgenden Hilfssätze zeigen.

**Lemma 4.3.2.** Sei  $A$  eine  $(n \times m)$ -Matrix,  $m \leq n$  mit  $\text{Rang}(A) = r \leq m$ . Es existieren invertierbare Matrizen  $P$  ( $n \times n$ ) und  $Q$  ( $m \times m$ ), sodass

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } I_r = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ Mal}}). \quad (4.6)$$

**Folgerung 4.3.3.** Für eine beliebige  $(n \times m)$ -Matrix  $A$  mit  $n \geq m$ ,  $\text{Rang}(A) = r \leq m$  gilt

$$A^- = Q \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & A_2 \\ A_1 & A_3 \end{pmatrix} P, \quad (4.7)$$

wobei  $P$  und  $Q$  Matrizen aus der Darstellung (4.6) sind,  $\mathcal{I}_r = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ Mal}})$ , und  $A_1, A_2, A_3$  beliebige  $((m-r) \times r)$ ,  $(r \times (n-r))$  bzw.  $((m-r) \times (n-r))$ -Matrizen sind.

Insbesondere kann

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-r \text{ Mal}}, 0, \dots, 0), \\ s &\in \{r, \dots, m\} \end{aligned}$$

gewählt werden, das heißt,  $\text{Rang}(A^-) = s \in \{r, \dots, m\}$  für

$$A^- = Q \begin{pmatrix} \mathcal{I}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P.$$

**Beweis** Zeigen wir, dass für  $A^-$  wie in (4.7) gegeben,  $AA^-A = A$  gilt. Aus Lemma 4.3.2 folgt, dass

$$\begin{aligned} A &= P^{-1} \cdot \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \cdot Q^{-1} \quad \text{und somit} \\ AA^-A &= P^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}Q \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & A_2 \\ A_1 & A_3 \end{pmatrix} PP^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & A_2 \\ A_1 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = A. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.3.4.** Sei  $A$  eine beliebige  $(n \times m)$ -Matrix mit  $\text{Rang}(A) = r \leq m$ ,  $m \leq n$ .

1. Falls  $(A^\top A)^-$  eine verallgemeinerte Inverse von  $A^\top A$  ist, dann ist  $\left((A^\top A)^-\right)^\top$  ebenfalls eine verallgemeinerte Inverse von  $A^\top A$ .
2. Es gilt die Darstellung

$$(A^\top A)(A^\top A)^- A^\top = A^\top \quad \text{bzw.} \\ A(A^\top A)^-(A^\top A) = A.$$

**Beweis**

1.  $A^\top A$  ist symmetrisch, also

$$\underbrace{\left(A^\top A(A^\top A)^- A^\top A\right)^\top}_{=A^\top A((A^\top A)^-)^\top A^\top A} = (A^\top A)^\top = A^\top A.$$

Also ist  $\left((A^\top A)^-\right)^\top$  eine verallgemeinerte Inverse von  $A^\top A$ .

2. Es sei  $B = (A^\top A)(A^\top A)^- A^\top - A^\top$ . Wir zeigen, dass  $B = 0$ , indem wir zeigen, dass  $BB^\top = 0$ .

$$\begin{aligned} BB^\top &= \left((A^\top A)(A^\top A)^- A^\top - A^\top\right) \left(A \left((A^\top A)^-\right)^\top A^\top A - A\right) \\ &= A^\top A(A^\top A)^- A^\top A \left((A^\top A)^-\right)^\top A^\top A - \underbrace{A^\top A(A^\top A)^- A^\top A}_{=A^\top A} \\ &\quad - \underbrace{A^\top A \left((A^\top A)^-\right)^\top \cdot A^\top A}_{=A^\top A} + A^\top A \\ &= A^\top A - 2A^\top A + A^\top A = 0. \end{aligned}$$

Die Aussage  $A(A^\top A)^- A^\top A = A$  erhält man, indem man die Matrizen an beiden Seiten der Gleichung  $A^\top A(A^\top A)^- A^\top = A^\top$  transponiert.

□

### 4.3.2 MKQ-Schätzer für $\beta$

**Satz 4.3.5.** Es sei  $X$  eine  $(n \times m)$ -Designmatrix mit  $\text{Rang}(X) = r < m$  in der linearen Regression  $Y = X\beta + \varepsilon$ . Die allgemeine Lösung der Normalengleichung

$$(X^\top X)\beta = X^\top Y$$

sieht folgendermaßen aus:

$$\beta = (X^\top X)^{-1} X^\top Y + \left( \mathcal{I}_m - (X^\top X)^{-1} X^\top X \right) z, \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (4.8)$$

### Beweis

1. Zeigen wir, dass  $\beta$  wie in (4.8) angegeben, eine Lösung der Normalengleichung darstellt.

$$\begin{aligned} X^\top X \beta &= \underbrace{(X^\top X)(X^\top X)^{-1} X^\top Y}_{=X^\top \text{ (Lemma 4.3.4, 2.)}} + \left( X^\top X - \underbrace{X^\top X (X^\top X)^{-1} X^\top X}_{=X^\top X} \right) z \\ &= X^\top Y \end{aligned}$$

2. Zeigen wir, dass eine beliebige Lösung  $\beta'$  der Normalengleichung die Form (4.8) besitzt. Sei  $\beta$  die Lösung (4.8). Wir bilden die Differenz der Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} (X^\top X)\beta' & = & X^\top Y \\ - (X^\top X)\beta & = & X^\top Y \\ \hline (X^\top X)(\beta' - \beta) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \beta' &= (\beta' - \beta) + \beta \\ &= \beta' - \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top Y + \left( \mathcal{I}_m - (X^\top X)^{-1} X^\top X \right) z \\ &= (X^\top X)^{-1} X^\top Y + \left( \mathcal{I}_m - (X^\top X)^{-1} X^\top X \right) z + (\beta' - \beta) \\ &\quad - \underbrace{(X^\top X)^{-1} X^\top X (\beta' - \beta)}_{=0} \\ &= (X^\top X)^{-1} X^\top Y + \left( \mathcal{I}_m - (X^\top X)^{-1} X^\top X \right) \underbrace{\left( z + \beta' - \beta \right)}_{=z_0} \\ &\implies \beta' \text{ besitzt die Darstellung (4.8).} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.3.6.** Der Satz 4.3.5 liefert die Menge aller Extrempunkte der MKQ-Minimierungsaufgabe

$$e(\beta) = \frac{1}{n} |Y - X\beta|^2 \longrightarrow \min_{\beta}.$$

Deshalb soll die Menge aller MKQ-Schätzer von  $\beta$  in (4.8) zusätzliche Anforderungen erfüllen.

**Satz 4.3.7.**

1. Alle MKQ-Schätzer von  $\beta$  haben die Form

$$\bar{\beta} = (X^\top X)^- X^\top Y, \quad \text{wobei}$$

$(X^\top X)^-$  eine beliebige verallgemeinerte Inverse von  $X^\top X$  ist.

2.  $\bar{\beta}$  ist nicht erwartungstreu, denn

$$E\bar{\beta} = (X^\top X)^- X^\top X\beta.$$

3. Es gilt:

$$\text{Cov } \bar{\beta} = \sigma^2 (X^\top X)^- (X^\top X) \left( (X^\top X)^- \right)^\top.$$

**Beweis**

1. Zeigen wir, dass  $e(\beta) \geq e(\bar{\beta}) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{aligned} n \cdot e(\beta) &= |Y - X\beta|^2 = (Y - X\bar{\beta} + X(\bar{\beta} - \beta))^\top (Y - X\bar{\beta} + X(\bar{\beta} - \beta)) \\ &= (Y - X\bar{\beta})^\top (Y - X\bar{\beta}) + (X(\bar{\beta} - \beta))^\top (X(\bar{\beta} - \beta)) \\ &\quad + 2(\bar{\beta} - \beta)^\top X^\top (Y - X\bar{\beta}) \\ &= n \cdot e(\bar{\beta}) + \underbrace{2 \cdot (\bar{\beta} - \beta)^\top (X^\top Y - (X^\top X\bar{\beta}))}_{=0} + |X(\bar{\beta} - \beta)|^2 \\ &\geq n \cdot e(\bar{\beta}) + 0 = n \cdot e(\bar{\beta}), \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$\bar{\beta}$  hat die Form (4.8) mit  $z = 0$  und ist somit eine Lösung der Normalgleichung.

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} E\bar{\beta} &= E \left( (X^\top X)^- X^\top Y \right) = (X^\top X)^- X^\top EY \\ &= (X^\top X)^- X^\top X\beta, \quad \text{weil aus} \\ Y &= X\beta + \varepsilon, \quad E\varepsilon = 0 \quad \text{die Relation } EY = X\beta \text{ folgt.} \end{aligned}$$

Warum ist  $\bar{\beta}$  nicht erwartungstreu? Also warum ist  $(X^\top X)^- X^\top X\beta \neq \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^m$ ?

Da  $\text{Rang}(X) = r < m$ , ist  $\text{Rang}(X^\top X) < m$  und damit  $\text{Rang}((X^\top X)^- X^\top X) < m$ . Darum existiert ein  $\beta \neq 0$ , für das gilt:

$$(X^\top X)^- X^\top X\beta = 0 \neq \beta,$$

also ist  $\bar{\beta}$  nicht erwartungstreu. Es gilt sogar, dass alle Lösungen von (4.8) keine erwartungstreuen Schätzer sind. Wenn wir den Erwartungswert an (4.8) anwenden, so erhielten wir im Falle der Erwartungstreue:

$$\begin{aligned} \forall \beta \in \mathbb{R}^m : \quad & \beta = (X^\top X)^{-1} X^\top X \beta + \left( \mathcal{I}_m - (X^\top X)^{-1} (X^\top X) \right) z, \quad z \in \mathbb{R}^m. \\ \implies & \left( \mathcal{I}_m - (X^\top X)^{-1} (X^\top X) \right) (z - \beta) = 0 \quad \forall z, \beta \in \mathbb{R}^m \\ \implies & (X^\top X)^{-1} (X^\top X) (\beta - z) = \beta - z, \quad \forall z, \beta \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung nicht für alle  $\beta \in \mathbb{R}^m$  gelten kann (siehe oben), führt die Annahme der Erwartungstreue zum Widerspruch.

3. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left( \bar{\beta}_i, \bar{\beta}_j \right) &= \text{Cov} \left( \left( \underbrace{(X^\top X)^{-1} X^\top Y}_A \right)_i, \left( (X^\top X)^{-1} X^\top Y \right)_j \right) \\ &= \text{Cov} \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} Y_k, \sum_{l=1}^n a_{jl} Y_l \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{jl} \underbrace{\text{Cov} \left( Y_k, Y_l \right)}_{=\sigma^2 \cdot \delta_{kl}} = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \left( \sigma^2 A A^\top \right)_{i,j} \\ &= \left( \sigma^2 (X^\top X)^{-1} X^\top X \left( (X^\top X)^{-1} \right)^\top \right)_{i,j}. \end{aligned}$$

□

### 4.3.3 Erwartungstreu schätzbare Funktionen

**Definition 4.3.8.** Eine Linearkombination  $a^\top \beta$  von  $\beta_1, \dots, \beta_m$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$  heißt (*erwartungstreu*) *schätzbar*, falls

$$\exists c \in \mathbb{R}^n : \quad \mathbb{E} \left( c^\top Y \right) = a^\top \beta,$$

das heißt, falls es einen linearen, erwartungstreuen Schätzer  $c^\top Y$  für  $a^\top \beta$  gibt.

**Satz 4.3.9.** Die Funktion  $a^\top \beta$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$  ist genau dann erwartungstreu schätzbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\exists c \in \mathbb{R}^n : \quad a^\top = c^\top X.$
2.  $a$  erfüllt die Gleichung

$$a^\top \left( X^\top X \right)^{-1} X^\top X = a^\top. \tag{4.9}$$

**Beweis**

1. „ $\implies$ “: Falls  $a^\top \beta$  schätzbar, dann existiert ein  $d \in \mathbb{R}^n$  mit  $E(d^\top Y) = a^\top \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m$ . Also

$$\begin{aligned} a^\top \beta &= d^\top EY = d^\top X\beta \Rightarrow (a^\top - d^\top X)\beta = 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m \\ &\implies a^\top = d^\top X, \end{aligned}$$

setze  $c = d$ , damit ist die erste Richtung bewiesen.

„ $\impliedby$ “:  $E(c^\top Y) = c^\top EY = c^\top X\beta = a^\top \beta$ , also ist  $a^\top \beta$  erwartungstreu schätzbar.

2. „ $\implies$ “: Falls  $a^\top \beta$  erwartungstreu schätzbar ist, dann gilt:

$$a^\top (X^\top X)^- X^\top X \stackrel{\text{Punkt 1}}{=} c^\top \underbrace{X \cdot (X^\top X)^- X^\top X}_{=X \text{ (Lemma 4.3.4)}} = c^\top X \stackrel{\text{(Punkt 1)}}{=} a^\top.$$

Also ist (4.9) erfüllt.

„ $\impliedby$ “: Falls  $a^\top (X^\top X)^- X^\top X = a^\top$ , dann gilt mit  $c = (a^\top (X^\top X)^- X^\top)^\top$  nach Punkt 1, dass  $a^\top \beta$  schätzbar ist.

□

**Bemerkung 4.3.10.** Im Falle der Regression mit  $\text{Rang}(X) = m$  ist die Gleichung (4.9) immer erfüllt, denn  $(X^\top X)^- = (X^\top X)^{-1}$  und damit ist  $a^\top \beta$  schätzbar für alle  $a \in \mathbb{R}^m$ .

**Satz 4.3.11** (*Beispiele schätzbarer Funktionen*). Falls  $\text{Rang}(X) = r < m$ , dann sind folgende Linearkombinationen von  $\beta$  schätzbar:

- Die Koordinaten  $\sum_{j=1}^m x_{ij}\beta_j$ ,  $i = 1, \dots, n$  des Erwartungswertvektors  $EY = X\beta$ .
- Beliebige Linearkombinationen schätzbarer Funktionen.

**Beweis**

1. Führe die Bezeichnung  $\tilde{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$ ,  $i = 1, \dots, n$  ein. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_{ij}\beta_j &= \tilde{x}_i^\top \beta \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ X\beta &= (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^\top \beta. \end{aligned}$$

$\tilde{x}_i \beta$  ist schätzbar, falls  $\tilde{x}_i$  die Gleichung (4.9) erfüllt, die für alle  $i = 1, \dots, n$  folgendermaßen in Matrixform dargestellt werden kann:

$$X (X^\top X)^- X^\top X = X,$$

was nach Lemma 4.3.4 Gültigkeit besitzt.

2. Für  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^m$  seien  $a_1^\top \beta, \dots, a_k^\top \beta$  schätzbare Funktionen. Für alle  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^\top \in \mathbb{R}^k$  zeigen wir, dass  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot a_i^\top \beta = \lambda^\top A \beta$  schätzbar ist, wobei  $A = (a_1, \dots, a_k)^\top$ . Zu zeigen bleibt:  $b = (\lambda^\top A)^\top$  erfüllt (4.9), also

$$\lambda^\top A (X^\top X)^- X^\top X = \lambda^\top A.$$

Diese Gleichung stimmt, weil  $a_i^\top (X^\top X)^- X^\top X = a_i^\top$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Nach Satz 4.3.9, 2.) ist  $\lambda^\top A \beta$  schätzbar.

□

**Satz 4.3.12 (Gauß-Markov).** Es sei  $a^\top \beta$  eine schätzbare Funktion,  $a \in \mathbb{R}^m$  im linearen Regressionsmodell  $Y = X\beta + \varepsilon$  mit  $\text{Rang}(X) \leq m$ .

1. Der beste lineare erwartungstreue Schätzer (engl. BLUE - best linear unbiased estimator) von  $a^\top \beta$  ist durch  $a^\top \bar{\beta}$  gegeben, wobei

$$\bar{\beta} = (X^\top X)^- X^\top Y$$

ein MKQ-Schätzer für  $\beta$  ist.

2.  $\text{Var}(a^\top \bar{\beta}) = \sigma^2 a^\top (X^\top X)^- a$ .

**Beweis** Die Linearität von  $a^\top \bar{\beta} = a^\top (X^\top X)^- X^\top Y$  als Funktion von  $Y$  ist klar. Zeigen wir die Erwartungstreue:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a^\top \bar{\beta}) &= a^\top \mathbb{E} \bar{\beta} = a^\top (X^\top X)^- X^\top X \beta \\ &= c^\top \underbrace{X(X^\top X)^- X^\top X}_{=X \text{ (Lemma 4.3.4)}} \beta = \underbrace{c^\top X}_{=a^\top} \beta = a^\top \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Berechnen wir  $\text{Var}(a^\top \bar{\beta})$  (also beweisen wir Punkt 2), und zeigen, dass sie minimal ist.

$$\begin{aligned} \text{Var}(a^\top \bar{\beta}) &= \text{Var} \left( \sum_{i=1}^m a_i \bar{\beta}_i \right) = \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \cdot \text{Cov}(\bar{\beta}_i, \bar{\beta}_j) \\ &= a^\top \text{Cov}(\bar{\beta}) a \stackrel{\text{(Satz 4.3.7)}}{=} a^\top \sigma^2 \left( (X^\top X)^- X^\top X (X^\top X)^- \right)^\top a \\ &= \sigma^2 \cdot a^\top \underbrace{\left( (X^\top X)^- \right)^\top}_{=(X^\top X)^-} X^\top X \underbrace{\left( (X^\top X)^- \right)^\top}_{=(X^\top X)^-} a \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.3.4, 1.)}}{=} \sigma^2 a^\top (X^\top X)^- X^\top X (X^\top X)^- a \\ &\stackrel{\text{Satz 4.3.9, 1.)}}{=} \sigma^2 \cdot c^\top \underbrace{X \cdot (X^\top X) X^\top X}_{=X} (X^\top X)^- X^\top c \\ &= \sigma^2 \underbrace{c^\top X}_{=a^\top} (X^\top X)^- \underbrace{X^\top c}_{=a} = \sigma^2 a^\top (X^\top X)^- a. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, dass für einen beliebigen linearen, erwartungstreuen Schätzer  $b^\top Y$  von  $a^\top \beta$  gilt:  $\text{Var}(b^\top Y) \geq \text{Var}(a^\top \bar{\beta})$ . Weil  $b^\top Y$  erwartungstreu ist, gilt:  $E(b^\top Y) = a^\top \beta$ . Nach Satz 4.3.9 gilt:  $a^\top = b^\top X$ . Betrachten wir die Varianz von

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}(b^\top Y - a^\top \bar{\beta}) \\ &= \text{Var}(b^\top Y) - 2\text{Cov}(b^\top Y, a^\top \bar{\beta}) + \text{Var}(a^\top \bar{\beta}) \\ &= \text{Var}(b^\top Y) - 2\sigma^2 a^\top (X^\top X)^{-1} a + \sigma^2 a^\top (X^\top X)^{-1} a \\ &= \text{Var}(b^\top Y) - \text{Var}(a^\top \bar{\beta}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Cov}(b^\top Y, a^\top \bar{\beta}) &= \text{Cov}(b^\top Y, a^\top (X^\top X)^{-1} X^\top Y) = \sigma^2 a^\top (X^\top X)^{-1} \underbrace{X^\top b}_{=a} \\ &= \sigma^2 a^\top (X^\top X)^{-1} a. \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{Var}(b^\top Y) \geq \text{Var}(a^\top \bar{\beta})$  und  $a^\top \bar{\beta}$  ist ein bester, linearer, erwartungstreuer Schätzer für  $a^\top \beta$ .  $\square$

**Bemerkung 4.3.13.**

1. Falls  $\text{Rang}(X) = m$ , dann ist  $a^\top \hat{\beta}$  der beste lineare, erwartungstreue Schätzer für  $a^\top \beta$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$ .
2. Der Schätzer  $a^\top \bar{\beta} = a^\top (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  hängt nicht von der Wahl der verallgemeinerten Inversen ab, wie im folgenden Satz gezeigt wird.

**Satz 4.3.14.** Der beste lineare, erwartungstreue Schätzer  $a^\top \bar{\beta}$  für  $a^\top \beta$  ist eindeutig bestimmt.

**Beweis**

$$a^\top \bar{\beta} = a^\top (X^\top X)^{-1} X^\top Y \stackrel{\text{Satz 4.3.9, 1.}}{=} c^\top X (X^\top X)^{-1} X^\top Y.$$

Wir zeigen, dass  $X(X^\top X)^{-1} X^\top$  nicht von der Wahl von  $(X^\top X)^{-1}$  abhängt. Zeigen wir, dass für beliebige verallgemeinerte Inverse  $A_1$  und  $A_2$  von  $(X^\top X)$  gilt:  $XA_1X^\top = XA_2X^\top$ . Nach Lemma 4.3.4, 2.) gilt:

$$XA_1X^\top X = X = XA_2X^\top X.$$

Multiplizieren wir alle Teile der Gleichung mit  $A_1X^\top$  von rechts:

$$XA_1 \underbrace{X^\top X A_1 X^\top}_{=X^\top} = XA_1 X^\top = XA_2 \underbrace{X^\top X A_1 X^\top}_{=X^\top}$$

Also ist  $XA_1X^\top = XA_2X^\top$ .  $\square$

#### 4.3.4 Normalverteilte Störgrößen

Sei  $Y = X\beta + \varepsilon$  ein lineares Regressionsmodell mit  $\text{Rang}(X) = r < m$  und  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I})$ . Genauso wie in Abschnitt 4.2.3 können Maximum-Likelihood-Schätzer  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\sigma}^2$  für  $\beta$  und  $\sigma^2$  hergeleitet werden. Und genauso wie im Satz 4.2.7 kann gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \bar{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y \quad \text{und} \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} |Y - X\bar{\beta}|^2.\end{aligned}$$

Jetzt werden die Verteilungseigenschaften von  $\bar{\beta}$  und  $\tilde{\sigma}^2$  untersucht. Wir beginnen mit der Erwartungstreu von  $\tilde{\sigma}^2$ . Wir zeigen, dass  $\tilde{\sigma}^2$  nicht erwartungstreu ist, dafür ist aber der korrigierte Schätzer

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r} |Y - X\bar{\beta}|^2 = \frac{n}{n-r} \tilde{\sigma}^2$$

erwartungstreu.

**Satz 4.3.15.** Der Schätzer  $\bar{\sigma}^2$  ist erwartungstreu für  $\sigma^2$ .

Der Beweis des Satzes 4.3.15 folgt dem Beweis des Satzes 4.2.6, in dem  $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$  und  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} |Y - X\hat{\beta}|^2$  im Fall  $\text{Rang}(X) = m$  betrachtet wurden. Somit ist die Aussage des Satzes 4.2.6 ein Spezialfall des Satzes 4.3.15. Führen wir die Matrix  $D = \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1} X^\top$  ein.

**Lemma 4.3.16.** Für  $D$  gelten folgende Eigenschaften:

1.  $D^\top = D$  (Symmetrie),
2.  $D^2 = D$  (Idempotenz),
3.  $DX = 0$ ,
4.  $\text{Spur}(D) = n - r$ .

