



ulm university universität  
**uulm**

# Angewandte Stochastik II

## Vorlesungsskript

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

ULM  
2015

# Vorwort

Dieses Skript entstand aus dem Zyklus der Vorlesungen über angewandte Stochastik, die ich in den Jahren 2005–2014 an der Universität Ulm gehalten habe. Im zweiten Teil des Skriptes handelt es sich um die erste Einführung in die Statistik für Studierende der nichtmathematischen Studiengänge (Informatiker, Ingenieure, Physiker, usw.). Aus Zeitgründen wurde auf viele Beweise verzichtet, um dem kleinen Umfang dieser Vorlesung (2 SWS) gerecht zu werden.

Ulm, den 21.01.2015

Evgeny Spodarev

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Typische Fragestellungen, Aufgaben und Ziele der Statistik . . . . .	1
1.2	Statistische Merkmale und ihre Typen . . . . .	2
1.3	Statistische Daten und Stichproben . . . . .	3
1.4	Stichprobenfunktionen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Beschreibende Statistik</b>	<b>5</b>
2.1	Verteilungen und ihre Darstellungen . . . . .	5
2.1.1	Häufigkeiten und Diagramme . . . . .	5
2.1.2	Empirische Verteilungsfunktion . . . . .	7
2.2	Beschreibung von Verteilungen . . . . .	8
2.2.1	Lagemaße . . . . .	9
2.2.2	Streuungsmaße . . . . .	13
2.2.3	Maße für Schiefe und Wölbung . . . . .	15
2.3	Quantilplots (Quantil-Grafiken) . . . . .	16
2.4	Dichteschätzung . . . . .	18
2.5	Beschreibung und Exploration von bivariaten Datensätzen . . . . .	22
2.5.1	Zusammenhangsmaße . . . . .	22
2.5.2	Einfache lineare Regression . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Punktschätzer</b>	<b>34</b>
3.1	Parametrisches Modell . . . . .	34
3.2	Parametrische Familien von statistischen Prüfverteilungen . . . . .	35
3.2.1	Gamma-Verteilung . . . . .	35
3.2.2	Student-Verteilung (t-Verteilung) . . . . .	38
3.2.3	Fisher-Snedecor-Verteilung (F-Verteilung) . . . . .	39
3.3	Punktschätzer und ihre Grundeigenschaften . . . . .	40
3.3.1	Eigenschaften von Punktschätzern . . . . .	40
3.3.2	Schätzer des Erwartungswertes und empirische Momente . . . . .	42
3.3.3	Schätzer der Varianz . . . . .	43
3.3.4	Eigenschaften der Ordnungsstatistiken . . . . .	47
3.3.5	Empirische Verteilungsfunktion . . . . .	48
3.4	Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern . . . . .	52
3.4.1	Momentenschätzer . . . . .	52
3.4.2	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	54
3.4.3	Bayes-Schätzer . . . . .	58

3.4.4	Resampling-Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern . . . . .	61
3.5	Weitere Güteeigenschaften von Punktschätzern . . . . .	65
3.5.1	Ungleichung von Cramér-Rao . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Konfidenzintervalle</b>	<b>71</b>
4.1	Einführung . . . . .	71
4.2	Ein-Stichproben-Probleme . . . . .	73
4.2.1	Normalverteilung . . . . .	73
4.2.2	Konfidenzintervalle aus stochastischen Ungleichungen . . . . .	75
4.2.3	Asymptotische Konfidenzintervalle . . . . .	77
4.3	Zwei-Stichproben-Probleme . . . . .	79
4.3.1	Normalverteilte Stichproben . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Tests statistischer Hypothesen</b>	<b>81</b>
5.1	Allgemeine Philosophie des Testens . . . . .	81
5.2	Nichtrandomisierte Tests . . . . .	90
5.2.1	Parametrische Signifikanztests . . . . .	90
5.3	Randomisierte Tests . . . . .	92
5.3.1	Grundlagen . . . . .	93
5.3.2	Neyman-Pearson-Tests bei einfachen Hypothesen . . . . .	94
5.3.3	Einseitige Neyman-Pearson-Tests . . . . .	100
5.3.4	Unverfälschte zweiseitige Tests . . . . .	106
5.4	Anpassungstests . . . . .	111
5.4.1	$\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	112
<b>Literatur</b>		<b>117</b>
<b>Index</b>		<b>120</b>