**Beweis**

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}D^\top &= \left( \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1} X^\top \right)^\top = \mathcal{I} - X \left( (X^\top X)^{-1} \right)^\top X^\top \\ &= \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1} X^\top = D,\end{aligned}$$

weil  $\left( (X^\top X)^{-1} \right)^\top$  auch eine verallgemeinerte Inverse von  $X^\top X$  ist (vergleiche Lemma 4.3.4, 1.).

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} D^2 &= \left( \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top \right)^2 \\ &= \mathcal{I} - 2X(X^\top X)^{-1}X^\top + \underbrace{X(X^\top X)^{-1}X^\top X(X^\top X)^{-1}X^\top}_{=X(\text{Lemma 4.3.4, 2.})} \\ &= \mathcal{I} - X(X^\top X)^{-1}X^\top = D. \end{aligned}$$

$$3. DX = X - \underbrace{X(X^\top X)^{-1}X^\top X}_{=X(\text{Lemma 4.3.4, 2.})} = X - X = 0.$$

4. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Spur}(D) &= \text{Spur}(I) - \text{Spur}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top\right) \\ &= n - \text{Spur}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top\right). \end{aligned}$$

Verwenden wir die Eigenschaft der symmetrischen idempotenten Matrizen  $A$  aus der linearen Algebra, dass  $\text{Spur}(A) = \text{Rang}(A)$ . Da  $X(X^\top X)^{-1}X^\top$  symmetrisch und idempotent ist, genügt es zu zeigen, dass  $\text{Rang}(X(X^\top X)^{-1}X^\top) = r$ . Nach Lemma 4.3.4 2.) gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(X) &= r = \text{Rang}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top X\right) \\ &\leq \min\left\{\text{Rang}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top\right), \underbrace{\text{Rang}(X)}_{=r}\right\} \\ &\leq \text{Rang}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top\right) \leq \text{Rang}(X) = r \\ &\implies \text{Rang}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top\right) = r \\ &\implies \text{Spur}\left(X(X^\top X)^{-1}X^\top\right) = r. \end{aligned}$$

□

**Beweis des Satzes 4.3.15** Mit Hilfe des Lemmas 4.3.16 bekommt man

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-r} \left| Y - X\bar{\beta} \right|^2 = \frac{1}{n-r} \left| Y - X(X^\top X)^{-1}X^\top Y \right|^2 = \frac{1}{n-r} |DY|^2 \\ &= \frac{1}{n-r} \left| \underbrace{DX}_{=0}\beta + D\varepsilon \right|^2 = \frac{1}{n-r} |D\varepsilon|^2 = \frac{1}{n-r} \varepsilon^\top \underbrace{D^\top D}_{=D^2=D} \varepsilon = \frac{1}{n-r} \varepsilon^\top D\varepsilon. \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-r} \mathbb{E}\left(\varepsilon^\top D\varepsilon\right) = \frac{1}{n-r} \mathbb{E}\text{Spur}\left(\varepsilon^\top D\varepsilon\right) = \frac{1}{n-r} \text{Spur}\left(D \cdot \mathbb{E}\left(\underbrace{\varepsilon\varepsilon^\top}_{\sigma^2 \mathcal{I}}\right)\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n-r} \cdot \text{Spur}(D) = \sigma^2 \text{ nach Lemma 4.3.16, 4.), weil } \mathbb{E}\varepsilon\varepsilon^\top = \sigma^2 \mathcal{I} \\ &\text{wegen } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I}). \end{aligned}$$

□

**Satz 4.3.17.** Es gelten folgende Verteilungseigenschaften:

1.  $\bar{\beta} \sim N\left((X^\top X)^{-1}X^\top X\beta, \sigma^2(X^\top X)^{-1}(X^\top X)\left((X^\top X)^{-1}\right)^\top\right)$ ,
2.  $\frac{(n-r)\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-r}^2$ ,
3.  $\bar{\beta}$  und  $\bar{\sigma}^2$  sind unabhängig.

**Beweis**

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &= (X^\top X)^{-1}X^\top Y = (X^\top X)^{-1}X^\top(X\beta + \varepsilon) \\ &= \underbrace{(X^\top X)^{-1}X^\top X\beta}_{=\mu} + \underbrace{(X^\top X)^{-1}X^\top \varepsilon}_{=A}\end{aligned}$$

und mit der Definition von  $N(\cdot, \cdot)$  bekommt man

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &\sim N\left(\mu, \sigma^2 AA^\top\right) \\ &= N\left((X^\top X)^{-1}X^\top X\beta, \sigma^2(X^\top X)^{-1}X^\top X((X^\top X)^{-1})^\top\right) \\ &\text{mit } AA^\top = (X^\top X)^{-1}X^\top X((X^\top X)^{-1})^\top\end{aligned}$$

2. Es gilt  $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r}\varepsilon^\top D\varepsilon$  aus dem Beweis des Satzes 4.3.15. Deshalb

$$\frac{(n-r)\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^\top}_{\sim N(0, \mathcal{I})} D \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}_{\sim N(0, \mathcal{I})} \stackrel{\text{(Satz 4.1.25)}}{\sim} \chi_{n-r}^2.$$

3. Betrachten wir  $A\varepsilon$  und  $\varepsilon^\top D\varepsilon$ . Es genügt zu zeigen, dass sie unabhängig sind, um die Unabhängigkeit von  $\bar{\beta}$  und  $\bar{\sigma}^2$  zu beweisen, weil  $\bar{\beta} = \mu + A\varepsilon$ ,  $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r}\varepsilon^\top D\varepsilon$ . Es gilt:  $A \cdot \sigma^2 \mathcal{I} \cdot D = 0$ . Nach Satz 4.1.26 sind dann  $A\varepsilon$  und  $\varepsilon^\top D\varepsilon$  unabhängig.

□

### 4.3.5 Hypothesentests

Betrachten wir die Hypothesen  $H_0 : H\beta = d$  vs.  $H_1 : H\beta \neq d$ , wobei  $H$  eine  $(s \times m)$ -Matrix ( $s \leq m$ ) mit  $\text{Rang}(H) = s$  ist, und  $d \in \mathbb{R}^s$ .

Im Satz 4.2.14 haben wir im Fall  $\text{Rang}(X) = r = m$  folgende Testgröße dafür betrachtet:

$$T = \frac{(H\hat{\beta} - d)^\top (H(X^\top X)^{-1}H^\top)^{-1}(H\hat{\beta} - d)}{s\hat{\sigma}^2} \stackrel{(H_0)}{\sim} F_{s, n-m}.$$

Im allgemeinen Fall betrachten wir

$$T = \frac{(H\bar{\beta} - d)^\top (H(X^\top X)^- H^\top)^{-1} (H\bar{\beta} - d)}{s\bar{\sigma}^2}. \quad (4.10)$$

Wir wollen zeigen, dass  $T \stackrel{(H_0)}{\sim} F_{s,n-r}$ . Dann wird  $H_0$  verworfen, falls  $T > F_{s,n-r,1-\alpha}$ . Dies ist ein Test zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Definition 4.3.18.** Die Hypothese  $H_0 : H\beta = d$  heißt *testbar*, falls alle Koordinaten des Vektors  $H\beta$  schätzbare Funktionen sind.

Satz 4.3.9 gibt Bedingungen an  $H$  an, unter denen  $H_0 : H\beta = d$  testbar ist. Diese werden im folgendem Lemma formuliert:

**Lemma 4.3.19.** Die Hypothese  $H_0 : H\beta = d$  ist testbar genau dann, wenn

1.  $\exists (s \times n)$ -Matrix  $C : H = CX$ , oder
2.  $H(X^\top X)^- X^\top X = H$ .

Wir zeigen, dass die Testgröße  $T$  in (4.10) wohldefiniert ist, das heißt, die  $(s \times s)$ -Matrix  $H(X^\top X)^- H^\top$  positiv definit und damit invertierbar ist. Aus

Folgerung 4.3.3 haben wir  $X^\top X = P^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$  für eine  $(m \times m)$ -

Matrix  $P$ , die invertierbar und symmetrisch ist. Deshalb gilt

$$(X^\top X)^- = P \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{m-r} \end{pmatrix} P = P \cdot P,$$

das heißt, dass es eine eindeutige verallgemeinerte Inverse von  $X^\top X$  mit dieser Darstellung gibt. Daraus folgt, dass die  $(s \times s)$ -Matrix  $HPPH^\top = (PH^\top)^\top \cdot PH^\top$  positiv definit ist, weil  $\text{Rang}(PH^\top) = s$ . Sei nun  $(X^\top X)^-$  eine beliebige verallgemeinerte Inverse von  $X^\top X$ . Dann ist mit Lemma 4.3.19

$$H(X^\top X)^- H^\top = CX(X^\top X)^- X^\top C^\top = CXPPX^\top C^\top = HPPH^\top,$$

denn  $X(X^\top X)^- X^\top$  ist invariant bezüglich der Wahl von  $(X^\top X)^-$ , laut Beweis des Satzes 4.3.14. Also ist  $H(X^\top X)^- H^\top$  positiv definit für eine beliebige verallgemeinerte Inverse  $(X^\top X)^-$  und die Testgröße  $T$  somit wohldefiniert.

**Satz 4.3.20.** Falls  $H_0 : H\beta = d$  testbar ist, dann gilt  $T \stackrel{(H_0)}{\sim} F_{s,n-r}$ .

**Beweis** Ähnlich, wie in Satz 4.2.14 gilt

$$\begin{aligned} H\bar{\beta} - d &= H(X^\top X)^{-1} X^\top (X\beta + \varepsilon) - d \\ &= \underbrace{H(X^\top X)^{-1} X^\top X\beta - d}_{=\mu} + \underbrace{H(X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon}_{=B}. \end{aligned}$$

Zeigen wir, dass  $\mu \stackrel{(H_0)}{=} 0$ .

$$\mu \stackrel{(\text{Lemma 4.3.19})}{=} C \cdot \underbrace{X(X^\top X)^{-1} X^\top X}_{=X \text{ (Lemma 4.3.4, 2.)}} \cdot \beta - d = CX\beta - d = H\beta - d \stackrel{(H_0)}{=} 0.$$

Nach Satz 4.3.17 sind  $(H\bar{\beta} - d)^\top (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} (H\bar{\beta} - d)$  und  $s \cdot \bar{\sigma}^2$  unabhängig,  $\frac{(n-r)\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-r}^2$ . Also bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\underbrace{(H\bar{\beta} - d)^\top}_{=\varepsilon^\top B^\top} (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} \underbrace{(H\bar{\beta} - d)}_{=B\varepsilon} \stackrel{(H_0)}{\sim} \chi_s^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\varepsilon^\top B^\top (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} B\varepsilon \\ &= \varepsilon^\top X \underbrace{((X^\top X)^{-})^\top H^\top (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} H(X^\top X)^{-1} X^\top}_{=A} \varepsilon \end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen, dass  $A$  symmetrisch, idempotent und  $\text{Rang}(A) = s$  ist. Zeigen wir zum Beispiel die Idempotenz:

$$\begin{aligned} A^2 &= X \underbrace{((X^\top X)^{-})^\top H^\top (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} H(X^\top X)^{-1} X^\top}_{=H \text{ (Lemma 4.3.19, 2.)}} ((X^\top X)^{-})^\top H^\top \\ &\quad \cdot (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} H(X^\top X)^{-1} X^\top \\ &= X \underbrace{((X^\top X)^{-})^\top H^\top (H(X^\top X)^{-1} H^\top)^{-1} H(X^\top X)^{-1} X^\top}_{=A} = A, \end{aligned}$$

weil  $((X^\top X)^{-})^\top$  auch eine verallgemeinerte Inverse von  $X^\top X$  ist (nach Lemma 4.3.4). Somit hängt auch  $H(X^\top X)^{-1} H^\top = CX(X^\top X)^{-1} X^\top C^\top$  nicht von der Wahl von  $(X^\top X)^{-}$  ab, vgl. den Beweis des Satzes 4.3.14. Nach Satz 4.1.25 ist  $\frac{\varepsilon^\top}{\sigma} A \frac{\varepsilon}{\sigma} \sim \chi_s^2$ , wegen  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathcal{I})$  und somit  $T \stackrel{H_0}{\sim} F_{s, n-r}$ .  $\square$

### 4.3.6 Konfidenzbereiche

Ähnlich wie in Abschnitt 4.2.5 werden wir Konfidenzbereiche für unterschiedliche Funktionen vom Parametervektor  $\beta$  angeben. Aus dem Satz 4.3.20 ergibt sich unmittelbar folgender Konfidenzbereich zum Niveau  $1 - \alpha \in (0, 1)$ :

**Folgerung 4.3.21.** Sei  $Y = X\beta + \varepsilon$  ein multivariates Regressionsmodell mit  $\text{Rang}(X) = r < m$ ,  $H$  eine  $(s \times m)$ -Matrix mit  $\text{Rang}(H) = s$ ,  $s \in \{1, \dots, m\}$  und  $H_0 : H\beta = d$  testbar  $\forall d \in \mathbb{R}^s$ . Dann ist

$$\left\{ d \in \mathbb{R}^s : \frac{(H\bar{\beta} - d)^\top (H(X^\top X)^- H^\top)^{-1} (H\bar{\beta} - d)}{s \cdot \bar{\sigma}^2} \leq F_{s, n-r, 1-\alpha} \right\}$$

ein Konfidenzbereich für  $H\beta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

**Folgerung 4.3.22.** Sei  $h^\top \beta$  eine schätzbare lineare Funktion von  $\beta$ ,  $h \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist

$$\left( h^\top \bar{\beta} - t_{n-r, 1-\alpha/2} \cdot \bar{\sigma} \sqrt{h^\top (X^\top X)^- h}, h^\top \bar{\beta} + t_{n-r, 1-\alpha/2} \cdot \bar{\sigma} \sqrt{h^\top (X^\top X)^- h} \right)$$

ein Konfidenzintervall für  $h^\top \beta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

**Beweis** Setzen wir  $s = 1$  und  $H = h^\top$ . Aus Satz 4.3.20 folgt

$$\begin{aligned} T &= \frac{(h^\top \bar{\beta} - d)^\top (h^\top (X^\top X)^- h)^{-1} (h^\top \bar{\beta} - d)}{\bar{\sigma}^2} = \frac{(h^\top \bar{\beta} - d) (h^\top \bar{\beta} - d)}{\bar{\sigma}^2 (h^\top (X^\top X)^- h)} \\ &= \frac{(h^\top \bar{\beta} - d)^2}{\bar{\sigma}^2 (h^\top (X^\top X)^- h)} \sim F_{1, n-r} \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung  $h^\top \beta = d$ , weil  $h^\top (X^\top X)^- h$  eindimensional (eine Zahl) ist. Deshalb gilt

$$\sqrt{T} = \frac{h^\top \beta - h^\top \bar{\beta}}{\bar{\sigma} \sqrt{h^\top (X^\top X)^- h}} \sim t_{n-r}$$

und somit

$$P\left(-t_{n-r, 1-\alpha/2} \leq \sqrt{T} \leq t_{n-r, 1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Daraus folgt das obige Konfidenzintervall.  $\square$

Man kann sogar eine stärkere Version von 4.3.22 beweisen, die für alle  $h$  aus einem linearen Unterraum gilt:

**Satz 4.3.23** (Konfidenzband von Scheffé). Sei  $H = (h_1, \dots, h_s)^\top$  wobei  $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq s \leq m$  und  $H_0 : H\beta = d$  testbar  $\forall d \in \mathbb{R}^s$ . Sei  $\text{Rang}(H) = s$  und  $\mathcal{L} = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$  der lineare Unterraum, der von den Vektoren  $h_1, \dots, h_s$  aufgespannt wird. Dann gilt:

$$P\left(\max_{h \in \mathcal{L}} \left\{ \frac{(h^\top \beta - h^\top \bar{\beta})^2}{\bar{\sigma}^2 h^\top (X^\top X)^- h} \right\} \leq s F_{s, n-r, 1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

Somit ist

$$\left[ h^\top \bar{\beta} \pm \sqrt{s F_{s, n-r, 1-\alpha}} \cdot \bar{\sigma} \sqrt{h^\top (X^\top X)^{-1} h} \right]$$

ein (gleichmäßiges bzgl.  $h \in \mathcal{L}$ ) Konfidenzintervall für  $h^\top \beta$ .

**Beweis** Setze

$$T_1 := (H\bar{\beta} - H\beta)^\top (H(X^\top X)^{-1}H^\top)^{-1} (H\bar{\beta} - H\beta),$$

dann folgt aus Satz 4.3.20 für alle  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$P(T_1 \leq s \cdot \bar{\sigma}^2 F_{s, n-r, 1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Falls wir zeigen können, dass

$$T_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^s, x \neq 0} \left\{ \frac{(x^\top (H\bar{\beta} - H\beta))^2}{x^\top (H(X^\top X)^{-1}H^\top) x} \right\}, \quad (4.11)$$

dann ist der Satz bewiesen, denn

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(T_1 \leq \underbrace{s \bar{\sigma}^2 F_{s, n-r, 1-\alpha}}_t) \\ &= P\left( \max_{x \in \mathbb{R}^s, x \neq 0} \left\{ \frac{(x^\top (H\bar{\beta} - H\beta))^2}{x^\top (H(X^\top X)^{-1}H^\top) x} \right\} \leq t \right) \\ &= P\left( \max_{x \in \mathbb{R}^s, x \neq 0} \left\{ \frac{((H^\top x)^\top \bar{\beta} - (H^\top x)^\top \beta)^2}{(H^\top x)^\top (X^\top X)^{-1} (H^\top x)} \right\} \leq t \right) \\ &\stackrel{H^\top x \equiv h \in \mathcal{L}}{=} P\left( \max_{h \in \mathcal{L}} \left\{ \frac{(h^\top \bar{\beta} - h^\top \beta)^2}{h^\top (X^\top X)^{-1} h} \right\} \leq s \bar{\sigma}^2 F_{s, n-r, 1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Also, zeigen wir die Gültigkeit von (4.11). Es genügt zu zeigen, dass  $T_1$  die obere Schranke von

$$\frac{(x^\top (H\bar{\beta} - H\beta))^2}{x^\top (H(X^\top X)^{-1}H^\top) x}$$

darstellt, die auch angenommen wird. Da  $H(X^\top X)^{-1}H^\top$  positiv definit ist und invertierbar, existiert eine invertierbare  $(s \times s)$ -Matrix  $B$  mit der Ei-

genschaft  $BB^\top = H(X^\top X)^{-1}H^\top$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(x^\top(H\bar{\beta} - H\beta)\right)^2 &= \left(\underbrace{x^\top B}_{(B^\top x)^\top} \cdot B^{-1}(H\bar{\beta} - H\beta)\right)^2 \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} |B^\top x|^2 \cdot |B^{-1}(H\bar{\beta} - H\beta)|^2 \\ &= x^\top BB^\top x \left(H\bar{\beta} - H\beta\right)^\top \cdot \underbrace{(B^{-1})^\top B^{-1}}_{=(B^\top)^{-1}B^{-1}=(BB^\top)^{-1}} (H\bar{\beta} - H\beta) \\ &= x^\top H(X^\top X)^{-1}H^\top x \cdot \left(H\bar{\beta} - H\beta\right)^\top \left(H(X^\top X)^{-1}H^\top\right)^{-1} (H\bar{\beta} - H\beta). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^\top(H\bar{\beta} - H\beta)\right)^2}{x^\top(H(X^\top X)^{-1}H^\top)x} &\leq \left(H\bar{\beta} - H\beta\right)^\top \left(H(X^\top X)^{-1}H^\top\right)^{-1} (H\bar{\beta} - H\beta) \\ &= T_1. \end{aligned}$$

Für  $x = \left(H(X^\top X)^{-1}H^\top\right)^{-1} \left(H\bar{\beta} - H\beta\right)$  kann man leicht prüfen, dass diese Schranke angenommen wird.  $\square$

### 4.3.7 Einführung in die Varianzanalyse

In diesem Abschnitt geben wir ein Beispiel für die Verwendung linearer Modelle mit Design-Matrix, die keinen vollen Rang besitzt. Dabei handelt es sich um die Aussage der *Variabilität der Erwartungswerte* in der Stichprobe  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ , die auf englisch *analysis of variance*, kurz *ANOVA*, heißt. Später werden wir auch denselben Begriff *Varianzanalyse* dafür verwenden. Betrachten wir zunächst die *einfaktorische Varianzanalyse*, bei der man davon ausgeht, dass die Stichprobe  $(Y_1, \dots, Y_n)$  in  $k$  homogene Teilklassen  $(Y_{ij}, j = 1, \dots, n_i), i = 1, \dots, k$  zerlegbar ist, mit den Eigenschaften:

1.  $E(Y_{ij}) = \mu_i = \mu + \alpha_i, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, k.$
2.  $n_i > 1, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n, \quad \sum_{i=1}^k n_i \alpha_i = 0.$

Dabei ist  $\mu$  ein Faktor, der allen Klassen gemeinsam ist, und  $\alpha_i$  verkörpert die *klassenspezifischen Differenzen* zwischen den Erwartungswerten  $\mu_1, \dots, \mu_k$ . Die Nummer  $i = 1, \dots, k$  der Klassen wird als *Stufe eines Einflussfaktors* (zum Beispiel die Dosis eines Medikaments in einer klinischen Studie) und  $\alpha_i, i = 1, \dots, k$  als *Effekt* der  $i$ -ten Stufe gedeutet. Die Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^k n_i \alpha_i = 0$  bewirkt, dass die Umrechnung  $(\mu_1, \dots, \mu_k) \longleftrightarrow (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$



Die  $(n \times (k + 1))$ -Matrix  $X$  hat den Rang  $k < m = k + 1$ , somit ist die Theorie von Abschnitt 4.3 auf dieses Modell komplett anwendbar.

**Übungsaufgabe 4.3.24.** Zeigen Sie, dass die ANOVA-Hypothese

$$H_0: \alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k$$

nicht testbar ist!

Um eine äquivalente testbare Hypothese aufzustellen, benutzt man

$$H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_1 - \alpha_k = 0 \quad \text{bzw.} \quad H_0: H\beta = 0$$

für die  $(k - 1) \times (k + 1)$ -Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Zeigen Sie es!)

Bei der *zweifaktoriellen Varianzanalyse* wird die Stichprobe  $(Y_1, \dots, Y_n)$  in Abhängigkeit von 2 Faktoren in  $k_1 \cdot k_2$  homogene Gruppen aufgeteilt:

$$Y_{i_1 i_2 j}, \quad j = 1, \dots, n_{i_1 i_2}$$

für  $i_1 = 1, \dots, k_1, i_2 = 1, \dots, k_2$ , sodass

$$\sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} n_{i_1 i_2} = n.$$

Hier wird angenommen, dass

$$E Y_{i_1 i_2 j} = \mu_{i_1 i_2} = \mu + \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_1 i_2}, \quad i_1 = 1, \dots, k_1, i_2 = 1, \dots, k_2,$$

somit stellt man folgendes lineares Modell auf:

$$Y_{i_1 i_2 j} = \mu_{i_1 i_2} + \varepsilon_{i_1 i_2 j} = \mu + \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_1 i_2} + \varepsilon_{i_1 i_2 j}, \\ j = 1, \dots, n_{i_1 i_2}, i_1 = 1, \dots, k_1, i_2 = 1, \dots, k_2.$$

**Übungsaufgabe 4.3.25.** Schreiben Sie die Design-Matrix  $X$  für diesen Fall explizit auf! Zeigen Sie, dass sie wieder keinen vollen Rang besitzt.

## Kapitel 5

# Verallgemeinerte lineare Modelle

Eine andere Klasse von Regressionsmodellen erlaubt einerseits einen beliebigen funktionellen Zusammenhang  $g$  zwischen dem Mittelwert der Zielvariablen  $\mathbb{E}Y_i$  und dem linearen Teil  $X\beta$ , der aus linearen Kombinationen der Einträge der Designmatrix  $X = (x_{ij})$  und des Parametervektors  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$  besteht; andererseits lässt sie andere Verteilungen von  $Y_i$  zu, die nicht notwendigerweise auf der Normalverteilung (und Funktionen davon) basieren. So ist es möglich, Daten  $Y_i$  zu betrachten, die eine endliche Anzahl von Ausprägungen haben (z.B. „Ja“ und „Nein“ in ökonomischen Meinungsumfragen). Die Klasse aller möglichen Verteilungen wird durch die sog. *Exponentialfamilie* begrenzt, die wir in Kürze einführen werden. Sei  $Y_1, \dots, Y_n$  eine Zufallsstichprobe der Zielvariablen des Modells und sei

$$X = (x_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

die Designmatrix der Ausgangsvariablen, die hier nicht zufällig sind.

**Definition 5.1.** Das *verallgemeinerte lineare Modell* ist gegeben durch

$$(g(\mathbb{E}Y_1), \dots, g(\mathbb{E}Y_n))^\top = X\beta \quad \text{mit } \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top \quad (5.1)$$

wobei  $g : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die sog. *Linkfunktion* mit dem Definitionsbereich  $G$  ist. Der Rang  $(X) = m$ .

Unter der Annahme, dass  $g$  explizit bekannt ist, soll hier der Parametervektor  $\beta$  aus  $(Y_1, \dots, Y_n)$  geschätzt werden. Wir setzen voraus, dass  $Y_i, i = 1, \dots, n$ , unabhängig, aber nicht unbedingt identisch verteilt sind. Ihre Verteilung gehört jedoch zur folgenden Klasse von Verteilungen:

## 5.1 Exponentialfamilie von Verteilungen

**Definition 5.1.1.** Die Verteilung einer Zufallsvariable  $Y$  gehört zur *Exponentialfamilie*, falls es Funktionen  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, für die

- im *absolutstetigen Fall* die Dichte von  $Y$  gegeben ist durch

$$f_\theta(y) = \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta + a(y, \tau) - b(\theta)) \right\}, \quad y \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

- im *diskreten Fall* die Zähldichte von  $Y$  gegeben ist durch

$$P_\theta(Y = y) = \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta + a(y, \tau) - b(\theta)) \right\}, \quad y \in C \quad (5.3)$$

wobei  $C$  der (höchstens) abzählbare Wertebereich von  $Y$ ,  $\tau^2$  der sog. *Störparameter*,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  ein Parameter und

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{y\theta + a(y, \tau)}{\tau^2} \right\} dy < \infty \right\}$$

bzw. im diskreten Fall:

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \sum_{y \in C} \exp \left\{ \frac{y\theta + a(y, \tau)}{\tau^2} \right\} < \infty \right\}$$

der natürliche Parameterraum ist, der mindestens zwei verschiedene Elemente enthält.

**Lemma 5.1.2.**  $\Theta$  ist ein Intervall.

**Beweis** Zeigen wir, dass  $\Theta \subset \mathbb{R}$  konvex ist. Dann ist es notwendigerweise ein (möglicherweise unendliches) Intervall. Für beliebige  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  (mindestens ein solches Paar gibt es nach Definition 5.1.1) zeigen wir, dass  $\alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2 \in \Theta$  für alle  $\alpha \in (0, 1)$ . Nehmen wir an, dass die Verteilung von  $Y$  absolut stetig ist. Da  $\theta_i \in \Theta$ , es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta_i + a(y, \tau)) \right\} dy < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Durch die offensichtliche Ungleichung

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \leq \max\{x_1, x_2\}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \alpha \in (0, 1)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left( y(\alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2) + a(y, \tau) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \alpha \frac{1}{\tau^2} \left( y\theta_1 + a(y, \tau) \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{\tau^2} \left( y\theta_2 + a(y, \tau) \right) \right\} \\ &\leq \max_{i=1,2} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left( y\theta_i + a(y, \tau) \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left( y\theta_1 + a(y, \tau) \right) \right\} + \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left( y\theta_2 + a(y, \tau) \right) \right\}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left( y(\alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2) + a(y, \tau) \right) \right\} dy \\ & \leq \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} \left( y\theta_i + a(y, \tau) \right) \right\} dy \\ & < \infty \end{aligned}$$

nach Voraussetzungen des Lemmas.

$$\Rightarrow \alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2 \in \Theta,$$

und  $\Theta$  ist ein Intervall. □

**Beispiel 5.1.3.** Welche Verteilungen gehören zur Exponentialfamilie?

1. **Normalverteilung:** Falls  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , dann ist der Erwartungswert  $\mu$  der uns interessierende Parameter,  $\sigma^2$  ist dagegen der Störparameter. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\mu}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{\sigma^2} - \frac{2y\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left( y\mu - \frac{y^2}{2} - \left( \frac{\mu^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \log(2\pi\sigma^2) \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

so dass  $\theta = \mu, \tau = \sigma,$

$$a(y, \tau) = -\frac{y^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2} \log(2\pi\sigma^2) \quad \text{und} \quad b(\mu) = b(\theta) = \frac{\mu^2}{2}.$$

2. **Bernoulli-Verteilung:**  $Y \sim \text{Bernoulli}(p), p \in [0; 1]$

Sie wird etwa im Falle von Meinungsumfragen in der Marktforschung verwendet, in denen

$Y = \begin{cases} 1, & \text{falls die Antwort „ja“} \\ 0, & \text{falls die Antwort „nein“} \end{cases}$  auf eine Frage der Enquete gegeben wurde.

Dabei ist die Wahrscheinlichkeit  $P(Y = 1) = p$ ,  $P(Y = 0) = 1 - p$ . Dann gilt für  $y \in \{0, 1\}$ :

$$\begin{aligned} P_\theta(Y = y) &= p^y(1-p)^{1-y} = e^{y \log p + (1-y) \log(1-p)} \\ &= e^{y \log \frac{p}{1-p} - (-\log(1-p))} . \end{aligned}$$

Somit gehört die Bernoulli-Verteilung zur Exponentialfamilie mit

$$\theta = \log \frac{p}{1-p}, \quad \tau = 1, \quad a(y, \tau) = 0, \quad b(\theta) = -\log(1-p) = \log(1+e^\theta) .$$

3. **Poisson-Verteilung:** Falls  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , dann gilt für  $y \in \mathbb{N}_0$

$$P_\theta(Y = y) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} = e^{y \log \lambda - \log(y!) - \lambda} .$$

Somit gehört die Poisson-Verteilung zur Exponentialfamilie mit  $\theta = \log \lambda$ ,  $\tau = 1$ ,

$$a(y, \tau) = -\log(y!), \quad b(\theta) = \lambda = e^\theta .$$

**Lemma 5.1.4.** Falls die Verteilung von  $Y$  zur Exponentialfamilie gehört,  $\mathbb{E}Y^2 < \infty$  und  $b : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar ist mit  $b''(\theta) > 0$  für alle  $\theta \in \Theta$ , dann gilt

$$\mathbb{E}Y = b'(\theta), \quad \text{Var}Y = \tau^2 b''(\theta) .$$

**Beweis**

1. Führen wir den Beweis für den Fall der absolut stetigen Verteilung von  $Y$ . Der diskrete Fall lässt sich analog behandeln, wenn man das  $f$ -Zeichen durch  $\sum$  ersetzt. Es gilt

$$\begin{aligned}
 EY &= \int_{\mathbb{R}} y f_{\theta}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} y \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta + a(y, \tau) - b(\theta)) \right\} dy \\
 &= e^{-\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \cdot \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \theta} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta + a(y, \tau)) \right\} dy \\
 &= e^{-\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \cdot \tau^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta + a(y, \tau)) \right\} dy \\
 &= e^{-\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \cdot \tau^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( e^{\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta + a(y, \tau) - b(\theta)) \right\} dy}_{\int_{\mathbb{R}} f_{\theta}(y) dy = 1} \right) \\
 &= e^{-\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \tau^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( e^{\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \right) = e^{-\frac{b(\theta)}{\tau^2}} \cdot \tau^2 \frac{b'(\theta)}{\tau^2} e^{\frac{b(\theta)}{\tau^2}} = b'(\theta).
 \end{aligned}$$

2. Es bleibt noch zu zeigen:

**Übungsaufgabe 5.1.5.** Beweisen Sie die Formel (analog zu 1)

$$\text{Var}Y = \tau^2 b''(\theta).$$

□

## 5.2 Linkfunktion

Die Zielgrößen  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  seien also unabhängig verteilt mit einer Verteilung, die zur Exponentialfamilie gehört und einer (Zähl)Dichte wie in (5.2) bzw. (5.3). Setzen wir voraus, dass  $b : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar ist mit  $b''(\theta) > 0$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Sei ein verallgemeinertes lineares Modell (3.0.1) gegeben.

**Definition 5.2.1.** (Natürliche Linkfunktion) Die Linkfunktion  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *natürlich*, falls  $g = (b')^{-1}$ ,  $G = \{b'(\theta) : \theta \in \Theta\}$  und  $g$  zweimal stetig differenzierbar ist mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in G$ .

Die Frage, warum die natürliche Linkfunktion so heißt, beantwortet folgendes Lemma:

**Lemma 5.2.2.** Falls das verallgemeinerte lineare Modell (5.1) die natürliche Linkfunktion besitzt, dann gilt  $(\theta_1, \dots, \theta_n)^\top = X\beta$ .

**Beweis** Wegen  $b''(\theta) > 0$  ist  $b'(\theta)$  monoton steigend, also invertierbar. Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mu_i = \mathbb{E}Y_i, \quad \eta_i = x_i^\top \beta, \quad x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})^\top, \quad i = 1, \dots, n.$$

Da  $g$  invertierbar ist, gilt

$$\mu_i = g^{-1}(x_i^\top \beta) = g^{-1}(\eta_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Andererseits folgt  $\mu_i = b'(\theta_i)$  aus Lemma 5.1.4, so dass

$$b'(\theta_i) = g^{-1}(\eta_i) \stackrel{\text{Definition 5.2.1}}{=} b'(\eta_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wegen der Monotonie von  $b'$  folgt die Behauptung  $\theta_i = \eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

**Beispiel 5.2.3.** Berechnen wir die natürlichen Linkfunktionen für die Verteilungen von Beispiel 5.1.3.

1. **Normalverteilung:** da  $b(\mu) = \frac{\mu^2}{2}$ , gilt

$$b'(x) = \frac{2x}{2} = x \text{ und somit } g(x) = (b')^{-1}(x) = x$$

Die natürliche Linkfunktion ist  $g(x) = x$ , somit gilt hier

$$(\mu_1, \dots, \mu_n)^\top = (\mathbb{E}Y_1, \dots, \mathbb{E}Y_n)^\top = X\beta$$

Das ist genau der Fall der linearen Regression.

2. **Bernoulli-Verteilung:** da  $b(\theta) = \log(1 + e^\theta)$ , gilt

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{1}{1 + e^x} \cdot e^x = y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x} + 1} &= y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y} - 1 &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow x &= -\log \frac{1 - y}{y} = \log \frac{y}{1 - y} \\ \Rightarrow g(x) &= (b')^{-1}(x) = \log \frac{x}{1 - x} \end{aligned}$$

Das verallgemeinerte lineare Regressionsmodell im Falle der Bernoulli-Verteilung wird *binäre (kategoriale) Regression* genannt. Falls sie mit der natürlichen Linkfunktion verwendet wird, nennt man sie *logistische*

*Regression.* In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} (p_1, \dots, p_n)^\top &= (\mathbb{E}Y_1, \dots, \mathbb{E}Y_n)^\top \\ \theta_i &= \log \frac{p_i}{1-p_i} = x_i^\top \beta, \quad i = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow e^{\theta_i} &= \frac{p_i}{1-p_i} \\ \Leftrightarrow p_i &= \frac{e^{\theta_i}}{1+e^{\theta_i}} \\ \Leftrightarrow p_i &= \frac{e^{x_i^\top \beta}}{1+e^{x_i^\top \beta}}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Das Verhältnis

$$\frac{p_i}{1-p_i} = \frac{P(Y_i = 1)}{P(Y_i = 0)}, \quad i = 1, \dots, n$$

wird in der englischsprachigen Literatur *Odd* genannt. Der Logarithmus des Odds heißt *Logit*:

$$\log \frac{p_i}{1-p_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Logits sind also hier „neue Zielvariablen“, die durch Linearkombinationen  $x_i^\top \beta$  geschätzt werden.

Eine alternative Linkfunktion, die oft benutzt wird, ist  $g(x) = \Phi^{-1}(x)$ , die *Quantilfunktion der Normalverteilung*. Sie ist keine natürliche Linkfunktion. Mit ihrer Hilfe bekommt man das sog. *Probit-Modell*:

$$p_i = \Phi(x_i^\top \beta), \quad i = 1, \dots, n.$$

3. **Poisson-Verteilung:** da  $b(\theta) = e^\theta$ , ist in diesem Fall

$$g(x) = (b')^{-1}(x) = \log x, \quad x > 0$$

die natürliche Linkfunktion. Somit hat das verallgemeinerte lineare Modell mit der natürlichen Linkfunktion folgende Darstellung

$$(\log \lambda_1, \dots, \log \lambda_n)^\top = X\beta \quad \text{oder} \quad \lambda_i = e^{x_i^\top \beta}, \quad i = 1, \dots, n$$

### 5.3 Maximum-Likelihood-Schätzung von $\beta$

Da die (Zähl)Dichte von  $Y_i$  die Gestalt

$$\exp \left\{ \frac{1}{\tau^2} (y\theta_i + a(y, \tau) - b(\theta_i)) \right\}$$

hat und  $Y_i$  unabhängig sind, kann man die Log-Likelihood-Funktion der Stichprobe  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  in folgender Form aufschreiben:

$$\log L(Y, \theta) = \log \prod_{i=1}^n f_{\theta_i}(Y_i) = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n (Y_i \theta_i + a(Y_i, \tau) - b(\theta_i)) \quad (5.4)$$

Aus dem Beweis des Lemmas 3.2.1 folgt, dass

$$\theta_i = (b')^{-1}(g^{-1}(x_i^\top \beta)) \quad i = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

was bedeutet, dass die Funktion  $\log L(Y, \theta)$  eine Funktion von Parameter  $\beta$  ist. In der Zukunft schreiben wir  $\log L(Y, \beta)$ , um diese Tatsache zu unterstreichen. Unser Ziel ist es, den Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\beta}$  für  $\beta$  zu berechnen:

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} \log L(Y, \beta)$$

Dafür wird die notwendige Bedingung des Extremums

$$\frac{\partial \log L(Y, \beta)}{\partial \beta_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

untersucht. Verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$U_i(\beta) = \frac{\partial \log L(Y, \beta)}{\partial \beta_i} \quad i = 1, \dots, m$$

$$U(\beta) = (U_1(\beta), \dots, U_m(\beta))^\top$$

$$I_{ij}(\beta) = \mathbb{E}[U_i(\beta)U_j(\beta)] \quad i, j = 1, \dots, m$$

**Definition 5.3.1.**

1. Die Matrix  $I(\beta) = (I_{ij}(\beta))_{i,j=1}^m$  heißt *Fisher-Informationsmatrix*.
2. Führen wir die sog. *Hesse-Matrix*  $W(\beta)$  als zufällige Matrix

$$W(\beta) = (W_{ij}(\beta))_{i,j=1}^m \quad \text{mit} \quad W_{ij}(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \log L(Y, \beta)$$

ein. Diese  $(m \times m)$ -Matrix enthält die partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Log-Likelihood-Funktion, die für die numerische Lösung der Maximierungsaufgabe

$$\log L(Y, \beta) \rightarrow \max_{\beta}$$

von Bedeutung sein werden.

**Satz 5.3.2.** Man kann zeigen, dass  $U(\beta)$  und  $I(\beta)$  folgende explizite Form haben:

1. Es gilt

$$U_j(\beta) = \sum_{i=1}^n x_{ij} (Y_i - \mu_i(\beta)) \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)}, \quad j = 1, \dots, m$$

2. Es gilt

$$I_{jk}(\beta) = \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \left( \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \right)^2 \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)}, \quad j, k = 1, \dots, m,$$

wobei  $\eta_i = x_i^\top \beta$ ,  $\mu_i(\beta) = g^{-1}(x_i^\top \beta)$  der Erwartungswert von  $Y_i$  und

$$\sigma_i^2(\beta) \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \tau^2 b''(\theta_i) \stackrel{(5.5)}{=} \tau^2 b''((b')^{-1}(g^{-1}(x_i^\top \beta))), \quad i = 1, \dots, n$$

die Varianz von  $Y_i$  ist.

### Beweis

1. Führen wir die Bezeichnung

$$l_i(\beta) = \frac{1}{\tau^2} (Y_i \theta_i + a(Y_i, \tau) - b(\theta_i)), \quad i = 1, \dots, n \text{ ein.}$$

Somit gilt

$$U_j(\beta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Durch die mehrfache Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

Da

$$\frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\tau^2} (Y_i - b'(\theta_i)) \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \frac{1}{\tau^2} (Y_i - \mu_i(\beta)),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} &= \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} \right)^{-1} = \left( (b'(\theta_i))' \right)^{-1} \\ &= (b''(\theta_i))^{-1} \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \left( \frac{\sigma_i^2(\beta)}{\tau^2} \right)^{-1} = \frac{\tau^2}{\sigma_i^2(\beta)} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i}$$

wegen  $\mu_i = \mathbf{E}Y_i = g^{-1}(\eta_i)$ ,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial (x_i^\top \beta)}{\partial \beta_j} = x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} U_j(\beta) &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n x_{ij} (Y_i - \mu_i(\beta)) \cdot \frac{\tau^2}{\sigma_i^2(\beta)} \cdot \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \\ &= \sum_{i=1}^n x_{ij} (Y_i - \mu_i(\beta)) \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \cdot \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

2. Für alle  $i, j = 1, \dots, m$  gilt:

$$\begin{aligned} I_{ij}(\beta) &= \mathbf{E}(U_i(\beta)U_j(\beta)) \\ &= \sum_{k,l=1}^n x_{ki}x_{lj} \underbrace{\text{Cov}(Y_k, Y_l)}_{\delta_{kl}\sigma_k^2(\beta)} \cdot \frac{\partial g^{-1}(\eta_k)}{\partial \eta_k} \frac{\partial g^{-1}(\eta_l)}{\partial \eta_l} \frac{1}{\sigma_k^2(\beta)\sigma_l^2(\beta)} \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj} \left( \frac{\partial g^{-1}(\eta_k)}{\partial \eta_k} \right)^2 \frac{1}{\sigma_k^2(\beta)}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.3.3.** Im Falle der natürlichen Linkfunktion vereinfachen sich die obigen Gleichungen. So sieht die Log-Likelihood-Funktion folgendermaßen aus:

$$\log L(Y, \beta) = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \left( Y_i x_i^\top \beta + a(Y_i, \tau) - b(x_i^\top \beta) \right).$$

Da in diesem Fall  $g^{-1}(\eta_i) = b'(\eta_i)\eta_i = x_i^\top \beta = \theta_i$  gilt

$$\frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} = b''(\theta_i) \stackrel{\text{Lemma 3.1.2}}{=} \frac{1}{\tau^2} \sigma_i^2(\beta)$$

und somit

$$\begin{aligned} U_j(\beta) &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n x_{ij} (Y_i - \mu_i(\beta)) \quad j = 1, \dots, m \\ I_{jk}(\beta) &= \frac{1}{\tau^4} \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \sigma_i^2(\beta) \quad j, k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

**Satz 5.3.4.** Es gilt

$$W_{jk}(\beta) = \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \left( (Y_i - \mu_i(\beta))\nu_i - u_i^2 \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} \right), j, k = 1, \dots, m$$

wobei

$$u_i = \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \quad \text{und} \quad \nu_i = \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\partial^2((b')^{-1} \circ g^{-1}(\eta_i))}{\partial \eta_i^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\mu_i(\beta) = \text{E}Y_i, \quad \sigma_i^2(\beta) = \text{Var}Y_i, \quad \eta_i = x_i^\top \beta.$$

**Beweis** Für beliebige  $j, k = 1, \dots, m$  gilt

$$\begin{aligned} W_{jk}(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta_k} U_j(\beta) \stackrel{\text{Satz 5.3.2}}{=} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \sum_{i=1}^n x_{ij} (Y_i - \mu_i(\beta)) \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} \\ &= \sum_{i=1}^n x_{ij} \left( (Y_i - \mu_i(\beta)) \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left( \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} \frac{\partial \mu_i(\beta)}{\partial \beta_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( x_{ij} (Y_i - \mu_i(\beta)) \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left( \frac{\tau^2 b''((b')^{-1}(g^{-1}(\eta_i))) ((b')^{-1} \circ g^{-1})'(\eta_i)}{\tau^2 b''((b')^{-1}(g^{-1}(\eta_i)))} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \right)^2 \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} x_{ik} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik} \left( (Y_i - \mu_i(\beta))\nu_i - u_i^2 \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \cdot \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} &\stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \frac{\partial b'(\theta_i)}{\partial \eta_i} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{1}{b''(\theta_i)} \\ &\stackrel{\text{und Satz 5.3.2}}{=} \frac{\partial b'(\theta_i)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{b''(\theta_i)} = \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} \left( \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \cdot \frac{1}{\sigma_i^2(\beta)} \right) = \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_k} \stackrel{\eta_i = x_i^\top \beta}{=} \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} \cdot x_{ik},$$

dabei ist

$$\frac{\partial \overbrace{g^{-1}(\eta_i)}^{\mu_i(\beta)}}{\partial \beta_k} = \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial g^{-1}(\eta_i)}{\partial \eta_i} \cdot x_{ik}$$

und  $\theta_i = (b')^{-1} \circ g^{-1}(\eta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . □

Für verallgemeinerte lineare Modelle mit natürlichen Linkfunktionen gilt insbesondere

$$W(\beta) = -I(\beta) = -\frac{1}{\tau^4} \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \sigma_i^2(\beta) \quad (5.6)$$

weil in diesem Fall  $\nu_i = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .  $W(\beta)$  ist also deterministisch. Tatsächlich ist nach Lemma 5.2.2  $\theta_i = x_i^\top \beta = \eta_i$  und somit  $\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Aus Bemerkung 5.3.3 außerdem:  $u_i^2 = \frac{1}{\tau^4} \sigma_i^4(\beta)$ .