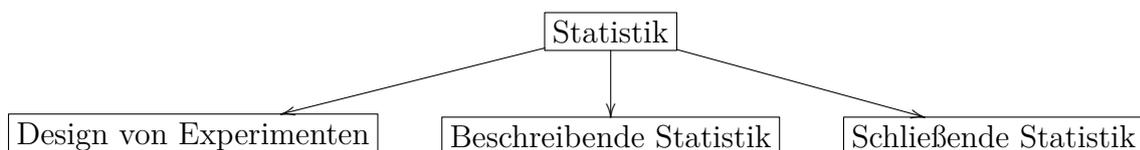
# 1 Einführung

## 1.1 Typische Fragestellungen, Aufgaben und Ziele der Statistik

Im alltäglichen Sprachgebrauch versteht man unter „Statistik“ eine Darstellung von Ergebnissen des Zusammenzählens von Daten und Fakten jeglicher Art, wie z.B. ökonomischen Kenngrößen, politischen Umfragen, Daten der Marktforschung, klinischen Studien in der Biologie und Medizin, usw.

Die *mathematische Statistik* jedoch kann viel mehr. Sie arbeitet mit *Daten-Stichproben*, die nach einem bestimmten Zufallsmechanismus aus der *Grundgesamtheit* aller Daten, die in Folge von Beobachtung, Experimenten (reale Daten) oder Computersimulation (synthetische Daten) erhoben wurden. Dabei beschäftigt sich die mathematische Statistik mit folgenden Fragestellungen:

1. Wie sollen die Daten gewonnen werden? (Design von Experimenten)
2. Wie sollen (insbesondere riesengroße) Datensätze beschrieben werden, um die Gesetzmäßigkeiten und Strukturen in ihnen entdecken zu können? (Beschreibende (deskriptive) und explorative Statistik)
3. Welche Schlüsse kann man aus den Daten ziehen? (Schließende oder induktive Statistik)



In dieser einführenden Vorlesung werden wir Teile der beschreibenden und schließenden Statistik kennenlernen, wobei die Datenerhebung aus Platzgründen ausgelassen wird. Die *Arbeitsweise eines Statistikers* sieht folgendermaßen aus:

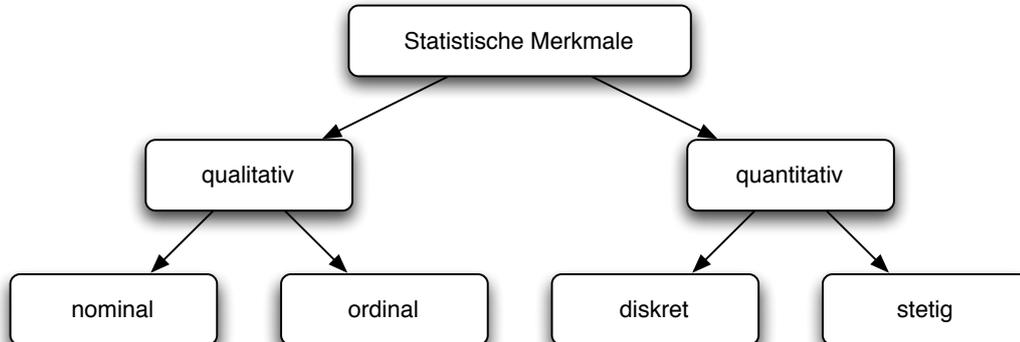
1. *Datenerhebung*
2. *Visualisierung und beschreibende Datenanalyse*
3. *Datenbereinigung* (z.B. Erkennung fehlerhafter Messungen, Ausreißern, usw.)
4. *Explorative Datenanalyse* (Suche nach Gesetzmäßigkeiten)

5. *Modellierung der Daten* mit Methoden der Stochastik
6. *Modellanpassung* (Schätzung der Modellparameter)
7. *Modellvalidierung* (wie gut war die Modellanpassung?)
8. *Schließende Datenanalyse*:
  - Konstruktion von *Vertrauensintervallen* (Konfidenzintervallen) für Modellparameter und deren Funktionen,
  - Tests statistischer Hypothesen,
  - Vorhersage von Zielgrößen (z.B. auf Basis modellbezogener Computersimulation).