**Beispiel 5.3.5.** Wie sehen  $U(\beta)$ ,  $I(\beta)$  und  $W(\beta)$  für unsere Modelle aus Beispiel 2.6.2 (natürliche Linkfunktionen) aus?

1. **Normalverteilung:** dieser Fall entspricht der üblichen multivariaten linearen Regression mit normalverteilten Störgrößen. In diesem Fall gilt  $\mu = X\beta$ ,  $\tau^2 = \sigma^2$ .

Aus Bemerkung 5.3.3 folgt

$$\begin{aligned} U(\beta) &= \frac{1}{\sigma^2} X^\top (Y - X\beta) \\ I(\beta) &= (\mathbb{E}(U_i(\beta) \cdot U_j(\beta)))_{i,j=1,\dots,m} = \frac{1}{\sigma^2} X^\top X \\ W(\beta) &= -I(\beta) \end{aligned}$$

2. **Logistische Regression:** hier gilt  $\tau^2 = 1$ ,  $\mu_i = p_i$ ,  $\sigma_i^2 = p_i(1 - p_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $p_i \in (0, 1)$  und somit

$$\begin{aligned} U(\beta) &= X^\top (Y - p) \\ I(\beta) &= X^\top \text{diag}(p_i(1 - p_i)) X \\ W(\beta) &= -I(\beta) \end{aligned}$$

wobei  $p = (p_1, \dots, p_n)^\top$ .

3. **Poisson-Regression:** es gilt  $\tau^2 = 1$ ,  $\mu_i = \lambda_i = \sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$  und somit

$$\begin{aligned} U(\beta) &= X^\top (Y - \lambda) \\ I(\beta) &= X^\top \text{diag}(\lambda_i) X \\ W(\beta) &= -I(\beta) \end{aligned}$$

wobei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$

Wann ist die Lösung des Gleichungssystems  $U(\beta) = 0$  auch ein Maximum-Punkt der Funktion  $\log L(Y, \beta)$ ?

Mit anderen Worten: Wann existiert der ML-Schätzer  $\hat{\beta}$  von  $\beta$ , der eindeutig bestimmt ist?

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmax}} \log L(Y, \beta)$$

An der hinreichenden Bedingung eines Maximums folgt, dass die Hesse-Matrix  $W(\beta)$  negativ definit sein muss. Betrachten wir den Spezialfall der natürlichen Linkfunktion. Dann gilt nach Bemerkung 5.3.3:

- Das Gleichungssystem  $U(\beta) = 0$  schreibt sich  $U(\beta) = \frac{1}{\tau^2} X^\top (Y - \mu(\beta)) = 0$
- Die Matrix  $W(\beta) = -\frac{1}{\tau^4} X^\top \operatorname{diag}(\sigma_i^2(\beta)) X$  ist negativ definit, falls zusätzlich  $\operatorname{rg}(X) = m$  und  $0 < \sigma_i^2(\beta) < \infty$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Unter diesen Bedingungen existiert also ein eindeutiger ML-Schätzer  $\hat{\beta}$  für  $\beta$ .

Geben wir jetzt Verfahren an, die das (im Allgemeinen nicht lineare) Gleichungssystem  $U(\beta) = 0$  numerisch lösen. Diese Ansätze sind iterativ, d.h. sie nähern sich schrittweise dem ML-Schätzer  $\hat{\beta}$  an.

**Newton-Verfahren** Wähle einen geeigneten Startwert  $\hat{\beta}_0 \in \mathbb{R}^m$ . Im Schritt  $k + 1$ , berechne  $\hat{\beta}_{k+1}$  aus  $\hat{\beta}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  auf folgende Art und Weise:

- Nimm die Taylor-Entwicklung von  $U(\beta)$  bis zur ersten Ordnung an der Stelle  $\hat{\beta}_k$ :  $U(\beta) \approx U(\hat{\beta}_k) + W(\hat{\beta}_k)(\beta - \hat{\beta}_k)$ .
- Setze sie gleich Null:  $U(\hat{\beta}_k) + W(\hat{\beta}_k)(\beta - \hat{\beta}_k) = 0$
- Die Lösung dieses Gleichungssystems ist  $\hat{\beta}_{k+1}$ :

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k - W^{-1}(\hat{\beta}_k) \cdot U(\hat{\beta}_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

vorausgesetzt, dass  $W(\hat{\beta}_k)$  invertierbar ist.

Breche den Iterationsprozess ab, sobald  $|\hat{\beta}_{k+1} - \hat{\beta}_k| < \delta$  für eine vorgegebene Genauigkeit  $\delta > 0$  ist.

Das Konvergenzverhalten dieses Verfahrens hängt entscheidend von der Wahl von  $\hat{\beta}_0$  ab, für dessen Konvergenz  $\hat{\beta}_0$  nah genug bei  $\hat{\beta}$  liegen muss. Ein weiterer Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die zufällige Matrix  $W(\beta)$  unter Umständen nicht invertierbar ist. Deswegen schlagen wir jetzt eine Modifikation des Newton-Verfahrens vor, bei der  $W(\beta)$  durch den Erwartungswert

$$\mathbb{E}W(\beta) = -I(\beta) \tag{5.7}$$

ersetzt wird. Dass die Identität (5.6) stimmt, folgt aus dem Satz 5.3.4, und der Tatsache, dass  $\mathbb{E}Y_i = \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wenn man voraussetzt, dass  $rg(X) = m$  und  $u_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so ist nach Satz 5.3.2  $I(\beta)$  invertierbar. Dieses Verfahren wird *Fisher Scoring* genannt.

Der einzige Unterschied zu den Schritten des Newton-Verfahrens besteht beim Fisher Scoring darin, dass man in Schritt 2 die iterative Gleichung

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k + I^{-1}(\hat{\beta}_k)U(\hat{\beta}_k)k = 0, 1, \dots$$

einsetzt.

Im Falle einer natürlichen Linkfunktion gilt nach Bemerkung 3.3.1

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{k+1} &= \hat{\beta}_k + \tau^4 \left( X^\top \text{diag}(\sigma_i^2(\hat{\beta}_k)) X \right)^{-1} \frac{1}{\tau^2} \left( X^\top (Y - \mu(\hat{\beta}_k)) \right) \\ &= \hat{\beta}_k + \tau^2 \left( X^\top \text{diag}(\sigma_i^2(\hat{\beta}_k)) X \right)^{-1} \left( X^\top (Y - \mu(\hat{\beta}_k)) \right). \end{aligned}$$

## 5.4 Asymptotische Tests für $\beta$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Testregel für die Hypothese

$$H_0 : \beta = \beta_0 \text{ vs. } H_1 : \beta \neq \beta_0 \quad \text{mit} \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top \beta_0 = (\beta_{01}, \dots, \beta_{0m})^\top$$

zu konstruieren. Insbesondere sind die Haupthypothesen  $H_0 : \beta = 0$  bzw.  $H_0 : \beta_j = 0$  von Interesse, weil sie die Tatsache reflektieren, dass die Zielvariablen  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  von einigen Ausgangsvariablen (z.B.  $(x_{1j}, \dots, x_{nj})^\top$ ) im Falle der Hypothese  $\beta_j = 0$ ) unabhängig sind.

Um solche Hypothesen testen zu können, werden Teststatistiken  $T_n$  vorgeschlagen, die asymptotisch (für  $n \rightarrow \infty$ ) eine bekannte Prüfverteilung (z.B. multivariate Normalverteilung oder  $\chi^2$  - Verteilung) besitzen. Dafür sind gewisse Vorarbeiten notwendig. Sei

$$g(\mathbb{E}Y_i) = X_i \beta_i = 1, \dots, n$$

ein verallgemeinertes lineares Modell mit natürlicher Linkfunktion  $g$ . Seien  $L(Y, \beta)$ ,  $U(\beta)$  und  $I(\beta)$  die Likelihood-Funktion, der Vektor der partiellen Ableitungen von  $\log L(Y, \beta)$  bzw. die Fisher-Informationsmatrix in diesem Modell.

Durch  $\hat{\beta}_n = \hat{\beta}(Y_1, \dots, Y_n, X)$  bezeichne man eine Folge von Schätzern für  $\beta$ . Es gelten folgende Voraussetzungen:

1. Es existiert ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^m$ , so dass alle Zeilen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von  $X$  in  $K$  liegen. Dabei soll  $\theta = x^\top \beta \in \Theta$  für alle  $\beta \in \mathbb{R}^m$  und  $x \in K$ .

2. Es existiert eine Folge  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von diagonalen  $(m \times m)$ -Matrizen  $\Gamma_n = \Gamma_n(\beta)$  mit positiven Diagonalelementen und den Eigenschaften  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^\top I_n(\beta) \Gamma_n = K^{-1}(\beta)$ , wobei  $K(\beta)$  eine symmetrische positiv definite  $(m \times m)$ -Matrix ist, für alle  $\beta \in \mathbb{R}^m$ .

**Satz 5.4.1.** Unter obigen Voraussetzungen gilt:

es existiert eine  $\Gamma_n$ -Konsistente Folge von ML-Schätzern  $\{\hat{\beta}_n\}$  für  $\beta$ , (d.h.  $P(\Gamma_n^{-1}|\hat{\beta}_n - \beta| \leq \varepsilon, U(\hat{\beta}_n) = 0) \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ), so dass

1.  $T_n^* = \Gamma_n^{-1}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, K(\beta))$  und
2.  $T_n = 2(\log L(Y, \hat{\beta}_n) - \log L(Y, \beta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_m^2$   $m = \dim \beta$

**Bemerkung 5.4.2.** (vgl. [27], S.288-292)

1. Oft wählt man  $\Gamma_n = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. Bisher wurde stets angenommen, dass der Störparameter  $\tau^2$  bekannt ist. Falls es nicht der Fall ist, kann  $\tau^2$  durch

$$\hat{\tau}^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \mu_i(\hat{\beta}_n))^2}{b''(\hat{\theta}_{ni})}$$

geschätzt werden, wobei  $\hat{\theta}_{ni} = (b')^{-1}(\mu_i(\hat{\beta}_n))$ ,  $i = 1, \dots, n$  ist. Dieser Schätzer ist ein empirisches Analogon der Gleichung  $\tau^2 = \frac{\text{Var}Y_i}{b''(\theta_i)}$  aus Lemma 5.1.4.

3. Die Aussage 2. des Satzes 5.4.1 gilt auch, wenn man den unbekannt Parameter  $\tau^2$  durch einen konsistenten Schätzer  $\tau_n^2$  ersetzt.

Wie verwendet man nun den Satz 5.4.1 zum Testen der Hypothesen

$$H_0 : \beta = \beta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta \neq \beta_0$$

oder komponentenweise

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j0}, \quad j = 1, \dots, m \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j_1 : \beta_{j_1} \neq \beta_{j_10} \quad ?$$

Sei

$$g(\mathbb{E}Y_i) = \sum_{j=1}^m x_{ij} \beta_j, \quad i = 1, \dots, n$$

ein verallgemeinertes lineares Modell mit natürlicher Linkfunktion  $g$ . Nach Bemerkung 5.3.3 gilt

$$\log L(Y, \beta) = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \left( Y_i x_i^\top \beta + a(Y_i, \tau) - b(x_i^\top \beta) \right)$$

wobei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  und  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})^\top$ . Deshalb gilt

$$T_n = \frac{2}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \left( Y_i x_i^\top (\hat{\beta}_n - \beta_0) - b(x_i^\top \hat{\beta}_n) + b(x_i^\top \beta_0) \right)$$

Bei Vorgabe eines Exponential-Modells ( $\tau, b$  - bekannt), der Stichprobe der Zielvariablen  $Y$  und der Designmatrix  $X$  wird  $H_0$  verworfen, falls  $T_n > \chi_{m,1-\alpha}^2$ , wobei  $m$  die Anzahl der Parameter im Modell,  $\chi_{m,1-\alpha}^2$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der  $\chi_m^2$  - Verteilung und  $\alpha \in (0, 1)$  das Signifikanzniveau des asymptotischen Tests ist. Dieser Test ist nur für relativ große  $n$  anwendbar. Der Fehler 1. Art hat dabei (für  $n \rightarrow \infty$ ) die asymptotische Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ . Falls eine einfache Hypothese

$$H_0 : \beta_j = 0 \text{ vs. } H_1 : \beta_j \neq 0$$

getestet werden soll, benutzt man die aus der Statistik  $T_n^*$  abgeleitete Teststatistik  $T_n^1$ :

$H_0$  wird verworfen, falls

$$|T_n^1| = \frac{|\hat{\beta}_{nj}|}{(\Gamma_n(\hat{\beta}_n))_{jj}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

wobei  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der  $\mathcal{N}(0, 1)$  - Verteilung ist. Hierbei ist  $\{\Gamma_n\}$  so gewählt worden, dass  $K(\beta) = Id$  ist,  $\forall \beta \in \mathbb{R}^m$ . Dies ist ein asymptotischer Test zum Niveau  $\alpha$ , weil

$$\begin{aligned} P_{H_0}(|T_n^1| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}) &= 1 - P_{H_0}(|T_n^*| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) + \underbrace{\Phi(-z_{1-\frac{\alpha}{2}})}_{1-\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}})} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha \end{aligned}$$

wobei

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

die Verteilungsfunktion der  $\mathcal{N}(0, 1)$  - Verteilung ist.

**Beispiel 5.4.3.** (Kreditrisikoprüfung) (vgl. Fahrmeir, L., Kneib, T., Lang, S. - Regression, S.208ff) Es liegt folgender Datensatz einer süddeutschen Bank aus den 1990er Jahren vor: Es werden Ergebnisse der Kreditrisikoprüfung von  $n = 1000$  Kreditanträgen (ca. 700 gute und 300 schlechte Kredite) analysiert:

Die Zielvariable ist gegeben durch

$$Y_i = \begin{cases} 0, & \text{falls das Darlehen vom Kunden } i \text{ zurückgezahlt wurde} \\ 1, & \text{falls das Darlehen vom Kunden } i \text{ nicht zurückgezahlt wurde} \end{cases}$$

Die Designmatrix  $X$  enthält folgende Zusatzinformationen über den Kunden:

Variable	Bedeutung
$x_{i1} = \begin{cases} 1, & \text{kein Konto} \\ 0, & \text{Konto} \end{cases}$	Kontoführung des Kontos bei der Bank
$x_{i2} = \begin{cases} 1, & \text{gutes Konto} \\ 0, & \text{kein oder schwaches Konto} \end{cases}$	Bewertung der Kontoführung
$x_{i3}$	Laufzeit des Kredits in Monaten
$x_{i4}$	Höhe des Kredits in $\text{€}$
$x_{i5} = \begin{cases} 1, & \text{gut} \\ 0, & \text{schlecht} \end{cases}$	Zahlungsverhalten beim Kunden
$x_{i6} = \begin{cases} 1, & \text{privat} \\ 0, & \text{geschäftlich} \end{cases}$	Verwendungszweck

**Frage:** Wie soll  $\hat{\beta}$  geschätzt werden?

Als Modell wird das Logit-Modell gewählt mit  $p_i = P(Y_i = 1)$ , für  $i = 1, \dots, n$ :

$$\log \frac{p_i}{1 - p_i} = \beta_0 + x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + x_{i3}\beta_3 + x_{i4}\beta_4 + x_{i5}\beta_5 + x_{i6}\beta_6,$$

für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_6)^\top$  und  $m = 7$ .

**Ziel:** Schätze  $\beta_0, \dots, \beta_6$  und prüfe, welche Faktoren für die künftige Kreditvergabe relevant sind.

$H_0 : \beta_i = 0$  (Merkmal  $x_i$  beeinflusst die Kreditvergabe nicht) wird abgelehnt, falls  $p$ -Wert  $\leq \alpha$ . Man sieht, dass u.a. auch  $\beta_4$  für die Kreditvergabe nicht relevant ist, was der Intuition widerspricht. Eine Verfeinerung des Modells ist notwendig:

**Neues Modell:**

$$g(\mathbb{E}Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3^1 x_{i3} + \beta_3^2 x_{i3}^2 + \beta_4^1 x_{i4} + \beta_4^2 x_{i4}^2 + \beta_5 x_{i5} + \beta_6 x_{i6}$$

**Frage:** Welches Modell ist besser?

		$Y = 1$	$Y = 0$
$x_1$	kein Konto	45.0	20.0
$x_2$	gut	15.3	49.8
	schlecht	39.7	30.2
$x_4$	Kredithöhe	$Y = 1$	$Y = 0$
	$0 < \dots \leq 500$	1.00	2.14
	$500 < \dots \leq 1000$	11.33	9.14
	$1000 < \dots \leq 1500$	17.00	19.86
	$1500 < \dots \leq 2500$	19.67	24.57
	$2500 < \dots \leq 5000$	25.00	28.57
	$5000 < \dots \leq 7500$	11.33	9.71
	$7500 < \dots \leq 10000$	6.67	3.71
	$10000 < \dots \leq 15000$	7.00	2.00
	$15000 < \dots \leq 20000$	1.00	0.29
	$x_5$	Frühere Kredite	$Y = 1$
gut		82.33	94.95
schlecht		17.66	5.15
$x_6$	Verwendungszweck	$Y = 1$	$Y = 0$
	privat	57.53	69.29
	beruflich	42.47	30.71

Tabelle 5.1: Auszug aus dem Originaldatensatz

Mit anderen Worten, wir testen

$H_0 : \beta_3^2 = 0$  (lineares Modell) vs.  $H_1 : \beta_3^2 \neq 0$  (quadratisches Modell) bzw.

$H_0 : \beta_4^2 = 0$  (lineares Modell) vs.  $H_1 : \beta_4^2 \neq 0$  (quadratisches Modell)

Dabei verallgemeinern wir die Art der statistischen Hypothesen wie folgt:  
es wird

$$H_0 : C\beta = d \text{ vs. } H_1 : C\beta \neq d$$

getestet, wobei  $C$  eine  $(r \times m)$ -Matrix mit  $rg C = r \leq m$  ist und  $d \in \mathbb{R}^r$ .  
Zum Vergleich: früher haben wir

$$H_0 : \beta = \beta_0 \text{ vs. } H_1 : \beta \neq \beta_0, \beta_0 \in \mathbb{R}^m$$

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$
0.274	0.393	20.903	3271	0.911	0.657

Tabelle 5.2: Mittelwerte  $\bar{x}_j$  von  $x_{ij}$  im Datensatz

	Wert	$\sqrt{(I_n^{-1}(\hat{\beta}))_{ii}}$	$T_n^1$	p-Wert
$\beta_0$	0.281	0.303	-0.94	0.347
$\beta_1$	0.618	0.175	3.53	< 0.001
$\beta_2$	-1.338	0.201	-6.65	< 0.001
$\beta_3$	0.033	0.008	4.29	< 0.001
$\beta_4$	0.023	0.033	0.72	0.474
$\beta_5$	-0.986	0.251	-3.93	< 0.001
$\beta_6$	-0.426	0.266	-2.69	0.007

Tabelle 5.3: Ergebnis zur ML-Schätzung durch das Fisher Scoring Verfahren, wobei  $\sqrt{(I_n^{-1}(\hat{\beta}))_{ii}}$  als asymptotische Standardabweichung von  $\hat{\beta}_i$  interpretiert wird. Signifikanzniveau:  $\alpha = 0.001$

	Wert	$\sqrt{(I_n^{-1}(\hat{\beta}))_{ii}}$	$T_n^1$	p-Wert
$\beta_0$	-0.488	0.390	-1.25	0.211
$\beta_1$	0.618	0.176	3.51	< 0.001
$\beta_2$	-1.337	0.202	-6.61	< 0.001
$\beta_3^1$	0.092	0.025	3.64	< 0.001
$\beta_3^2$	-0.001	< 0.001	-2.20	0.028
$\beta_4^1$	-0.264	0.099	-2.68	0.007
$\beta_4^1$	0.023	0.007	3.07	0.002
$\beta_5$	-0.995	0.255	-3.90	< 0.001
$\beta_6$	-0.404	0.160	-2.52	0.012

Tabelle 5.4:  $p$ -Werte für die Regressionskoeffizienten des neuen Modells

getestet. Natürlich ist  $\beta = \beta_0$  ein Spezialfall von  $C\beta = d$  mit  $C = \text{Id}$ ,  $d = \beta_0$ . Die neuen Hypothesen beinhalten Aussagen über die Linearkombinationen der Parameterwerte. Wie soll  $H_0$  vs.  $H_1$  getestet werden?

Sei  $\tilde{\beta}_n$  der ML-Schätzer von  $\beta$  unter  $H_0$ , d.h.  $\tilde{\beta}_n = \underset{\beta \in \mathbb{R}^m: C\beta=d}{\operatorname{argmax}} \log L(Y, \beta)$

Sei  $\hat{\beta}_n$  der ML-Schätzer von  $\beta$  unrestringiert, d.h.  $\hat{\beta}_n = \underset{\beta \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmax}} \log L(Y, \beta)$ .

Die Idee der folgenden Tests ist es,  $\tilde{\beta}_n$  mit  $\hat{\beta}_n$  zu vergleichen. Falls die Abweichung  $\hat{\beta}_n - \tilde{\beta}_n$  groß ist, soll  $H_0$  abgelehnt werden.

**Satz 5.4.4.** Sei  $\log L(Y, \beta)$  die Log-Likelihood-Funktion der Stichprobe der Zielvariablen

$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ ,  $I_n(\beta)$  die Fisher-Informationsmatrix,  $U(\beta)$  die Score-Funktion des verallgemeinerten linearen Modells mit natürlicher Linkfunktion

$$g : g(\mathbb{E}Y_i) = X_i \beta \quad i = 1, \dots, n$$

Wir führen folgende Teststatistiken ein:

1. **Likelihood-Ratio-Teststatistik:**

$$\tilde{T}_n = 2(\log L(Y, \hat{\beta}_n) - \log L(Y, \tilde{\beta}_n))$$

2. **Wald-Statistik:**

$$\tilde{T}_n^* = (C\hat{\beta}_n - d)^\top (CI_n^{-1}(\hat{\beta}_n)C^\top)^{-1} (C\hat{\beta}_n - d)$$

3. **Score-Statistik:**

$$\bar{T}_n^* = U(\tilde{\beta}_n)^\top I_n^{-1}(\tilde{\beta}_n) U(\tilde{\beta}_n)$$

Unter gewissen Bedingungen an die Schätzer  $\hat{\beta}$  und  $\tilde{\beta}$  (vgl. Satz 5.4.1) sind die Teststatistiken 1 - 3 asymptotisch  $\chi_m^2$ -verteilt: z.B. gilt für die Likelihood-Ratio-Teststatistik

$$\tilde{T}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_m^2$$

**Folgerung 5.4.5.** Der Satz 5.4.4 liefert uns folgende Entscheidungsregel:  $H_0$  wird abgelehnt, falls

$$\tilde{T}_n(\tilde{T}_n^*, \bar{T}_n) > \chi_{m, 1-\alpha}^2$$

Dies ist ein asymptotischer Test zum Signifikanzniveau  $\alpha$ .

**Beispiel 5.4.6** (Fortsetzung). Es ergeben sich folgende Werte für die Teststatistiken:

$$\tilde{T}_n = 12.44 \text{ p-Wert: } 0.0020$$

$$\tilde{T}_n^* = 11.47 \text{ p-Wert: } 0.0032$$

Für  $\alpha = 0.005$  gilt p-Wert  $\leq \alpha$ , somit wird  $H_0 : \beta_4^2 = 0$  abgelehnt  $\Rightarrow$  das quadratische verallgemeinerte lineare Modell ist besser.

## 5.5 Kriterien zur Modellwahl bzw. Modellanpassung

Es ist bekannt, dass die Güte der Anpassung eines parametrischen Modells an die Daten im Allgemeinen steigt, wenn die Anzahl der Parameter erhöht wird. Die Aufgabe eines Statistikers ist es aber, ein gut passendes Modell mit einer möglichst kleinen Anzahl an Parametern zu finden. Deshalb verwendet man folgendes Informationskriterium von Akaike, um Modelle mit (möglicherweise) unterschiedlichen Parametersätzen zu vergleichen.

**Informationskoeffizient von Akaike:**

$$\text{AIC} = -2 \log L(Y, \hat{\beta}) + 2m$$

wobei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  die Stichprobe der Zielvariablen im verallgemeinerten linearen Modell und  $\hat{\beta}$  der dazugehörige ML-Schätzer sei. Der Wert von AIC berücksichtigt einerseits die Forderung der Maximalität der Log-Likelihood-Funktion  $\log L(Y, \hat{\beta})$ , andererseits bestraft er Modelle mit einer großen Anzahl von Parametern  $m$ . Das Modell mit dem kleineren AIC ist als besseres Modell einzustufen. Manchmal verwendet man statt AIC den normierten Koeffizienten  $\text{AIC}/n$ .

**Beispiel 5.5.1** (Fortsetzung). Berechnen wir den Informationskoeffizienten von Akaike für das lineare und quadratische Logit-Modell im Beispiel der Kreditrisikoprüfung:

$$\begin{aligned} \text{Lineares Modell : AIC} &= 1043.815 \\ \text{Quadratisches Modell : AIC} &= 1035.371 \end{aligned}$$

Man sieht anhand des AIC, dass die Wahl zu Gunsten des quadratischen Modells ausfällt.

Der Nachteil der oben beschriebenen AIC-Regel liegt darin, dass die endgültige Entscheidung dem Statistiker überlassen bleibt. Deshalb ist es wünschenswert, einen statistischen Test zu konstruieren, der die Güte der Modellanpassung beurteilen kann.

Wir werden jetzt den  $\chi^2$ -Test beschreiben. Sei dazu

$$g(\mathbb{E}Y_i) = X_i \beta \quad i = 1, \dots, n$$

ein verallgemeinertes lineares Modell mit Linkfunktion  $g$  und Parametervektor  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$ . Teilen wir die Zielvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  in  $k$  Gruppen auf, so dass sie möglichst homogen in Bezug auf die zu schätzenden Parameter sind. So liegt z.B. eine solche Aufteilung vor, wenn der Wertebereich

der Zielvariablen  $Y_i$  „geschickt“ in  $k > m$ <sup>1</sup> Intervalle  $(a_l, b_l]$  unterteilt wird:

$$-\infty \leq a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < b_{k-1} = a_k < b_k \leq +\infty$$

In die Gruppe  $l$  fallen alle Beobachtungen  $Y_i$ , die zu  $(a_l, b_l]$  gehören. Dabei müssen  $(a_l, b_l]$  so gewählt werden, dass  $\hat{\mu}_j = g^{-1}(X_j \hat{\beta})$  innerhalb einer Gruppe konstant wird:  $\hat{\mu}_j \equiv \hat{\mu}_l \forall j$  aus Gruppe  $l$ .<sup>2</sup> Sei

- $n_l = \# \{Y_j : Y_j \in (a_l, b_l]\}$  die Klassenstärke der Klasse  $l$
- $\bar{Y}_l = \frac{1}{n_l} \sum Y_j$  das arithmetische Mittel innerhalb der Klasse  $l$
- $\hat{\beta}$  der ML-Schätzer von  $\beta$ , der aus  $Y$  gewonnen wurde
- $l_l(\beta) = \sum \log f_\theta(Y_j)$  die Log-Likelihood-Funktion der Zielvariablen  $Y_i$  innerhalb der Gruppe  $l$
- $\hat{\mu}_l = g^{-1}(X_l \hat{\beta})$  und  $v(\hat{\mu}_l)$  der Erwartungswert- bzw. der Varianzschätzer von  $\mu_l = \mathbb{E}Y_l$ , die aus dem ML-Schätzer  $\hat{\beta}$  gewonnen wurden

Dabei ist  $v(\hat{\mu}_l) = \tau^2 b''(b'^{-1}(\hat{\mu}_l))$ , wobei  $b(\cdot)$  der entsprechende Koeffizient in der Dichte  $f_\theta$  aus der Exponentialfamilie ist. Man bildet folgende Teststatistiken:

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^k \frac{(\bar{Y}_l - \hat{\mu}_l)^2}{v(\hat{\mu}_l)/n_l}$$

$$D = -2\tau^2 \sum_{l=1}^k \left( l_l(\hat{\mu}_l) - l_l(\bar{Y}_l) \right)$$

**Satz 5.5.2.** Falls  $n \rightarrow \infty$  und die Anzahl  $n_l \rightarrow \infty$  für alle  $l$ , dann gilt unter gewissen Voraussetzungen Folgendes:

$$\chi^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_{k-m-1}^2$$

$$D \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_{k-m-1}^2$$

---


$$^1 k \leq m \Rightarrow D \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \underbrace{\chi_{k-m-1}^2}_{<0}$$

<sup>2</sup>Dies ist eine informelle Beschreibung des Vorgangs, bei dem für jedes  $Y_i$   $n_i$  unabhängige Kopien von  $Y_i$  erzeugt werden, die die  $i$ -te Klasse bilden.

**Folgerung 5.5.3.** Mit Hilfe der Behauptungen des Satzes 5.5.2 können die Hypothesen

$$H_0 : Y = (Y_1, \dots, Y_n) \text{ stammt aus dem Modell } g(\mathbb{E}Y_i) = X_i\beta$$

vs.

$$H_1 : Y = (Y_1, \dots, Y_n) \text{ stammt nicht aus dem Modell } g(\mathbb{E}Y_i) = X_i\beta$$

für  $i = 1, \dots, n$  folgendermaßen getestet werden:

$H_0$  wird (für große  $n$ ) zum asymptotischen Signifikanzniveau  $\alpha$  verworfen, falls

$$\chi^2 > \chi_{k-m-1, 1-\alpha}^2 \quad \text{bzw.} \quad D > \chi_{k-m-1, 1-\alpha}^2$$

Diese Tests sollten aber nicht verwendet werden, falls die Klassenstärken  $n_l$  klein sind.

**Beispiel 5.5.4.**

Wie sehen die oben beschriebenen Tests im Falle der Logit- bzw. Poisson-Regression aus?

1. **Logit-Modell:**  $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \text{verallgemeinertes lineares Modell} \quad \log \frac{p_i}{1-p_i} = X_i\beta \quad i = 1, \dots, n$$

Wir teilen  $Y_1, \dots, Y_n$  in  $k$  Klassen auf, so dass die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von 1 in jeder Klasse möglichst gut durch  $\bar{Y}_l = \frac{1}{n_l} \sum Y_i$

geschätzt wird. Somit gilt mit  $\hat{\mu}_l = \hat{p}_l = g^{-1}(X_l\hat{\beta}) = \frac{e^{X_l^\top \hat{\beta}}}{1+e^{X_l^\top \hat{\beta}}}$ ,  $v(\hat{p}_l) = \hat{p}_l(1-\hat{p}_l)$

$$\Rightarrow \chi^2 = \sum_{l=1}^k \frac{(\bar{Y}_l - \hat{p}_l)^2}{\hat{p}_l(1-\hat{p}_l)/n_l}$$

2. **Poisson-Modell:**  $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,

$$\Rightarrow \text{verallgemeinertes lineares Modell} \quad \log \lambda_i = X_i\beta \quad i = 1, \dots, n$$

Somit gilt mit  $\hat{\mu}_l = \hat{\lambda}_l = e^{X_l\hat{\beta}}$ ,  $v(\hat{\lambda}_l) = \hat{\lambda}_l$

$$\Rightarrow \chi^2 = \sum_{l=1}^k \frac{(\bar{Y}_l - \hat{\lambda}_l)^2}{\hat{\lambda}_l/n_l}$$

## Kapitel 6

# Hauptkomponentenanalyse

In diesem Kapitel werden Methoden zur Reduktion der Komplexität von sehr großen statistischen Datensätzen vorgestellt, die als Hauptkomponentenanalyse (HKA) bekannt sind (engl. Principal Component Analysis, PCA). Mit ihrer Hilfe ist es möglich einen sehr hochdimensionalen Datensatz  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  auf wenige wirklich wichtige Komponenten  $\varphi = AX \in \mathbb{R}^d$  zurückzuführen,  $d \ll n$ , die aber dabei die meiste Variabilität des originalen Datensatzes  $X$  beibehalten.  $A$  ist dabei eine  $(d \times n)$ -Matrix, die zu finden ist, wenn gewisse (in 6.1 angegebene) Nebenbedingungen erfüllt sind. Andere Beispiele von Anwendungen sind Visualisierung von komplexen Datensätzen, Ausreißer-Erkennung, Cluster-Analyse u.s.w.. Für eine übersicht siehe z.B. [18].

### 6.1 Einführung

Um nachfolgende Problemstellungen zu motivieren, betrachten wir ein Beispiel des Text Mining aus der Autoindustrie:

**Beispiel 6.1.1.** Ein Autohersteller ist daran interessiert, seine Verluste, die in Folge von Betrug und Inkompetenz seitens seiner Niederlassungen bei Garantie-Reparaturen auftreten, zu minimieren. Deshalb möchte er eine Auffälligkeitsanalyse von Reparaturbesichtigungen aus Garantie-Werkstätten betreiben, die dazu führen sollte, computergestützt, verdächtige Meldungen zu finden, die nachher manuell und einzeln weiter geprüft werden. Ein weiterer Anreiz für die automatische Früherkennung von Auffälligkeiten besteht darin, dass flächendeckende Prüfungen nur für wenige Niederlassungen und in unregelmäßigen Zeitabständen (aus Kostengründen) möglich sind, und selbst die könnte man sich sparen. Ein typischer Text, der eine Garantie-Reparatur beschreibt, verwendet maximal 300.000 Wörter aus einem Fachwortschatz. Daher werden solche Texte als Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  der Länge  $n = 300.000$  dargestellt, wobei

$$x_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls das Wort } i \text{ im Text } x \text{ vorkommt} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Diese Vektoren  $x$  werden normiert, so dass sie auf der Sphäre  $S^{n-1}$  liegen. Innerhalb eines Jahres entsteht dadurch eine riesige Datenbank solcher Vektoren  $x$  mit mehreren Millionen Einträgen. Die Aufgabe eines Statistikers besteht in der drastischen Reduktion der Dimension  $n - 1$  des Datensatzes, so dass eine Visualisierung des Datensatzes möglich wird. Eine mögliche Lösung liegt in der Verwendung von HKA. Die HKA geht in ihren Ursprüngen auf die Arbeiten von Beltran (1873) und Jordan (1874) zurück, die die Single Value Decomposition verwendeten. In der mehr oder minder modernen Form (vgl. 6.1) erscheint sie erst in den Arbeiten von K. Pearson (1901) und H. Hotelling (1933). Auch der Name HKA stammt von Hotelling. Eine Weiterentwicklung der Methoden ist Girshick (1939), Anderson (1963), Rao (1964) und anderen zu verdanken. Erst nach der Einführung der PCs ist aber diese Methodologie richtig angewandt geworden. Denn ohne Computer ist die Berechnung von Hauptkomponenten für  $n > 4$  sehr schwierig. Seit den 1980er Jahren gibt es einen rasanten Anstieg der Anwendungen von HKA in allen Wissensbereichen (vor allem in Ingenieurwissenschaften), wo multivariate Datensätze analysiert werden sollen.

## 6.2 Hauptkomponentenanalyse auf Modellebene

In diesem Abschnitt wollen wir das Hauptproblem der HKA für Zufallsstichproben  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  mit bekannter Kovarianzstruktur einführen. Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  eine Zufallsstichprobe von Zufallszahlen  $X_i$  mit bekannter Kovarianzmatrix  $\Sigma$  und  $\text{Var} X_i \in (0, \infty)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Seien  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$  die Eigenwerte von  $\Sigma$ , die in absteigender Reihenfolge geordnet und alle von einander verschieden sind. Wir suchen Linearkombinationen  $\alpha^\top X$  von  $X_i$ , die die maximale Varianz besitzen, wobei der Vektor  $\alpha$  entsprechend normiert ist z.B., so dass  $\alpha \in S^{n-1}$  in der Euklidischen Norm.

**Definition 6.2.1.** Die Linearkombination  $\alpha_i^\top X$ ,  $i = 1, \dots, n$ , heißt  $i$ -te Hauptkomponente von  $X$ , falls sie die maximale Varianz besitzt unter der Bedingung, dass  $\alpha_i \in S^{n-1}$  und  $\alpha_1^\top X, \alpha_2^\top X, \dots, \alpha_{i-1}^\top X$  und  $\alpha_i^\top X$  unkorreliert sind:

$$\begin{cases} \text{Var } \alpha^\top X \rightarrow \max_{\alpha} \\ |\alpha| = 1 \\ \text{Cov } (\alpha^\top X, \alpha_j^\top X) = 0, \quad j = 1, \dots, i - 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

Dabei heißt  $\alpha_i$  der Koeffizientenvektor der  $i$ -ten Hauptkomponente  $\alpha_i^\top X$ .

**Satz 6.2.2.** Die  $i$ -te Hauptkomponente von  $X$  ist gegeben durch

$$Y_i = \alpha_i^\top X,$$

wobei  $\alpha_i$  der Eigenvektor von  $\Sigma$  mit Eigenwert  $\lambda_i$  ist. Dabei gilt

$$\text{Var}(Y_i) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Beweis** Zeigen wir, dass die Aussage des Satzes gilt für  $i = 1, 2$ . Für  $i > 2$  ist der Beweis analog. Für  $i = 1$  gibt es eine Nebenbedingung  $|\alpha| = 1$  in (6.1), die in die Lagrange-Zielfunktion

$$f(\alpha) = \text{Var}(\alpha^\top X) + \lambda(|\alpha|^2 - 1)$$

übernommen wird. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha^\top X) &= \text{E}(\alpha^\top X - \text{E}\alpha^\top X)^2 = \text{E}(\alpha^\top (X - \text{E}X))^2 \\ &= \text{E}\alpha^\top (X - \text{E}X)(X - \text{E}X)^\top \alpha = \alpha^\top \text{E}(X - \text{E}X)(X - \text{E}X)^\top \alpha \\ &= \alpha^\top \Sigma \alpha, \end{aligned}$$

$|\alpha|^2 = \alpha^\top \cdot \alpha$ , und  $f(\alpha) = \alpha^\top \Sigma \alpha + \lambda(\alpha^\top \alpha - 1)$ .

Die notwendige Bedingung des Maximums ist

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0,$$

wobei die zweite Gleichung einfach die Nebenbedingung  $|\alpha| = 1$  repräsentiert.

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \alpha^n} \right)$ , wobei  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)^\top$  und  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$  schreibt sich  $\Sigma \alpha - \lambda \alpha = 0$  in Vektorform oder  $\Sigma \alpha = \lambda \alpha$ , was heißt, dass  $\alpha$  ein Eigenvektor von  $\Sigma$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  ist. Da  $\text{Var}(\alpha^\top X) = \alpha^\top \Sigma \alpha$  maximal sein soll, gilt

$$\text{Var}(\alpha^\top X) = \alpha^\top \lambda \alpha = \lambda \underbrace{\alpha^\top \alpha}_1 = \lambda$$

und  $\lambda = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \Rightarrow \lambda = \lambda_1$  und  $\alpha = \alpha_1$ .

Für  $i = 2$ , soll die Maximierungsaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^\top \Sigma \alpha \rightarrow \max_{\alpha} \\ \alpha^\top \cdot \alpha = 1 \\ \text{Cov}(\alpha_1^\top X, \alpha^\top X) = 0 \end{array} \right.$$

bezüglich  $\alpha$  gelöst werden, wobei

$$\text{Cov}(\alpha_1^\top X, \alpha^\top X) = \alpha_1^\top \Sigma \alpha = \alpha^\top \Sigma \alpha_1 = \alpha^\top \lambda_1 \alpha_1 = \lambda_1 \alpha^\top \alpha_1.$$

Das heißt, folgende Funktion soll maximiert werden:

$$f(\alpha) = \alpha^\top \Sigma \alpha + \lambda(\alpha^\top \alpha - 1) + \delta \alpha^\top \alpha_1.$$

Genau wie oben bekommt man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \Sigma \alpha + \lambda \alpha + \delta \alpha_1 = 0$$

Durch die Nebenbedingungen  $\alpha_1^\top \Sigma \alpha = 0$  und  $\alpha_1^\top \alpha = 0$  (siehe oben) bekommt man

$$\alpha_1^\top \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \delta \underbrace{\alpha_1^\top \alpha_1}_1 = \delta = 0,$$

was bedeutet, dass  $\Sigma \alpha = \lambda \alpha$  und  $\alpha$  ist wieder ein Eigenvektor von  $\Sigma$  mit Eigenwert  $\lambda$ . Da  $\alpha$  orthogonal zu  $\alpha_1$  sein soll und  $\text{Var}(\alpha^\top X) = \lambda$  maximal sein soll, bekommt man

$$\alpha = \alpha_2 \text{ und } \lambda = \lambda_2 \Rightarrow Y_2 = \alpha_2^\top X.$$

□

**Übungsaufgabe 6.2.3.** Führen Sie den Beweis für  $i > 2$  durch!

Sei nun  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Dies ist eine orthogonale  $(n \times n)$ -Matrix, für die gilt (aus dem Satz 6.2.2), dass

$$\Sigma A = A \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

oder, äquivalent dazu,

$$A^\top \Sigma A = \Lambda, \quad \Sigma = A \Lambda A^\top \tag{6.2}$$

**Satz 6.2.4.** Für eine  $(n \times m)$ -Matrix  $B$ , mit orthogonalen Spalten  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \leq n$ , sei  $Y = B^\top X$  und  $\Sigma_Y = \text{Cov}(Y) = B^\top \Sigma B$  die Kovarianzmatrix von  $Y$ . Dann gilt

$$A_m = \underset{B}{\text{argmax}} \text{Spur}(\Sigma_Y),$$

wobei  $A_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

**Beweis** Da  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine Basis in  $\mathbb{R}^n$  bilden, gilt

$$b_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \alpha_i, \quad k = 1, \dots, m,$$

wobei  $B = (b_1, \dots, b_m)$ , oder, in Matrixform,  $B = AC$ , mit  $C = (c_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Daher gilt

$$\Sigma_Y = B^\top \Sigma B = C^\top \underbrace{A^\top \Sigma A}_\Lambda C = C^\top \Lambda C = \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j c_j^\top,$$

wobei  $c_j^\top$  die  $j$ -te Zeile von  $C$  ist. Deshalb gilt

$$\text{Spur}(\Sigma_Y) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Spur}(c_j c_j^\top) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Spur}(c_j^\top c_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2.$$

Da  $C = A^{-1}B = A^\top B$ , gilt

$$C^\top C = B^\top \underbrace{AA^\top}_{I_n} B = \underbrace{B^\top B}_{I_m} = I_m,$$

wobei

$$I_k = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k).$$

Somit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^2 = m,$$

und die Spalten von  $C$  sind orthonormal. Daher kann  $C$  als ein Teil (erste  $m$  Spalten) einer orthonormalen  $(n \times n)$ -Matrix  $D$  gesehen werden. Da auch die Zeilen von  $D$  orthonormale Vektoren sind und  $c_i^\top$  die ersten  $m$  Elemente der Zeilen von  $D$  bilden, gilt

$$c_i^\top c_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}^2 \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Da

$$\text{Spur}(\Sigma_Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\sum_{j=1}^m c_{ij}^2}_{\beta_i} = \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i,$$

wobei  $\beta_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n \beta_i = m$ , und

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i \rightarrow \max$$

für  $\beta_1 = \dots = \beta_m = 1$ ,  $\beta_{m+1} = \dots = \beta_n = 0$ . Aber wenn  $B = A_m$ , dann gilt

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & , 1 \leq i = j \leq m \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

woraus  $\beta_1 = \dots = \beta_m = 1$ ,  $\beta_{m+1} = \dots = \beta_n = 0$  folgt. Somit ist  $A_m$  die Lösung von  $\text{Spur}(\Sigma_Y) \rightarrow \max_B$ .  $\square$

Die Behauptung des Satzes 6.2.4 bedeutet, dass

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^m Y_i \right) = \text{Var} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i^\top X \right)$$

maximal ist für  $\forall m = 1, \dots, n$ , falls  $Y_i$  Hauptkomponenten von  $X$  sind.

**Folgerung 6.2.5.** (*Spektraldarstellung von  $\Sigma$* ). Es gilt

$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \alpha_i \cdot \alpha_i^\top \quad (6.3)$$

**Beweis** Die Darstellung folgt aus (6.2), weil

$$\Sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top$$

$\square$

**Bemerkung 6.2.6.**

1. Da  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$  mit  $|\alpha_i| = 1$ ,  $\forall i$ , folgt aus der Darstellung (6.3), dass die ersten Hauptkomponenten nicht nur den Hauptbeitrag zur Varianz von  $X_i$ , sondern auch zu den Kovarianzen liefern. Dieser Beitrag wird mit steigendem  $i = 1, \dots, n$  immer geringer.
2. Falls  $\text{Rang}(\Sigma) = r < n$ , dann bedeutet (6.3), dass  $\Sigma$  komplett aus ihren ersten  $r$  Hauptkomponenten und Koeffizientenvektoren bestimmt werden kann.

**Lemma 6.2.7.** Sei  $\Sigma$  eine positiv definite symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$  und entsprechenden Eigenvektoren  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $|\alpha_i| = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$\lambda_k = \sup_{\alpha \in S_k, \alpha \neq 0} \frac{\alpha^\top \Sigma \alpha}{|\alpha|^2},$$

wobei  $S_k = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle^\perp$  für beliebige  $k = 1, \dots, n$ .

**Beweis** Sei

$$c = \sup_{\alpha \in S_k} \frac{\alpha^\top \Sigma \alpha}{|\alpha|^2}.$$

Zeigen wir, dass  $\lambda_k \leq c \leq \lambda_k$ .