Uns werden in diesem Vorlesungsskript vor allem die Arbeitspunkte 2), 4)–6) und 8) beschäftigen.

## 1.2 Statistische Merkmale und ihre Typen

Die Daten, die zur statistischen Analyse vorliegen, können eine oder mehrere interessierende Größen (die auch *Variablen* oder *Merkmale* genannt werden) umfassen. Ihre Werte werden *Merkmalsausprägungen* genannt. In dem nachfolgenden Diagramm werden mögliche Typen der statistischen Merkmale gegeben.



Diese Typen entstehen in Folge der Klassifikation von Wertebereichen (Skalen) der Merkmale. Dennoch ist diese Einteilung nicht vollständig und kann bei Bedarf erweitert werden. Man unterscheidet *qualitative* und *quantitative* Merkmale. *Quantitative Merkmale* lassen sich inhaltlich gut durch Zahlen darstellen (z.B. Kredithöhe in €, Körpergewicht und Körpergröße, Blutdruck usw.). Sie können *diskrete* oder *stetige* Wertebereiche haben, wobei diskrete Merkmale isolierte Werte annehmen können (z.B. Anzahl der Schäden eines Versicherers pro Jahr). Stetige Wertebereiche hingegen sind überabzählbar. Dennoch liegen in der Praxis stetige Merkmale in gerundeter Form vor (z.B. Körpergröße auf cm gerundet, Geldbeträge auf € gerundet usw.).

Im Gegensatz zu den quantitativen Merkmalen sind die Inhalte der *qualitativen Merkmale*, wie z.B. Blutgruppe (0, A, B und AB) oder Familienstand (ledig, verheiratet, verwitwet), nicht sinnvoll durch Zahlen darzustellen. Sie können zwar formell mit Zahlen kodiert werden (z.B. bei Blutgruppen  $0 = 0, A = 1, B = 2, AB = 3$ ), aber solche Kodierungen stellen keinen inhaltlichen Zusammenhang zwischen Ausprägungen und Zahlen-Codes dar sondern dienen lediglich der besseren Identifikation der Merkmale auf einem Rechner. Es ist insbesondere unsinnig, Mittelwerte und ähnliches von solchen Codes zu bilden.

Ein qualitatives Merkmal mit nur 2 Ausprägungen (z.B. männlich / weiblich, Raucher / Nichtraucher) heißt *alternativ*. Ein qualitatives Merkmal kann *ordinal* (wenn sich eine natürliche lineare Ordnung in den Merkmalsausprägungen finden lässt, wie z.B. gut / mittel / schlecht bei Qualitätsbewertung in Umfragen oder sehr gut / gut / befriedigend / ausreichend / mangelhaft / ungenügend bei Schulnoten) oder *nominal* (wenn eine solche Ordnung nicht vorhanden ist) sein. Beispiele von nominalen Merkmalen sind Fahrzeugmarken in der KFZ-Versicherung (z.B. BMW, Peugeot, Volvo, usw.) oder Führerscheinklassen (A, B, C, ...). Datenmerkmale können auch mehrdimensionale Ausprägungen haben. In dieser Vorlesung behandeln wir jedoch hauptsächlich eindimensionale Merkmale.