1.  $c \geq \lambda_k$ : Für  $\alpha = \alpha_k$  beweist man

$$c \geq \frac{\alpha_k^\top \Sigma \alpha_k}{\alpha_k^\top \alpha_k} = \frac{\lambda_k \alpha_k^\top \alpha_k}{\alpha_k^\top \alpha_k} = \lambda_k$$

2.  $c \leq \lambda_k$ : Es ist zu zeigen, dass

$$\alpha^\top \Sigma \alpha \leq \lambda_k |\alpha|^2, \quad \forall \alpha \in S_k, \quad \alpha \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n \quad \alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i,$$

weil  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  eine orthonormale Basis bilden.

$$\alpha \in S_k \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dots = c_{k-1} = 0,$$

dass heißt

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=k}^n c_i \alpha_i, \\ \Sigma \alpha &= \sum_{i=1}^n c_i \Sigma \alpha_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \alpha_i, \\ \alpha^\top \Sigma \alpha &= \left( \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \right)^\top \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \alpha_i \right) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \lambda_i \underbrace{\alpha_j^\top \alpha_i}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i, \\ |\alpha|^2 &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \end{aligned}$$

Deshalb gilt für  $\alpha \in S_k$

$$\alpha^\top \Sigma \alpha = \sum_{i=k}^n c_i^2 \lambda_i \leq \sum_{i=k}^n \lambda_k c_i^2 = \lambda_k \sum_{i=k}^n c_i^2 = \lambda_k |\alpha|^2,$$

und  $c \leq \lambda_k$  weil  $\lambda_k > \lambda_j$ ,  $j > k$ .

□

**Satz 6.2.8.** Seien  $B, Y$  und  $\Sigma_Y$  wie in Satz 6.2.4. Dann gilt

$$A_m = \operatorname{argmax}_B \det(\Sigma_Y),$$

wobei  $A_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

**Beweis** Sei  $k \in \{1, \dots, m\}$  fixiert. Führen wir  $S_k = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^n$  ein (wie in Lemma 6.2.7). Seien  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_m$  Eigenwerte von  $\Sigma_Y = B^\top \Sigma B$  mit entsprechenden Eigenvektoren  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ , die orthonormiert sind. Sei  $T_k = \langle \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$ . Es gilt offensichtlich

$$\operatorname{Dim}(S_k) = n - k + 1, \quad \operatorname{Dim} T_k = k.$$

Genau wie in Lemma 6.2.7 kann gezeigt werden, dass  $\forall \gamma \neq 0, \gamma \in T_k$  gilt

$$\frac{\gamma^\top \Sigma \gamma}{|\gamma|^2} \geq \mu_k.$$

Betrachten wir  $\tilde{S}_k = B(T_k) \subset \mathbb{R}^n$ . Da  $B$  eine orthonormale Transformation ist, ist sie eindeutig und somit  $\operatorname{Dim}(\tilde{S}_k) = \operatorname{Dim}(T_k) = k$ . Aus der Formel

$$\operatorname{Dim}(S_k \cup \tilde{S}_k) + \operatorname{Dim}(S_k \cap \tilde{S}_k) = \operatorname{Dim} S_k + \operatorname{Dim} \tilde{S}_k$$

folgt

$$\operatorname{Dim}(S_k \cap \tilde{S}_k) = \underbrace{\operatorname{Dim} S_k}_{n-k+1} + \underbrace{\operatorname{Dim} \tilde{S}_k}_k - \underbrace{\operatorname{Dim}(S_k \cup \tilde{S}_k)}_{\leq n} \geq n - k + 1 + k - n = 1$$

das heißt,  $\exists \alpha \in S_k \cap \tilde{S}_k, \alpha \neq 0$ . Für dieses  $\alpha$  gilt  $\alpha = B\gamma, \gamma \in T_k$  und deshalb

$$\mu_k \leq \frac{\gamma^\top \Sigma \gamma^2}{|\gamma|^2} = \frac{\gamma^\top B^\top \Sigma B \gamma}{\underbrace{\gamma^\top \gamma}_{\gamma^\top B^\top B \gamma}} = \frac{\alpha^\top \Sigma \alpha}{\alpha^\top \alpha} \leq \lambda_k$$

nach  $|\gamma| = |B\gamma|$ , weil  $B$  Distanzen beibehält. Deshalb gilt  $\mu_k \leq \lambda_k$  für alle  $k = 1, \dots, m$ , und

$$\det(\Sigma_Y) = \prod_{i=1}^m \mu_i \leq \prod_{k=1}^m \lambda_k \quad \Rightarrow \quad \max_B \det(\Sigma_Y) \leq \prod_{k=1}^m \lambda_k.$$

Allerdings gilt für  $B = A_m, \mu_k = \lambda_k, k = 1, \dots, m$ , deshalb

$$A_m = \operatorname{argmax}_B \det(\Sigma_Y).$$

□

Nun betrachten wir geometrische Eigenschaften von Hauptkomponenten.

**Proposition 6.2.9.** Die Hauptkomponentenkoeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sind die Hauptachsen des Ellipsoids  $x^\top \Sigma^{-1} x = c$ , mit Halbachsenlängen  $\sqrt{c\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Beweis** Die Hauptkomponenten von  $X$  sind gegeben durch  $Z = A^\top X$ , wobei  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  eine orthonormale Transformation ist, deshalb  $A^\top = A^{-1}$ ,  $X = AZ$ . Daher gilt für unser Ellipsoid

$$x^\top \Sigma^{-1} x \stackrel{\substack{= \\ \text{Subst. } x=Az}}{=} z^\top A^\top \Sigma^{-1} A z = z^\top \Lambda^{-1} z = c,$$

wobei

$$A^\top \Sigma^{-1} A = \Lambda^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right), \quad \Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

weil  $\Sigma^{-1}$  dieselben Eigenvektoren mit Eigenwerten  $\frac{1}{\lambda_i}$  hat. Daher kann das Ellipsoid  $z^\top \Lambda^{-1} z = c$  in seiner normierten Form als

$$\sum_{k=1}^n \frac{z_k^2}{c\lambda_k} = 1$$

dargestellt werden. Daraus folgt, dass  $\alpha_i$  in die Richtungen seiner Hauptachsen zeigen und, dass seine Halbachsenlängen gleich  $\sqrt{c\lambda_i}$  sind.  $\square$

**Bemerkung 6.2.10.** (*Multivariate Normalverteilung*). Falls  $X \sim N(0, \Sigma)$  gilt, dann ist  $x^\top \Sigma^{-1} x = c$  ein Ellipsoid der konstanten Wahrscheinlichkeit für  $X$ , weil die Dichte von  $X$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^\top \Sigma^{-1} x \right\} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

auf diesem Ellipsoid konstant bleibt. Sonst definiert  $x^\top \Sigma^{-1} x = c$  Konturen der konstanten Wahrscheinlichkeit für  $X$ . Dabei zeigt der Vektor  $\alpha_1$  in die Richtung der größten Varianz von  $\alpha^\top X$  (es ist die größte Hauptachse mit Länge  $\sqrt{c\lambda_1}$  des Ellipsoids);  $\alpha_2$  zeigt in die Richtung der zweit größten Varianz (Halbachse  $\sqrt{c\lambda_2}$ ), usw. (vgl. Bedingung 6.1).

**Bemerkung 6.2.11.** Eine andere Form von Hauptkomponentenanalyse ist möglich, wenn man statt  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  die normierte Stichprobe  $X_\omega = (X_1/\omega_1, \dots, X_n/\omega_n)^\top$  benutzt, wobei Gewichte  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$  eine gewisse Präferenz in der Analyse zum Ausdruck bringen und somit Vorinformationen enthalten. Eine häufige Wahl ist

$$\omega_i = \sqrt{\sigma_{ii}} = \sqrt{\text{Var} X_i},$$

was zur HKA von  $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ ,  $X_i^* = \frac{X_i}{\sqrt{\text{Var}X_i}}$ ,  $i = 1, \dots, n$  mit Hilfe der Korrelationsmatrix  $\Sigma^* = (\text{Corr}(X_j, X_i))_{i,j=1}$  führt

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}X_i \text{Var}X_j}} = \text{Cov}(X_i^*, X_j^*), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dabei kommt man auf andere Hauptkomponenten  $\alpha_i^{*T} X^*$ , für die  $\alpha_i^* \neq \alpha_i$  gilt,  $i = 1, \dots, n$ .

Was sind dann Vor- bzw. Nachteile von HKA basierend auf  $(X, \Sigma)$  und  $(X^*, \Sigma^*)$ ?

**Nachteile von  $(X, \Sigma)$ -HKA:**

1. Die HKA basierend auf  $(X^*, \Sigma^*)$  hängt nicht von der Wahl der Maßeinheiten von  $X$  ab. Somit sind Vergleiche der Ergebnisse von HKA von mehreren Stichproben unterschiedlicher Herkunft möglich.
2. Falls die Varianzen von  $X_i$  sehr unterschiedlich sind, so werden die Variablen  $X_i$  mit größten Varianzen auch die ersten HK bestimmen, was eindeutig einen Nachteil darstellt. Die HKA basierend auf  $(X^*, \Sigma^*)$  ist frei von diesem Nachteil. Die  $(X, \Sigma)$ -HKA ist in solchen Fällen nicht aussagekräftig, weil sie (in leicht veränderter Form) einfach die Variablen  $X_i$  in der Reihenfolge absteigender Varianzen ordnet.

**Beispiel 6.2.12.** Sei  $X = (X_1, X_2)$ , wobei  $X_1$  die Länge darstellt und  $X_2$  das Gewicht.  $X_1$  kann in cm oder m gemessen werden,  $X_2$  allerdings nur in kg. In diesen zwei Fällen seien die Kovarianzmatrizen von  $X$  gegeben durch

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 80 & 44 \\ 44 & 80 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 8000 & 4400 \\ 4400 & 8800 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der ersten HK ergibt in beiden Fällen

$$\alpha_1^\top X = 0,707X_1 + 0,707X_2 \quad \text{für } \Sigma_1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_1^\top X = 0,998X_1 + 0,055X_2 \quad \text{für } \Sigma_2.$$

Zu bemerken ist, dass im ersten Fall  $X_1$  und  $X_2$  gleiche Beiträge zur 1. HK besitzen, wobei im 2. Fall  $X_1$  den dominierenden Einfluss ausübt. Dazu gilt  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot 100\% = 77,5\%$  im ersten Fall und  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot 100\% = 99,3\%$  im 2. Fall (es ist der Anteil der Variation der ersten HK von der gesamten Varianz).

3. Falls Zufallsvariable  $X_i$  in  $X$  unterschiedlicher Herkunft sind (wie im obigen Beispiel), dann ist die Interpretation des Anteils der Variation problematisch, weil in der Summe  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$   $\text{m}^2$ ,  $\text{kg}^2$ , usw. aufsummiert werden. Die HKA basierend auf  $(X^*, \Sigma^*)$  dagegen betrachtet maßlose Größen, so dass die Summe  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$  durchaus interpretierbar ist.

#### Vorteile von $(X, \Sigma)$ -HKA:

1. Falls statt  $\Sigma$  bzw.  $\Sigma^*$  ihre empirische Analoga  $\hat{\Sigma}$  bzw.  $\hat{\Sigma}^*$  benutzt werden (wenn  $\Sigma(\Sigma^*)$  nicht bekannt sind, müssen sie aus den Daten geschätzt werden), dann hat  $(X, \hat{\Sigma})$ -HKA Vorteile, weil die statistischen Methoden hier einfacher sind als bei  $(X^*, \hat{\Sigma}^*)$ -HKA.
2. Wenn  $X_i$  in  $X$  alle dieselbe Maßeinheit besitzen, dann ist die HKA basierend auf  $(X, \Sigma)$  manchmal vorteilhafter, weil bei der Standardisierung von  $(X, \Sigma)$  auf  $(X^*, \Sigma^*)$  der Bezug zu den Einheiten, in denen  $X$  gemessen wurde, verloren geht.

**Bemerkung 6.2.13.** Manchmal wird in Definition 6.2.1 statt  $|\alpha| = 1$  die Normierung  $|\alpha_k| = \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  benutzt (siehe Optimierungsaufgabe (6.1)). Dies ist insbesondere der Fall in der korrelationsbasierten HKA.

**Bemerkung 6.2.14.** (*Gleiche Eigenwerte  $\lambda_i$* ). Falls einige Eigenwerte von  $\Sigma$  gleich sind, z.B.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k > \lambda_{k+1} > \dots > \lambda_m$ , bedeutet dies, dass es einen linearen Unterraum der Dimension  $k$  gibt, in denen eine beliebige Basis die ersten  $k$  Eigenvektoren darstellt. Dies bedeutet, dass für die HKA die ersten  $k$  Eigenvektoren nicht eindeutig definiert werden können. Geometrisch interpretiert: Die ersten  $k$  Halbachsen von  $x^\top \Sigma^{-1} x = c$  sind gleich, d.h., das Ellipsoid  $x^\top \Sigma^{-1} x = c$  hat einen sphärischen  $k$ -dimensionalen Durchschnitt durch den Ursprung, in dem die Richtungen der Halbachsen beliebig (orthogonal zueinander) gewählt werden können.

**Bemerkung 6.2.15** ( $\lambda_i = 0$ ). Wenn  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{n-k} > \lambda_{n-k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ , dann gibt es in der Stichprobe  $X$  lediglich  $n - k$  linear unabhängige Zufallsvektoren  $X_i$ . Deshalb sollten nur diese  $n - k$  Variablen zur Analyse benutzt werden.

### 6.3 Hauptkomponentenanalyse auf Datenebene

Bei diesem Abschnitt wird nicht mehr vorausgesetzt, dass die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  bekannt ist. Deshalb soll sie durch die empirische Kovarianzmatrix  $\hat{\Sigma}$  ersetzt werden. Seien  $X^1, X^2, \dots, X^m$  unabhängige Realisierungen eines  $n$ -dimensionalen Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ ,  $X^i = (X_1^i, \dots, X_n^i)^\top$ ,  $i = 1, \dots, m$ .  $X^i$  wird als Beobachtung von  $X$  interpretiert.

**Definition 6.3.1.** Definiere den  $n$ -dimensionalen Zufallsvektor  $a_k$  durch

$$a_k = \operatorname{argmax}_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

mit Nebenbedingungen  $|a| = 1$ ,  $a$  unkorreliert mit  $a_1, \dots, a_{k-1}$  für alle  $k = 1, \dots, n$ , wobei

$$Y_i = a^\top X^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i.$$

So definiert  $a_k^\top X$  die  $k$ -ten Hauptkomponenten von  $X$  mit Koeffizientenvektor  $a_k$ ,  $Y_{ik} = a_k^\top X^i$  ist die Auswertung der  $k$ -ten HK auf der  $i$ -ten Beobachtung  $X^i$  von  $X$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Lemma 6.3.2.** Es gilt

$$\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_{ik} - \bar{Y}_k)^2 = l_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

wobei

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{ik}, \quad \bar{X}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_k^i, \quad k = 1, \dots, n$$

und  $l_k$  der Eigenwert der empirischen Kovarianzmatrix  $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})_{i,j=1}^n$  ist,

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m (X_t^i - \bar{X}_i)(X_t^j - \bar{X}_j), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad l_1 > l_2 > \dots > l_n.$$

$a_k$  ist der Eigenvektor von  $\hat{\Sigma}$  mit Eigenwert  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Beweis**

**Übungsaufgabe 6.3.3.** Vergleiche den Beweis des Satzes 6.2.2. □

Im Folgenden werden wir  $X^i$  durch  $X^i - \bar{X}$  ersetzen und dabei die Bezeichnung  $X^i$  beibehalten,  $i = 1, \dots, n$ .

**Bemerkung 6.3.4.** Die Eigenschaften der HKA formuliert in Satz 6.2.4, Folgerung 6.2.5, Satz 6.2.8, Proposition 6.2.9 bleiben auch in ihrer statistischen Version (Definition 6.3.1) erhalten, mit folgenden offensichtlichen Modifikationen:  $\Sigma$  wird ersetzt durch  $\hat{\Sigma}$ ,  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  durch  $A = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $A_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  durch  $A_m = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\Sigma_Y$  durch die empirische Kovarianzmatrix  $\hat{\Sigma}_Y$  von  $Y$ . So benutzt beispielsweise die Spektraldarstellung von  $\hat{\Sigma}$

$$\hat{\Sigma} = \sum_{i=1}^n l_i a_i a_i^\top \quad (6.4)$$

**Übungsaufgabe 6.3.5.** Zeigen Sie es!

Zeigen wir eine weitere Eigenschaft der empirischen HKA, die auch als eine äquivalente Definition betrachtet werden kann:

**Satz 6.3.6.** Sei  $B$  eine  $(n \times p)$ -Matrix,  $p \leq n$ , mit orthogonalen Spalten. Seien  $Z_i = B^\top X^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  Projektionen von  $X^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , auf einen  $p$ -dimensionalen Unterraum  $L_B$ . Definiere

$$G(B) = \sum_{i=1}^m |X^i - Z_i|^2.$$

Dann gilt

$$A_p = (a_1, \dots, a_p) = \underset{B}{\operatorname{argmin}} G(B).$$

**Beweis** Nach dem Satz von Pythagoras gilt  $|X^i|^2 = |Z_i|^2 + |X^i - Z_i|^2$ , deshalb

$$G(B) = \sum_{i=1}^m |X^i|^2 - \sum_{i=1}^m |Z_i|^2 \rightarrow \min$$

falls

$$\tilde{G}(B) = \sum_{i=1}^m |Z_i|^2 = \sum_{i=1}^m Z_i^\top Z_i = \sum_{i=1}^m X^{iT} B B^\top X^i \rightarrow \max_B.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{G}(B) &= \operatorname{Spur} \left( \sum_{i=1}^m (X^{iT} B B^\top X^i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{Spur} (X^{iT} B B^\top X^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{Spur} (B^\top X^i X^{iT} B) \\ &= \operatorname{Spur} \left( B^\top \underbrace{\left( \sum_{i=1}^m X^i X^{iT} \right)}_{\mathbf{1}_{(m-1)\hat{\Sigma}}} B \right) = (m-1) \operatorname{Spur} (B^\top \hat{\Sigma} B) \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt

---

<sup>1</sup>Da  $X^i$  durch  $X^i - \bar{X}$  ersetzt wurde.

$$\tilde{G}(B) = (m-1)\text{Spur} \left( B^\top \hat{\Sigma} B \right),$$

die nach Bemerkung 6.3.4 und Satz 6.2.4 maximal wird, falls  $B = A_p$ .  $\square$

**Bemerkung 6.3.7.** Wie kann Satz 6.3.6 als äquivalente Definition der empirischen HKA benutzt werden?  $a_i$  werden als orthogonale Vektoren definiert, die einen linearen Unterraum  $L_p = \langle a_1, \dots, a_p \rangle$  aufspannen,  $p = 1, \dots, n-1$ , mit der Eigenschaft, dass die Summe der quadratischen orthogonalen Abstände von  $X^i$  zu  $L_p$  minimal wird. So wäre es z.B. für  $p=1$   $L_1$  die beste Gerade, die den Datensatz  $X^1, \dots, X^m$  approximiert, für  $p=n-1$  wäre  $L_{n-1}$  die beste Hyperebene mit derselben Eigenschaft (vgl. lineare Regression).

Der folgende Satz gibt uns gleichzeitig eine effiziente Berechnungsmethode und eine neue Interpretation der HK an.

**Satz 6.3.8.** (Singularwertzerlegung)

Sei  $\tilde{X} = (X^1 - \bar{X}, X^2 - \bar{X}, \dots, X^m - \bar{X})^\top$  eine  $(m \times n)$ -Matrix, die zentrierte Beobachtungen  $X^i$  von  $X$  enthält. Sei  $\text{Rang}(\tilde{X}) = r \leq n, m$ . Es gilt folgende Zerlegung:

$$\tilde{X} = U L A_r^\top, \quad (6.5)$$

wobei  $U$  eine  $(m \times r)$ -Matrix mit orthonormalen Spalten ist

$$L = \text{diag}(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_r) \quad \text{wobei} \quad \tilde{l}_i = \sqrt{(m-1)l_i}$$

die Wurzel aus dem  $i$ -ten (nicht trivialen) Eigenwert von  $\tilde{X}^\top \tilde{X} = (m-1)\hat{\Sigma}$  ist,  $i = 1, \dots, r$ .  $A_r = (a_1, \dots, a_r)$  ist die  $(n \times r)$ -Matrix mit Spalten  $a_i$

**Beweis** Definiere  $U = (u_1, \dots, u_r)$  mit Spalten  $u_i = \tilde{X} \frac{a_i}{\tilde{l}_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Zeigen wir, dass die Darstellung (6.5) gilt. Laut Spektraldarstellung (6.4) gilt

$$(m-1)\hat{\Sigma} = \tilde{X}^\top \tilde{X} = \sum_{i=1}^r \tilde{l}_i^2 a_i a_i^\top, \quad \text{weil} \quad l_i = 0, i = r+1, \dots, n.$$

Deshalb

$$U L A_r^\top = U \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 a_1^\top \\ \vdots \\ \tilde{l}_r a_r^\top \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \tilde{X} \frac{a_i}{\tilde{l}_i} \tilde{l}_i a_i^\top = \sum_{i=1}^r \tilde{X} a_i a_i^\top \stackrel{l_i=0, i>r}{=} \sum_{i=1}^n \tilde{X} a_i a_i^\top$$

$\tilde{X} a_i = 0$ ,  $i = r+1, \dots, n$ , wegen  $\text{rang}(\tilde{X}) = r$  und Zentrierung der Spalten von  $\tilde{X}$  durch  $\bar{X}$ . Da die Vektoren  $a_i$  orthonormal sind, gilt

$$U L A_r^\top = \tilde{X} \sum_{i=1}^n a_i a_i^\top = \tilde{X} I = \tilde{X}.$$

□

**Bemerkung 6.3.9.** Die Matrix  $U$  liefert folgende Versionen von Auswertungen

$$Y_{ik} = a_k^\top X^i = X^{iT} a_k, \quad Y_{ik} = u_{ik} \tilde{l}_k, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n$$

Es gilt

$$\text{Var}(u_{ik}) = \frac{\text{Var}(Y_{ik})}{\tilde{l}_k^2} = \frac{l_k}{(m-1)l_k} = \frac{1}{m-1}, \quad \forall i, k$$

## 6.4 Asymptotische Verteilung von HK bei normalverteilten Stichproben

Sei nun  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  habe Eigenwerte  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$  und entsprechende Eigenvektoren  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Berechne

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top, \\ l &= (l_1, \dots, l_n)^\top, \\ \alpha_k &= (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn})^\top, \\ a_k &= (a_{k1}, \dots, a_{kn})^\top, \\ k &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

**Satz 6.4.1.**

1.  $l$  ist asymptotisch (für  $m \rightarrow \infty$ ) unabhängig von  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
2.  $l$  und  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  sind asymptotisch  $m \rightarrow \infty$  multivariat normalverteilt, mit asymptotischen Erwartungswerten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(l) = \lambda \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E(a_k) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

3. Es gilt

$$\text{Cov}(l_k, l_{k'}) \sim \begin{cases} \frac{2\lambda_k^2}{m-1}, & k = k' \\ 0, & k \neq k' \end{cases} \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

$$\text{Cov}(a_{kj}, a_{k'j'}) \sim \begin{cases} \frac{\lambda_k}{m-1} \sum_{l=1, l \neq k}^n \frac{\lambda_l \alpha_{lj} \alpha_{lj'}}{(\lambda_l - \lambda_k)^2}, & k = k' \\ -\frac{\lambda_k \lambda_{k'} \alpha_{kj} \alpha_{k'j'}}{(m-1)(\lambda_k - \lambda_{k'})^2}, & k \neq k' \end{cases} \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

**Ohne Beweis!**

Die Aussagen von Satz 6.4.1 können dazu benutzt werden, ML-Schätzer sowie Konfidenzintervalle für  $\lambda$  und  $\alpha_k$  zu konstruieren.