### 1.3 Statistische Daten und Stichproben

Aus den obigen Beispielen wird klar, dass ein Statistiker mit Datensätzen der Form  $(x_1, \dots, x_n)$  arbeitet, wobei die Einzeleinträge  $x_i$  aus einer Grundgesamtheit  $G \subset \mathbb{R}^k$  stammen, die hypothetisch unendlich groß ist. Der vorliegende Datensatz  $(x_1, \dots, x_n)$  wird auch (*konkrete*) *Stichprobe* von Umfang  $n$  genannt. Die Menge  $B$  aller potentiell möglichen Stichproben bezeichnen wir als *Stichprobenraum* und setzen zur Vereinfachung der Notation  $B = \mathbb{R}^{kn}$ . In diesem Skript werden wir meistens die univariate statistische Analyse (also  $k = 1$ , ein eindimensionales Merkmal) betreiben. In der beschreibenden Statistik arbeitet man mit Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und ihren Funktionen, um diese Daten visualisieren zu können. Für die Aufgabe der schließenden Statistik jedoch reicht diese Datenebene nicht mehr aus. Daher wird die zweite Ebene der Betrachtung eingeführt, die sogenannte *Modellebene*. Dabei wird angenommen, dass die konkrete Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  eine *Realisierung* eines stochastischen Modells  $(X_1, \dots, X_n)$  darstellt, wobei  $X_1, \dots, X_n$  (meistens unabhängige identisch verteilte) Zufallsvariablen auf einem (nicht näher spezifizierten) Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sind. Diese Zufallsvariablen  $X_i, i = 1, \dots, n$  können als konsequente Beobachtungen eines Merkmals interpretiert werden.

Der Vektor  $(X_1, \dots, X_n)$  wird dabei *Zufallsstichprobe* genannt. Man setzt weiter voraus, dass  $EX_i^2 < \infty \forall i = 1, \dots, n$ , damit man von der Varianz  $\text{Var } X_i$  der Einzeleinträge sprechen kann. Es wird außerdem angenommen, dass ein  $\omega \in \Omega$  existiert, sodass  $X_i(\omega) = x_i \forall i = 1, \dots, n$ . Sei  $F$  die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X_i$ . Eine der wichtigsten Aufgaben der Statistik ist die Bestimmung von  $F$  (man sagt, „Schätzung von  $F$ “) aus den konkreten Daten  $(x_1, \dots, x_n)$ . Dabei können auch Momente von  $F$  und

ihre Funktionen (Erwartungswert, Varianz, Schiefe, usw.) von Interesse sein.

## 1.4 Stichprobenfunktionen

Um die obigen Aufgaben erfüllen zu können, braucht man gewisse Funktionen  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  auf dem Stichprobenraum, die diese Stichprobe bewerten.

### Definition 1.4.1

Eine Borel-messbare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *Stichprobenfunktion*. Wenn man auf der Modellebene mit einer Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  arbeitet, so heißt die Zufallsvariable

$$\varphi(X_1, \dots, X_n)$$

eine *Statistik*. In der Schätztheorie spricht man dabei von *Schätzern* und bei statistischen Tests wird  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  *Teststatistik* genannt.

Beispiele für Stichprobenfunktionen sind unter anderen das *Stichprobenmittel*

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

die *Stichprobenvarianz*

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

und die *Ordnungsstatistiken*

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)},$$

die entstehen, wenn man eine Stichprobe, die aus quantitativen Merkmalen besteht, linear ordnet ( $x_{(1)} = \min_{i=1, \dots, n} x_i, \dots, x_{(n)} = \max_{i=1, \dots, n} x_i$ ). Weitere Beispiele und ihre Charakteristiken werden in Kapitel 2 gegeben.

## 2 Beschreibende Statistik

Sei eine konkrete Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  gegeben, wobei die  $x_i$  als Realisierungen der Zufallsvariablen  $X_i \stackrel{d}{=} X$  mit Verteilungsfunktion  $F$  interpretiert werden können.

### 2.1 Verteilungen und ihre Darstellungen

In diesem Abschnitt werden wir Methoden zur statistischen Beschreibung und grafischen Darstellung der (unbekannten) Verteilung  $F$  betrachten.