**Übungsaufgabe 6.4.2.**

1. Zeige, dass ein ML-Schätzer für  $\Sigma$  durch  $\frac{m-1}{m}\hat{\Sigma}$  gegeben ist.
2. Zeige, dass der ML-Schätzer

$$\begin{cases} \text{für } \lambda \text{ ist} & \hat{\lambda} = \frac{m-1}{m}l. \\ \text{für } \alpha_k \text{ ist} & \hat{\alpha}_k = a_k, k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

3. Zeige, dass die ML-Schätzer in 2. mit Momenten-Schätzern für  $\lambda$  und  $\alpha_k$  übereinstimmen, die aus dem Satz 6.4.1 gewonnen werden können.

**Folgerung 6.4.3** (Konfidenzintervalle für  $\lambda_k$ ). Ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $\lambda_k$  ( $m \rightarrow \infty$ ) zum Niveau  $1 - \alpha$  ist gegeben durch

$$\left[ l_k \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{m-1}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)^{-1}, l_k \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{m-1}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)^{-1} \right],$$

wobei  $m$  so groß ist, dass  $-\sqrt{\frac{2}{m-1}} z_{\frac{\alpha}{2}} < 1$ .

**Beweis** Da  $l_k \sim N\left(\lambda_k, \frac{2\lambda_k^2}{m-1}\right)$  für  $m \rightarrow \infty$  aus Satz 6.4.1, 2. und 3., gilt

$$\frac{l_k - \lambda_k}{\sqrt{\frac{2}{m-1}} \lambda_k} \sim N(0, 1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{l_k - \lambda_k}{\lambda_k} \sqrt{\frac{m-1}{2}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

oder für  $m \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\frac{2}{m-1}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{l_k}{\lambda_k} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{m-1}} \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{=-z_{\frac{\alpha}{2}}},$$

$$\frac{l_k}{1 - \sqrt{\frac{2}{m-1}} z_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \lambda_k \leq \frac{l_k}{1 + \sqrt{\frac{2}{m-1}} z_{\frac{\alpha}{2}}}$$

mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ . □

Da alle  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  asymptotisch ( $m \rightarrow \infty$ ) unabhängig sind, kann ein simultaner Konfidenzbereich für  $l$  als kartesisches Produkt der Konfidenzintervalle für  $l_k$  aus Folgerung 6.4.3 angegeben werden.

**Lemma 6.4.4.** Es gilt

$$(m-1)\alpha_k^\top \left( l_k \hat{\Sigma}^{-1} + l_k^{-1} \hat{\Sigma} - 2I_n \right) \alpha_k \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} \chi_{n-1}^2$$

**Ohne Beweis!**

Daraus folgt das (asymptotische) Konfidenzellipsoid für  $\alpha_k$  zum Niveau  $1-\beta$

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : (m-1)y^\top \left( l_k \hat{\Sigma}^{-1} + l_k^{-1} \hat{\Sigma} - 2I_n \right) y \leq \chi_{n-1, \beta}^2 \right\}.$$

**Bemerkung 6.4.5.** Folgerung 6.4.3 bzw. Lemma 6.4.4 können zur Konstruktion von statistischen Tests für  $\lambda_k$  bzw.  $\alpha_k$  folgendermaßen verwendet werden:

1. Testen von  $H_0 : \lambda_k = \lambda_{k_0}$  v.s.  $H_1 : \lambda_k \neq \lambda_{k_0}$   
Die Hypothese  $H_0$  wird verworfen, falls

$$\left| \frac{l_k - \lambda_{k_0}}{\sqrt{\frac{2}{m-1} \lambda_{k_0}}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Dies ist ein asymptotischer Test ( $m \rightarrow \infty$ ) zum Niveau  $\alpha$ .

2. Testen wir  $H_0 : \alpha_k = \alpha_{k_0}$  v.s.  $H_1 : \alpha_k \neq \alpha_{k_0}$   
Die Hypothese  $H_0$  wird abgelehnt, falls

$$(m-1)\alpha_{k_0}^\top \left( l_k \hat{\Sigma}^{-1} + l_k^{-1} \hat{\Sigma} - 2I_n \right) \alpha_{k_0} \geq \chi_{n-1, \alpha}^2.$$

Dies ist ein asymptotischer ( $m \rightarrow \infty$ ) Test zum Niveau  $\alpha$ .

## 6.5 Ausreißerererkennung

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Stichprobe  $X^1, X^2, \dots, X^m$  einige Ausreißer enthalten kann. Was aber ist ein Ausreißer? In der statistischen Literatur gibt es dazu keine einheitliche Meinung. Allgemein würden wir sagen, dass die Beobachtung  $X^i$  ein Ausreißer ist, wenn sie einen untypischen Wert (in Bezug auf die Verteilung von  $X$ ) annimmt. Es kann z.B. ein ungewöhnlich hoher bzw. niedriger Wert von einigen Koordinaten von  $X^i$  sein. Es kann aber auch eine ungewöhnliche Kombination von gewöhnlichen Koordinatenwerten einiger Koordinaten von  $X^i$  sein. Der Grund für solche untypischen Werte  $X^i$  kann ein Meßfehler, aber auch eine Anomalie im Datensatz sein.

**Beispiel 6.5.1.** Sei  $X = (X_1, X_2)$ , wobei  $X_1 =$  "Körpergröße" (in cm) und  $X_2 =$  "Gewicht" (in kg) von Kindern im Alter von 5 bis 15 Jahren sind. Das Merkmal  $X$  wird in einer medizinischen Studie  $n$  mal gemessen. Dabei sind Beobachtungen  $X^i = (250, 80)$  und  $X^j = (175, 25)$  als Ausreißer klassifiziert worden, und zwar daher, weil  $X^i = 250$ cm eine unvorstellbare Körpergröße ist, bei  $X^j$  sind sowohl  $X_1^j = 175$  als auch  $X_2^j = 25$  im mittleren Wertebereich von  $X_1$  und  $X_2$ , ihre Kombination jedoch ist praktisch unmöglich.

Wie könnte man Ausreißer enttarnen? Normalerweise werden untypische Werte von  $X^i$  anhand von Plots des Datensatzes  $X^1, \dots, X^m$  als Einzelpunkte, die nicht in der großen Punktwolke liegen, identifiziert. Bei hoher Dimension  $n$  von  $X$  ist es jedoch schwierig, so einen Datensatz zu visualisieren. Deshalb kann man vorschlagen einen Datenpunkt der ersten 2-3 HK von  $(X^1, \dots, X^m)$  zu erstellen. Dann werden dort ungewöhnlich große bzw. kleine Werte von  $X_k^i$  sofort erkennbar. Um jedoch eine ungewöhnliche Zusammensetzung von gewöhnlichen Koordinatenwerten  $X_k^i$  zu entdecken, bedarf es der letzten HK. Dazu wird die Auswertung folgender Statistiken empfohlen:

Seien  $a_1, \dots, a_n$  die Koeffizientenvektoren der HK von  $(X^1, \dots, X^m)$ . Seien  $Y_{ik} = a_k^\top X^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, n$  die Auswertungen der HK zu den Beobachtungen  $X^i$ . Seien  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  die Eigenwerte der empirischen Kovarianzmatrix  $\hat{\Sigma}$  von  $(X^1, \dots, X^m)$ . Für ein  $1 \leq n_0 \leq n$ , definieren wir die Statistiken

$$d_i^{(1)}(n_0) = \sum_{k=n-n_0+1}^n Y_{ik}^2,$$

$$d_i^{(2)}(n_0) = \sum_{k=n-n_0+1}^n \frac{Y_{ik}^2}{l_k}$$

$$d_i^{(3)}(n_0) = \sum_{k=n-n_0+1}^n l_k Y_{ik}^2,$$

$$d_i^{(4)}(n_0) = \max_{n-n_0+1 \leq k \leq n} \frac{|Y_{ik}|}{\sqrt{l_k}},$$

für  $i = 1, \dots, m$ .

**Lemma 6.5.2.** Es gilt

$$d_j^{(2)}(n) = (X^i - \bar{X})^\top \hat{\Sigma}^{-1} (X^i - \bar{X}), \quad i = 1, \dots, m,$$

wobei  $Y_{ik}$  an ihren empirischen Mittel gemessen werden, das heißt,  $Y_{ik}$  werden durch  $Y_{ik} - \bar{Y}_k$  ersetzt,  $k = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Beweis** Es gilt

$$\hat{\Sigma} = ALA^\top, \quad \text{wobei } L = \text{diag}(l_1, \dots, l_n) \quad \text{und } A = (a_1, \dots, a_n).$$

Daher

$$\hat{\Sigma}^{-1} = AL^{-1}A^\top \quad \text{mit } L^{-1} = \text{diag}(l_1^{-1}, \dots, l_n^{-1}).$$

Da zusätzlich  $Y_i = A^\top X^i$  für  $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{in})^\top$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es gilt

$$X^i = A^{\top-1}Y_i = AY_i, \quad X^{i\top} = Y_i^\top A^\top, \quad i = 1, \dots, n$$

und deshalb

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X^i = A\bar{Y}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y^i, \quad \bar{X}^\top = \bar{Y}^\top A^\top.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} (X^i - \bar{X})^\top \hat{\Sigma}^{-1} (X^i - \bar{X}) &= (Y_i - \bar{Y})^\top \underbrace{A^\top A}_{I} L^{-1} \underbrace{A^\top A}_{I} (Y_i - \bar{Y}) \\ &= (Y_i - \bar{Y})^\top L^{-1} (Y_i - \bar{Y}) = \sum_{k=1}^n \frac{Y_{ik}^2}{l_k} = d_i^{(2)}(n). \end{aligned}$$

□

Um nun Ausreißer in  $(X^1, \dots, X^m)$  zu erkennen, werden Werte  $d_i^{(j)}(n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  für  $n = 1, 2, 3$  berechnet. Beobachtungen  $X^i$  mit den größten Werten  $d_i^{(j)}(n)$  werden als mögliche Ausreißer eingestuft. Zusätzlich kann ein Plot von einer Punktwolke

$$D = \left\{ \left( d_i^{(2)}(n) - d_i^{(2)}(n_0), d_i^{(2)}(n_0) \right), i = 1, \dots, m \right\}$$

dabei behilflich sein.  $X^i$  wird hier als Ausreißer erkannt, wenn

$$\left( d_i^{(2)}(n) - d_i^{(2)}(n_0), d_i^{(2)}(n_0) \right)$$

isoliert von der übrigen Punktwolke  $D$  liegt.

**Bemerkung 6.5.3.** Falls  $X \sim N(\mu, \Sigma)$  mit bekannten  $\mu$  und  $\Sigma$ , und HKA auf Modellebene durchgeführt wird, können Verteilungen von  $d_i^{(j)}(n_0)$  explizit angegeben werden. Es sind (außer  $d_i^{(4)}$ ) Gamma-Verteilungen mit bekannten Parametern z.B.  $d_i^{(2)}(n_0) \sim \chi_{n_0}^2$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Die Verteilungsfunktion von  $d_j^{(4)}(n_0)$  ist  $\Phi^{n_0}(x)$ , wobei  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion der  $N(0, 1)$ -Verteilung ist. Dann können Konfidenzintervalle für  $d_i^{(j)}(n_0)$  eine formale

Entscheidungsregel dafür liefern, ob  $X^i$  einen Ausreißer darstellt. Diese Vorgehensweise basiert zwar auf einer festen mathematischen Grundlage, ist aber in der Praxis wenig einsetzbar, da der Fall von normalverteilten Daten (und dazu mit bekannten Parametern  $\mu$  und  $\Sigma$ !) äußerst selten vorliegt.

**Bemerkung 6.5.4.** Statistiken  $d_i^{(2)}, d_i^{(4)}$  betonen die letzten Statistiken mehr als  $d_i^{(1)}$  (wegen der entsprechenden Normierung). Deshalb sind sie zur Entdeckung von ungewöhnlichen Korrelationen in den Daten geeignet (wie etwa in Beispiel 6.5.1, Beobachtung  $X^j = (175, 25)$ ). Statistik  $d_j^{(3)}$  betont die ersten HK. Daher ist sie anzuwenden, um ungewöhnlich große (kleine) Werte von Koordinaten  $X_k^i$  zu entdecken ( $X_1^i = 250$  im Beispiel 6.5.1).

## 6.6 Hauptkomponentenanalyse und Regression

Sei folgendes multivariates lineares Regressionsmodell gegeben:  $Y = X\beta + \varepsilon$ , wobei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  der Vektor der Zielvariablen ist. Sei weiter  $X = (X_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$  die  $(n \times m)$ -Matrix der Ausgangsvariablen,  $\text{Rang}(X) = m$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top$  der Vektor der Störgrößen, wobei  $\varepsilon_i$  unabhängig sind mit  $E\varepsilon_i = 0$ ,  $\text{Var}\varepsilon_i = \sigma^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . O.B.d.A. werden wir voraussetzen, dass  $X$  (wie in Satz 6.3.8) zentriert ist, d.h., das empirische Mittel der Zeilen von  $X$  ist Null, oder, etwas detaillierter,  $X_{ij}$  wird erstellt durch  $X_{ij} - \bar{X}_j$ , wobei

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Wenn einige Variablen  $X_{ij}$  in  $X$  nahezu linear abhängig sind, das heißt  $\det(X^\top X) \approx 0$ , dann wirkt es sich auf den Schätzer  $\hat{\beta}$  von  $\beta$  als hohe Instabilität in seiner Berechnung aus, weil  $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X^\top X)^{-1}$  (vgl. Satz 6.3.8) sehr geringe Varianzen von  $\hat{\beta}_j$  enthalten wird. Ein Ausweg aus dieser Situation wird die Verwendung von Verallgemeinerungen sein wie in Kapitel 6.3. Eine andere Möglichkeit ist es, die HKA für  $X$  zu verwenden, um so lineare Abhängigkeiten in  $X$  durch die letzten HK zu detektieren und einige Variablen  $\beta_j$  aus der Regression auszuschließen. Genau diese Möglichkeit werden wir in diesem Abschnitt näher beschreiben

Seien  $a_1, \dots, a_m$  die Koeffizientenvektoren der HK (das heißt Eigenvektoren) von  $X^\top X$ . Sei  $Z_{ik} = a_k^\top X^i$  die Auswertung der  $k$ -ten HK der  $i$ -ten Zeile  $X^i$  von  $X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Mit  $Z = (Z_{ik})$  gilt  $Z = XA$ , wobei  $A = (a_1, \dots, a_m)$  eine orthogonale  $(m \times m)$ -Matrix ist. Stellen wir die Regressionsgleichung  $Y = X\beta + \mathcal{E}$  folgendermaßen dar:

$$Y = X \underbrace{AA^\top}_I \beta + \mathcal{E} = \underbrace{XA}_Z \underbrace{A^\top}_\gamma \beta + \mathcal{E} = Z\gamma + \mathcal{E}, \quad \text{wobei } \gamma = A^\top \beta \text{ ist.} \quad (6.6)$$

Somit hat man die alten Ausgangsvariablen  $\beta$  durch ihre Transformierte  $\gamma = A^\top \beta$  ersetzt. Nun folgt die Schätzung von  $\gamma$  aus Satz 4.2.1:

$$\hat{\gamma} = (Z^\top Z)^{-1} Z^\top Y = L^{-1} Z^\top Y, \quad (6.7)$$

wobei  $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_m)$  die Eigenwerte  $l_i$  von  $X^\top X$  enthält. Dies gilt, weil  $Z$  orthogonale Spalten besitzt. Daher gilt

$$\hat{\beta} = A\hat{\gamma} = AL^{-1}Z^\top Y = \underbrace{AL^{-1}A^\top}_{(X^\top X)^{-1}} X^\top Y = \sum_{k=1}^m l_k^{-1} a_k a_k^\top X^\top Y,$$

wobei wir in der letzten Gleichungsmetrik Formeln (6.6), (6.7) und die Spektraldarstellung (Folgerung 6.2.5) von  $(X^\top X)^{-1}$  benutzt haben. Aus Satz 6.2.4 folgt außerdem, dass

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m l_k^{-1} a_k a_k^\top.$$

Somit haben wir folgendes Ergebnis bewiesen:

**Lemma 6.6.1.** Die MKQ-Lösung der Regressionsgleichung  $Y = X\beta + \mathcal{E}$  ist gegeben durch

$$\hat{\beta} = \sum_{k=1}^m l_k^{-1} a_k a_k^\top X^\top Y.$$

Dabei gilt

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m l_k^{-1} a_k a_k^\top.$$

**Bemerkung 6.6.2.** Was sind die Vorteile der in (6.6)-(6.7) eingeführten Vorgehensweise?

1. Nach dem Bestimmen der HK von  $X^\top X$  ist die Berechnung von  $\hat{\gamma} = L^{-1} Z^\top Y$  einfach und schnell, weil (6.7) keine Inversen Matrizen mehr enthält ( $L^{-1} = \text{diag}(l_1^{-1}, \dots, l_m^{-1})$  ist dann explizit bekannt).
2. Wenn einige  $l_k$  sehr nahe bei Null sind oder sogar  $\text{Rang}(X) < m$  ist, können einige der letzten HK (mit Varianzen, die sehr klein oder gar Null sind) von  $X^\top X$  einfach von der Regression ausgeschlossen werden. Dies wird durch den neuen Schätzer

$$\tilde{\beta} = \sum_{k=1}^p l_k^{-1} a_k a_k^\top X^\top Y$$

erreicht,  $p < m$ .

**Lemma 6.6.3.** Sei  $\text{Rang}(X) = m$ :

1. Der Schätzer  $\tilde{\beta}$  ist verzerrt:

$$E\tilde{\beta} = \left( I - \sum_{k=p+1}^m a_k a_k^\top \right) \beta$$

2. Es gilt:

$$\text{Cov}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 \sum_{k=1}^p l_k^{-1} a_k a_k^\top$$

**Beweis** 1. Da

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \sum_{k=p+1}^m l_k^{-1} a_k a_k^\top X^\top Y$$

ist und  $\hat{\beta}$  erwartungstreu ist, gilt

$$\begin{aligned} E\tilde{\beta} &= E\hat{\beta} - \sum_{k=p+1}^m l_k^{-1} a_k a_k^\top X^\top EY = \beta - \sum_{k=p+1}^m l_k^{-1} a_k \underbrace{a_k^\top X^\top X}_{l_k a_k^\top} \beta = \beta - \sum_{k=p+1}^m a_k a_k^\top \beta \\ &= \left( I - \sum_{k=p+1}^m a_k a_k^\top \right) \beta \end{aligned}$$

2. Wird gezeigt in:

**Übungsaufgabe 6.6.4.**

□

Geben wir noch eine äquivalente Formulierung der Regression mit Hilfe der HKA. Statt  $\gamma = A^\top \beta$  zu verwenden, werden wir diesmal von der Singulärwertzerlegung (Satz 6.3.8) für  $X$  Gebrauch machen:

$$X = UL^{\frac{1}{2}}A^\top,$$

wobei  $U$  eine  $(n \times m)$ -Matrix mit orthonormalen Spalten ist (die normierte Auswertungen von HK an Zeilen von  $X$  enthalten) und  $L^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{l_1}, \dots, \sqrt{l_m})$ . Führen wir die Bezeichnung

$$\delta = L^{\frac{1}{2}}A^\top \beta \tag{6.8}$$

ein, so gilt

$$Y = X\beta + \mathcal{E} = U \underbrace{L^{\frac{1}{2}} A^{\top}}_{\delta} \beta + \mathcal{E} = U\delta + \mathcal{E}.$$

Der MKQ-Schätzer für  $\delta$  wäre

$$\hat{\delta} = \underbrace{(U^{\top}U)^{-1}}_I U^{\top}Y = U^{\top}Y,$$

weil  $U$  orthonormale Spalten besitzt. Aus (6.8) folgt  $\beta = AL^{-\frac{1}{2}}\delta$  und deshalb

$$\hat{\beta} = AL^{-\frac{1}{2}}\hat{\delta} = AL^{-\frac{1}{2}}U^{\top}Y.$$

Dabei ist der Zusammenhang zwischen  $\gamma$  und  $\delta$  folgender:

$$\gamma = A^{\top}\beta = A^{\top} \left( AL^{-\frac{1}{2}}\delta \right) = \underbrace{A^{\top}A}_{I} L^{-\frac{1}{2}}\delta = L^{-\frac{1}{2}}\delta$$

Wir haben somit folgendes Lemma bewiesen:

**Lemma 6.6.5.** Die HK-Form  $Y = U\delta + \mathcal{E}$  der Regression  $Y = X\beta + \mathcal{E}$  hat die MKQ-Lösung  $\hat{\delta} = U^{\top}Y$  bzw.

$$\hat{\beta} = AL^{-\frac{1}{2}}U^{\top}Y. \quad (6.9)$$

Dabei ist der Parametervektor  $\delta$  einfach eine normierte Version von  $\gamma$ :  $\delta = L^{\frac{1}{2}}\gamma$

**Bemerkung 6.6.6.**

1. Da es effiziente Algorithmen zur Berechnung der Singulärwertzerlegung gibt, bietet die Berechnungsformel (6.9) klare Rechenvorteile gegenüber der gewöhnlichen Formulierung  $\hat{\beta} = (X^{\top}X)^{-1}X^{\top}Y$ , in der  $X^{\top}X$  invertiert werden muss.
2. Statt die letzten  $m-p$  HK von  $X^{\top}X$  aus der Regression auszuschließen (vgl. Bemerkung 6.6.2, 2.), ist es allgemeiner möglich den Schätzer  $\tilde{\beta}$  über einer Teilmenge  $M$  von  $\{1, \dots, m\}$  zu berechnen:

$$\tilde{\beta}_M = \sum_{k \in M} l_k^{-1} a_k a_k^{\top} X^{\top}Y.$$

Dies benutzt, dass nur HK mit Varianzen  $l_k$ ,  $k \in M$ , für die Schätzung berücksichtigt werden. Dann gilt auch

$$\text{Cov}(\tilde{\beta}_M) = \sigma^2 \sum_{k \in M} l_k^{-1} a_k a_k^{\top},$$

vgl. Übungsaufgabe 6.6.4. Diese Vorgehensweise benutzt den Ausschluss der Komponenten  $\gamma_k$ ,  $k \notin M$  von  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^\top$  aus der MKQ-Schätzung. äquivalent kann man vom Ausschluss der Komponenten  $\delta_k$ ,  $k \notin M$  von  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)^\top$  reden, weil  $\delta = L^{\frac{1}{2}}$ , also  $\delta_k = \sqrt{l_k} \gamma_k$  für alle  $k$  ist.