#### 2.1.1 Häufigkeiten und Diagramme

Falls das quantitative Merkmal  $X$  eine endliche Anzahl von Ausprägungen  $\{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ , besitzt, also

$$\mathbb{P}(X \in \{a_1, \dots, a_k\}) = 1,$$

dann kann eine Schätzung der Zähldichte  $p_i = P(X = a_i)$  von  $X$  aus den Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  grafisch dargestellt werden. Ähnliche Darstellungen sind für die Dichte  $f(x)$  von absolut stetigen Merkmalen  $X$  möglich, wobei ihr Wertebereich  $C$  sich in  $k$  Klassen aufteilen lässt:  $(c_{i-1}, c_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , wobei  $c_0 = -\infty$ ,  $c_1 < \dots < c_{k-1}$ ,  $c_k = \infty$  ist. Dann kann die Zähldichte  $p_i = \mathbb{P}(X \in (c_{i-1}, c_k])$  gegeben durch

$$p_i = \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx, \quad i = 0, \dots, k$$

betrachtet werden.

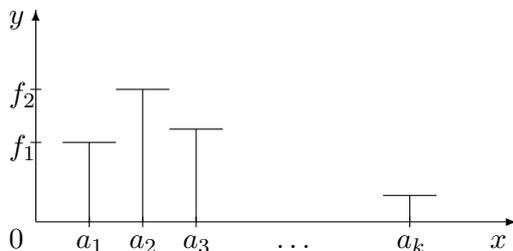
#### Definition 2.1.1

1. Die *absolute Häufigkeit* von Merkmalsausprägung  $a_i$  bzw. Klasse  $(c_{i-1}, c_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$  ist  $n_i = \#\{x_j, j = 1, \dots, n : x_j = a_i\}$  bzw.  $n_i = \#\{x_j, j = 1, \dots, n : x_j \in (c_{i-1}, c_i]\}$ .
2. Die *relative Häufigkeit* von Merkmalsausprägung  $a_i$  bzw. Klasse  $(c_{i-1}, c_i]$  ist  $f_i = n_i/n$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Es gilt offensichtlich  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $0 \leq f_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^k f_i = 1$ . Die absoluten und relativen Häufigkeiten werden oft in Häufigkeitstabellen zusammengefasst. Zu ihrer Visualisierung dienen so genannte *Diagramme*. *Histogramme* werden gebildet, indem man

die Paare  $(a_i, f_i)$  (bzw.  $(1/2(c_1+x_{(1)}), f_1)$ ,  $(1/2(c_{i-1}+c_i), f_i)$ ,  $i = 2, \dots, k-1$ ,  $(1/2(c_{k-1}+x_{(n)}), f_k)$  im absolut stetigen Fall, wobei hier die Bezeichnung  $a_i = 1/2(c_{i-1} + c_i)$  verwendet wird und  $x_{(1)} < c_1$ ,  $x_{(n)} > c_{k-1}$  angenommen wird.) auf der Koordinatenebene  $(x, y)$  folgendermaßen aufträgt:

- *Stabdiagramm*:  $f_i$  wird als Höhe des senkrechten Strichs über  $a_i$  dargestellt:



- *Säulendiagramm*: genauso wie ein Stabdiagramm, nur werden Striche durch Säulen der Form  $(c_{i-1}, c_i] \times f_i$  ersetzt, wobei im diskreten Fall die Aufteilung der reellen Achse  $-\infty = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{k-1} < c_k = \infty$  in Intervalle beliebig vorgenommen werden kann.

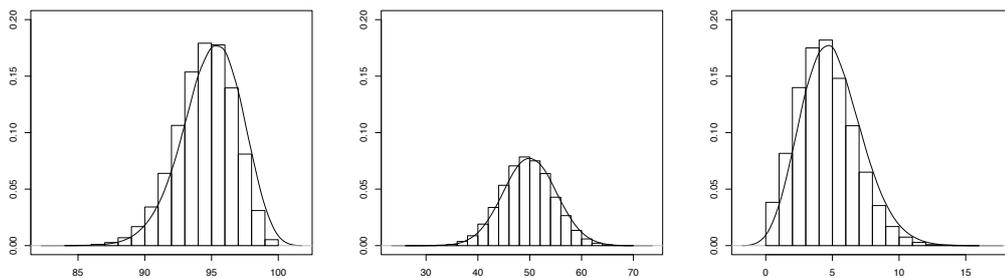
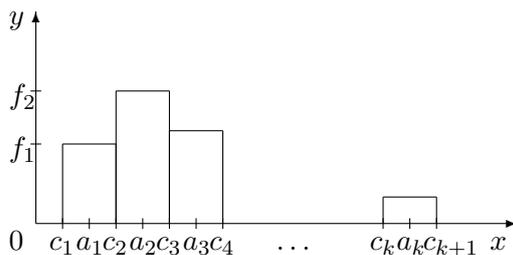