Was sind mögliche Strategien zur Wahl der Indexmenge  $M$ ?

1.  $M = \{k : l_k > l^*\}$  für einen vorgegebenen Schwellenwert  $l^* > 0$ . Wenn

$$\bar{l} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i$$

bei 1 liegt, so kann  $l^* \in (0, 0.1; 0, 1)$ . Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, dass manche HK, die wichtig für die Vorhersage von  $Y$  sind, oft kleine Varianzen besitzen und somit hier aus der Betrachtung ausgeschlossen wurden.

2. Sei  $\sigma_{ii}^2$  das  $i$ -te Diagonalelement von  $(X^\top X)^{-1}$ . Es gilt offensichtlich  $\sigma_{ii}^2 = \frac{\text{Var} \hat{\beta}_i}{\sigma^2}$  (vgl. Satz 6.2.4),  $i = 1, \dots, m$ . Dann kann man  $M = \{k : \sigma_{kk}^2 > \sigma^*\}$  wählen für einen geeigneten Schwellenwert  $\sigma^*$ . Zur Wahl von  $\sigma^*$  siehe [18], S. 174. Diese Methode besitzt denselben Nachteil wie 1..
3.  $M = \{1, \dots, p\}$ , wobei  $p$  ist die größte Zahl  $\leq m$ , für die eines der folgenden Kriterien erfüllt wird:

a) Es gilt:

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\tilde{\beta}_{M_i} - \beta_i)^2 \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2, \quad \forall \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top \in \mathbb{R}^m \quad (6.10)$$

b) Es gilt:

$$\mathbb{E}(c^\top \tilde{\beta}_M - c^\top \beta)^2 \leq \mathbb{E}(c^\top \hat{\beta} - c^\top \beta)^2 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^m$$

c) Es gilt:

$$\mathbb{E} |X \tilde{\beta}_M - X \beta|^2 \leq \mathbb{E} |X \hat{\beta} - X \beta|^2$$

Dabei orientiert sich das Kriterium a) an der Aufgabe,  $\beta$  möglichst präzise zu schätzen. Kriterien b) und c) dagegen erzielen das beste Ergebnis bei der Vorhersage von  $EY = X\beta$  durch  $X\tilde{\beta}_M$  bzw.  $X\hat{\beta}$ . Alle Größen in a)-c) sind mittlere quadratische Fehler, die sowohl den Bias als auch die Varianzen von  $\tilde{\beta}_M$  berücksichtigen.

In der statistischen Literatur sind viele weitere Strategien beschrieben, die in konkreten Situationen einen verbesserten Schätzer  $\tilde{\beta}_M$  im Vergleich zu  $\hat{\beta}$  erzielen. Die Fragestellung der optimalen Wahl von  $M$  ist jedoch immer noch offen.

Eine Alternative zur Einschränkung der Menge von HK in der Regression (das heißt zum Ausschluss von HK mit  $l_k \approx 0$ ) ist der folgende Schätzer  $\tilde{\beta}_R$ :

$$\tilde{\beta}_R = \sum_{k=1}^m (l_k + K_k)^{-1} a_k a_k^\top X^\top Y,$$

wobei  $K_1, \dots, K_m > 0$  Gewichte sind, die eine zusätzliche Auswahl von Einflussgrößen in der Regression darstellen. Durch diese Gewichte wird erreicht, dass  $l_k \approx 0$  keinen destabilisierenden Einfluss auf die Schätzung mehr ausüben.

**Übungsaufgabe 6.6.7.** Zeigen Sie, dass 2)

$$\text{Cov}(\tilde{\beta}_R) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m \frac{l_k}{(l_k + K_k)^2} a_k a_k^\top$$

1)  $\tilde{\beta}_R$  ist ein verzerrter Schätzer von  $\beta$ . Finden Sie den Bias von  $\tilde{\beta}_R$ !

Die Bezeichnung  $\tilde{\beta}_R$  steht für (Engl.) *Ridge Regression*. Hier stellt sich die Frage der Wahl von  $K_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . In der Praxis wird oft empfohlen,  $K_k = K$ ,  $k = 1, \dots, m$ , wobei  $K$  klein ist, zu wählen.

Noch eine Anwendung der HKA in der Regression wird durch die sogenannte latente Wurzel-Regression (Engl. latent root regression) gegeben. Diese Art der Regression versucht, nur solche HKA zu eliminieren, die gleichzeitig kleine Varianzen  $l_k$  besitzen und keinen Wert für die Vorhersage von  $EY$  durch  $X\beta$  darstellen. Dabei wird die HKA an der  $(m+1) \times (m+1)$ -Matrix  $\tilde{X}^\top \tilde{X}$  mit  $\tilde{X} = (Y, X)$  durchgeführt. Seien  $\tilde{a}_k$ ,  $k = 0, \dots, m$  die Koeffizienten der HK von  $\tilde{X}^\top \tilde{X}$ , mit entsprechenden Eigenwerten  $\tilde{l}_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ . Sei dabei  $\tilde{a}_k = (a_{k0}, \dots, a_{km})^\top$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

Definieren wir die Indexmenge der auszuschließenden HK als  $M_L = \{k = 0, \dots, m : \tilde{l}_k \leq l^*, |a_{k0}| \leq a^*\}$ . Dies ist die Indexmenge von solchen HK, die kleine Varianzen besitzen und keinen großen Einfluss auf die Prognose von  $Y$  ausüben. Sei  $M = \{0, \dots, m\} \setminus M_L$ . Definiere

$$\hat{\beta}_L = \sum_{k \in M} \tilde{c}_k \tilde{a}_k, \quad \text{wobei} \quad \{\tilde{c}_k, k \in M\} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} |Y - X\beta|^2, \quad \text{mit} \quad \beta = \sum_{k \in M} c_k \tilde{a}_k$$

**Satz 6.6.8.** Es gilt

$$\tilde{c}_k = -\frac{a_{k0} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}{\tilde{l}_k \sum_{i \in M} \frac{a_{i0}^2}{\tilde{l}_i}}, \quad k \in M$$

**Ohne Beweis!**

Schwellenwerte  $l^*$  und  $a^*$  sind immer noch empirisch zu wählen.

## 6.7 Numerische Berechnung der Hauptkomponenten

Um zu verstehen, was statistische Software-Pakete bei der Berechnung von HK tun, ist es wichtig, einige Algorithmen dazu zu kennen. Dabei wird man sich darüber im Klaren, warum manchmal die Ergebnisse schlecht sind (z.B. bei Eigenwerten, die fast gleich sind) oder welche Einschränkungen diese Algorithmen an die Größe der zu bearbeitenden Datensätze (in Speicher und/oder Laufzeit) implizieren. Wir werden hier eine kurze Übersicht dieser Methoden geben. Da die HKA im Wesentlichen darauf basiert, Eigenwerte  $\lambda_i$  und Eigenvektoren  $\alpha_i$  einer positiv semi-definiten  $(m \times m)$ -Matrix  $\Sigma$  zu berechnen, werden wir uns mit dieser Berechnung beschäftigen.

Sei also  $\Sigma$  eine  $(m \times m)$ -Matrix mit den Eigenvektoren  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  und Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , die positiv semi-definit ist. In der Fachliteratur sind mindestens 4 Methoden zur Berechnung von  $\alpha_i$  und  $\lambda_i$  bekannt:

1. Potenzmethode
2. QR-Zerlegung
3. Singulärwertzerlegung
4. Neuronale Netzwerke

Wir werden hier kurz nur die Essenz der Potenzmethode erwähnen: diese stellt einen iterativen Algorithmus zum Auffinden von  $\lambda_1$  und  $\alpha_1$  dar, falls  $\lambda_1 \gg \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ . Sei  $u_0$  der Anfangsvektor aus  $\mathbb{R}^m$ . Schreibe  $u_r = \Sigma u_{r-1} = \Sigma^r u_0$  für alle  $r \in \mathbb{N}$ . Wenn

$$u_0 = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i$$

in der Orthonormalbasis  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  Koordinaten  $c_1, \dots, c_m$  besitzt, dann gilt

$$u_r = \Sigma^r u_0 = \sum_{i=1}^m c_i \Sigma^r \alpha_i = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^r \alpha_i, \quad r \in \mathbb{N}$$

Sei  $u_r = (u_{r1}, \dots, u_{rm})^\top$ ,  $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im})^\top$ .

**Lemma 6.7.1.** Es gilt

$$\frac{u_{ri}}{u_{r-1,i}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \lambda_1$$

für  $i = 1, \dots, m$  und

$$\frac{u_r}{c_i \lambda_1^r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \alpha_1$$

**Beweis** Für  $j = 1, \dots, m$  gilt

$$u_{rj} = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^r \alpha_{ij}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \frac{u_{rj}}{u_{r-1,j}} &= \frac{\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^r \frac{\alpha_{ij}}{\lambda_1^{r-1}}}{\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^{r-1} \frac{\alpha_{ij}}{\lambda_1^{r-1}}} \\ &= \frac{c_1 \alpha_{1j} \lambda_1 + \sum_{i=2}^m c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{r-1} \lambda_i \alpha_{ij}}{c_1 \alpha_{1j} + \sum_{i=2}^m c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{r-1} \alpha_{ij}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{c_1 \alpha_{1j}}{c_1 \alpha_{1j}} \lambda_1 = \lambda_1, \text{ weil } \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1, i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

weiterhin,

$$\frac{u_r}{u \lambda_1^r} = \alpha_1 + \sum_{i=2}^m \frac{c_i}{c_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^r \alpha_i \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \alpha_1.$$

□

Die Tatsache, dass  $c_1$  unbekannt ist, soll uns nicht stören, denn  $\frac{u_r}{\lambda_1^r}$  kann zum Einheitsvektor normiert werden. Aus dem Beweis des Lemmas 6.6.5 wird klar, dass die Konvergenz-geschwindigkeit von  $\frac{u_{ri}}{u_{r-1,i}}$  gegen  $\lambda_1$  und von  $\frac{u_r}{c_1 \lambda_1^r}$  gegen  $\alpha_1$  genau dann schlechter wird, wenn  $\lambda_1 \approx \lambda_2$ , wenn also  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 1$ .

Was wäre aber im Fall  $\lambda_1 \approx \lambda_2$  zu tun, um die Konvergenz des Verfahrens zu beschleunigen? Statt  $\Sigma$  kann man in den Iterationen  $\Sigma - \rho I$  verwenden, um das Verhältnis  $\frac{\lambda_2 - \rho}{\lambda_1 - \rho}$  kleiner zu machen. Oder, statt  $\Sigma$  verwendet man  $(\Sigma - \rho I)^{-1}$ , das heißt, man löst das Gleichungssystem  $(\Sigma - \rho I) u_r = u_{r-1}$  für jedes  $r \in \mathbb{N}$ . Somit ist für die geeignete Wahl von  $\rho$  die Konvergenz zu  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  möglich (im zweiten Fall).

**Übungsaufgabe 6.7.2.** Konstruieren Sie diese Vektoren und beweisen Sie die Konvergenz!

Eine Beschleunigung der Konvergenz kann auch erreicht werden, wenn statt  $\{u_r\}$  die Folge  $\{u_{2^r}\}$  betrachtet wird,  $u_{2^r} = T^{2^r} u_0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Weitere Maßnahmen zur Verbesserung des Algorithmus der Potenzmethode findet man in [18], S. 410-411.

# Literaturverzeichnis

- [1] H. Albrecher, S. A. Ladoucette, and J. L. Teugels. Asymptotics of the sample coefficient of variation and the sample dispersion. *J. Statist. Plann. Inference*, 140(2):358–368, 2010.
- [2] H. Dehling, B. Haupt. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Springer, Berlin, 2003.
- [3] P. Bickel and K. Doksum. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. Prentice Hall, London, 2001. 2nd ed., Vol. 1.
- [4] A. A. Borovkov. *Mathematical Statistics*. Gordon & Breach, 1998.
- [5] M. Burkschat, E. Cramer, and U. Kamps. *Beschreibende Statistik, Grundlegende Methoden*. Springer, Berlin, 2004.
- [6] G. Casella and R. L. Berger. *Statistical Inference*. Pacific Grove (CA), Duxbury, 2002.
- [7] E. Cramer, K. Cramer, U. Kamps, and Zuckschwerdt. *Beschreibende Statistik, Interaktive Grafiken*. Springer, Berlin, 2004.
- [8] E. Cramer and U. Kamps. *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Springer, Berlin, 2007.
- [9] P. Dalgaard. *Introductory Statistics with R*. Springer, Berlin, 2002.
- [10] A.J Dobson. *An Introduction to Generalized Linear Models*. Chapman & Hall, Boca Raton, 2002.
- [11] Joseph L Doob. The limiting distributions of certain statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, 6(3):160–169, 1935.
- [12] L. Fahrmeir, T. Kneib, and S. Lang. *Regression. Modelle, Methoden und Anwendungen*. Springer, Berlin, 2007.
- [13] L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, and G. Tutz. *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. Springer, Berlin, 2001.
- [14] H. O. Georgii. *Stochastik*. de Gruyter, Berlin, 2002.

- [15] J. Hartung, B. Elpert, and K. H. Klösener. *Statistik*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1993. 9. Auflage.
- [16] C. C. Heyde and E. Seneta. *Statisticians of the Centuries*. Springer, Berlin, 2001.
- [17] A. Irle. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Grundlagen, Resultate, Anwendungen*. Teubner, 2001.
- [18] I. T. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer, 2nd edition edition, 2002.
- [19] L. J. Kazmir. *Wirtschaftsstatistik*. McGraw-Hill, 1996.
- [20] K. R. Koch. *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer, Berlin, 1999.
- [21] A. Krause and M. Olson. *The Basics of S-PLUS*. Springer, Berlin, 2002. Third Ed.
- [22] E. L. Lehmann. *Elements of Large-Sample Theory*. Springer, New York, 1999.
- [23] J. Lehn and H. Wegmann. *Einführung in die Statistik*. Teubner, Stuttgart, 2000. 3. Auflage.
- [24] J. Maindonald and J. Braun. *Data Analysis and Graphics Using R*. Cambridge University Press, 2003.
- [25] M. Overbeck-Larisch and W. Dolejsky. *Stochastik mit Mathematica*. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [26] H. Pruscha. *Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik*. Teubner, Stuttgart, 2000.
- [27] H. Pruscha. *Vorlesungen über Mathematische Statistik*. Teubner, Stuttgart, 2000.
- [28] L. Sachs. *Angewandte Statistik*. Springer, 2004.
- [29] L. Sachs and J. Hedderich. *Angewandte Statistik, Methodensammlung mit R*. Springer, Berlin, 2006.
- [30] Robert J Serfling. *Approximation theorems of mathematical statistics*, volume 162. John Wiley & Sons, 2009.
- [31] M. R. Spiegel and L. J. Stephens. *Statistik*. McGraw-Hill, 1999.
- [32] E. Spodarev. *Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse*. Ulm, 2020.

- [33] E. Spodarev. *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Ulm, 2022.
- [34] V. Spokoiny and T. Dickhaus. *Basics of modern mathematical statistics*. Springer, 2015.
- [35] W. A. Stahel. *Statistische Datenanalyse*. Vieweg, 1999.
- [36] W. Venables and D. Ripley. *Modern applied statistics with S-PLUS*. Springer, 1999. 3rd ed.
- [37] L. Wasserman. *All of Statistics. A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, 2004.

# Index

- a-posteriori-Verteilung, 27
- a-priori-Verteilung, 27
- Ablehnungsbereich, 75
- AIC-Kriterium, 200
- analysis of variance, *siehe* Varianzanalyse
- Annahmehbereich, 75
- ANOVA, *siehe* Varianzanalyse
- asymptotische Tests, 193
  
- Bayes-Schätzer, 28
- Bayesche Formel, 27
- best linear unbiased estimator (BLUE), 146
- bester linearer erwartungstreuer Schätzer, 146
- Bestimmtheitsmaß, 156
- bilineare Form, 136
- Binomialverteilung, 99
- Blackwell-Rao, Ungleichung von, 50
- Bonferroni-Ungleichung, 158
- Bootstrap
  - Konfidenzintervall, 34
  - Schätzer, 33
- Bootstrap-Schätzer
  - Monte-Carlo-Methoden, 34
  
- $\chi^2$ -Verteilung, 5
- Cramér-Rao, Ungleichung von, 35
  
- Design-Matrix, 130, 144
  
- Effekt, 177
- Eindeutigkeit der besten erwartungstreuen Schätzer, 47
- Eindeutigkeitssatz
  - für charakteristische Funktionen, 132
  - für momenterzeugende Funktionen, 139
- einparametrische Exponentialklasse, 98
- empirische(r)
  - Verteilungsfunktion, 10
- Entscheidungsregel, 75
- Erlangverteilung, 4
- Exponentialfamilie, 181
  
- Faktorisierungssatz von Neyman-Fisher, 44
- Faltungsstabilität der multivariaten Normalverteilung, 135
- Fehler 1. und 2. Art, 76
- Fisher
  - Fisher-Information, 22
  - Fisher-Snedecor-Verteilung, F-Verteilung, 8
- Fisher Scoring, 198
- Fisher-Informationsmatrix, 118, 187, 199
  
- Gütefunktion, 77
- Gammaverteilung
  - Faltungsstabilität, 4
  - Momenterzeugende und charakteristische Funktion, 3
- Satz von Gauß-Markov, 168
- gemischte Momente, 136
  
- Hauptsatz über zweiseitige Tests, 108
- Hesse-Matrix, 187
- Hoeffding-Ungleichung, 61
- Hypothese, 75
  - Alternative, 75
  - Haupthypothese, 75
  - testbare, 173
- identifizierbar, 1

Information von Kullback-Leibler, 18  
 Informationskoeffizient von Akaike, 200  
 Informationsmatrix von Fisher, 118  
 Irrtumswahrscheinlichkeit, 56  
 Iterationstest, 126

Jackknife-Schätzer für die/den  
   Erwartungswert, 31  
   Varianz, 31  
   Verzerrung (Bias), 32

Karl Popper, 75  
 klassenspezifische Differenzen, 177  
 Klassenstärke, 110  
 klassische ANOVA-Hypothese, 178  
 Konfidenzintervall, 56  
   asymptotisches, 57, 62  
   Bootstrap, 34  
   Lange, 57  
   minimales, 57  
 Konfidenzniveau, 56  
 kritischer Bereich, *siehe* Ablehnungsbe-  
   reich  
 Kullback-Leibler, Information von, 18

Lehmann-Scheffé, Satz von, 48  
 Likelihood-Funktion, 15  
 Likelihood-Ratio-Test, 199  
 lineare Form, 136  
 lineare Regression, 130  
   einfache, 146  
   multiple, 146  
   ohne vollen Rang, 161  
   multivariate mit vollem Rang, 144  
 Lineare Transformation von  $N(\mu, K)$ ,  
   135  
 Linkfunktion, 180  
   natürliche, 184  
 Logit-Modell, 186, 196, 202

Maximum-Likelihood-Schätzer, 15, 16  
   schwache Konsistenz, 19  
 Methode der kleinsten Quadrate, 144  
 MKQ-Schätzer, 144  
 Modelle  
   verallgemeinerte lineare, 180  
 Momentenmethode, 13  
 Momentenschätzer, 13  
 Multinomialverteilung, 110

Newton-Verfahren, 192  
 Neyman-Fisher, Faktorisierungssatz, 44  
 Neyman-Pearson  
   Fundamentallemma, 93  
   Optimalitätssatz, 92  
 nicht-zentrale  $\chi^2_{n,\mu}$ -Verteilung, 139  
 Normalengleichung, 144  
 Normalverteilung  
   Konfidenzintervall  
     für eine Stichprobe, 58  
     für zwei Stichproben, 68  
   multivariate, 131  
   Signifikanztests, 84

Odd, 186

$p$ -Wert, 80  
 Parameterraum, 1  
 Parametervektor, 1  
 Pearson-Teststatistik, 111  
 Plug-in-Methode, 11  
 Plug-in-Schätzer, 11, 12  
 Poisson-Modell, 202  
 Poisson-Regression, 191  
 Poissonverteilung, 70, 87, 89  
   Neyman-Fisher-Test, 122  
   Neyman-Pearson-Test, 95  
 Probit-Modell, 186  
 Punktschätzer, 1

quadratische Form, 136  
   Kovarianz, 136  
 Quantilfunktion der Normalverteilung,  
   186

Randomisierungsbereich, 75  
 Regression  
   binäre kategoriale, 185  
   logistische, 186, 191  
 Resampling-Methode, 30  
 Residuum, 155  
 Reststreuung, 156

Satz  
    $\chi^2$ -Verteilung, Spezialfall, 5  
   Dichte der  $t$ -Verteilung, 6  
   Faktorisierungssatz von Neyman-  
     Fisher, 44  
   Lehmann-Scheffé, 48

- Momenterzeugende und charakteristische Funktion der Gamma-  
verteilung, 3
  - Schwache Konsistenz von ML-  
Schätzern, 19
  - Ungleichung von Cramér-Rao, 35
- Schätzer
  - suffizienter, 40
- Score-Funktion, 199
- Score-Statistik, 199
- Stufe eines Einflussfaktors, 177
- Störgrößen, 144
- suffizienter Schätzer, 40
- $t$ -Verteilung, 6
- Test
  - Anpassungstest, 109
  - Anpassungstest von Shapiro, 123
  - asymptotischer, 78, 86
  - auf Zusammenhang, 154
  - besserer, 90
  - besten, 91
  - Binomialtest, 124
  - $\chi^2$ -Anpassungstest, 110
  - $\chi^2$ -Pearson-Fisher-Test, 116
  - für Regressionsparameter, 154
  - Iterationstest, 126
  - Kolmogorov-Smirnov, 110
  - Macht, 77
  - Monte-Carlo-Test, 78
  - Neyman-Pearson-Test, 91
    - Ablehnungsbereich, 91
    - einseitiger, 97
    - modifizierter, 105
    - Parameter der Poissonverteilung,  
95
    - Umfang, 92
  - NP-Test, *siehe* Neyman-Pearson-  
Test
  - Parameter der Normalverteilung, 84
  - parametrischer, 77
    - einseitiger, 77
    - linksseitiger, 77
    - rechtsseitiger, 77
    - zweiseitiger, 77
  - parametrischer Signifikanztest, 84
  - power, *siehe* Macht
  - randomisierter, 75, 89
  - Schärfe, 77
  - von Shapiro-Francia, 124
  - von Shapiro-Wilk, 124
  - Stärke, 77
  - Umfang, 90
  - unverfälschter, 82
  - Wald-Test, 86
  - von Wald-Wolfowitz, 128
- Teststatistik, 58
- unimodal, 19
- Variabilität der Erwartungswerte, 177
- Varianzanalyse, 177
  - einfaktorische, 177
  - zweifaktorische, 179
- verallgemeinerte Inverse Matrix, 161
- Verfahren von Cramér-Wold, 133
- Verlustfunktion, 27
- Verteilung mit monotonem Dichtekoeffi-  
zienten, 97
- Vollständigkeit, 45
- Wald-Statistik, 199