Abb. 2.1: Das Histogramm der Daten mit einer rechtssteilen (linksschiefen), symmetrischen und linkssteilen (rechtsschiefen) Verteilung und ihre Dichte.

### Bemerkung 2.1.1

Die in Abschnitt 2.1.1 betrachteten Methoden dienen der Visualisierung von (Zähl-)

Dichten der Verteilung eines beobachteten Merkmals  $X$ . Aus dem Histogramm kann z.B. die Interpretation der Form der Dichte abgelesen werden:

Ist die zugrundeliegende Verteilung  $F_X$  symmetrisch bzw. linkssteil (rechtsschief) oder rechtssteil (linksschief) (vgl. Abb. 2.1) oder ist sie unimodal (d.h. eingipflig), bimodal (d.h. mit 2 Gipfeln) oder multimodal (also mit mehreren Gipfeln) (vgl. Abb. 2.2).

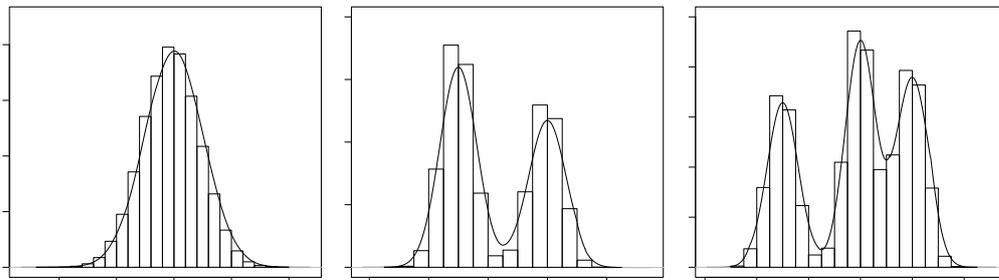


Abb. 2.2: Histogramm der Daten mit der Dichte einer unimodalen, bimodalen und multimodalen Verteilung

### 2.1.2 Empirische Verteilungsfunktion

Es sei eine konkrete Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  gegeben, die eine Realisierung des statistischen Modells  $(X_1, \dots, X_n)$  ist, wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F_X : X_i \stackrel{d}{=} X \sim F_X$  sind. Wie kann die unbekannte Verteilungsfunktion  $F_X$  aus den Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  rekonstruiert (die Statistiker sagen „geschätzt“) werden? Dies ist mit Hilfe der sogenannten empirischen Verteilungsfunktion möglich:

#### Definition 2.1.2

1. Die Funktion  $\hat{F}_n(x) = \#\{x_i : x_i \leq x, i = 1, \dots, n\}/n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$  heißt *empirische Verteilungsfunktion der konkreten Stichprobe*  $(x_1, \dots, x_n)$ . Dabei gilt  $\hat{F}_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow [0, 1]$ , weil  $\hat{F}_n(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n, x)$ .
2. Die mit  $x \in \mathbb{R}$  indizierte Zufallsvariable  $\hat{F}_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  heißt *empirische Verteilungsfunktion der Zufallsstichprobe*  $(X_1, \dots, X_n)$ , wenn

$$\hat{F}_n(x, \omega) = \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \#\{X_i, i = 1, \dots, n : X_i(\omega) \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent zur Definition 2.1.2 kann man

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

schreiben, wobei

$$\mathbb{I}(x \in A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq x_{(n)}, \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 0, & x < x_{(1)}. \end{cases}$$

für  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ .

Dabei ist die Höhe des Sprungs an Stelle  $x_{(i)}$  gleich der relativen Häufigkeit  $f_i$  des Wertes  $x_{(i)}$ . Falls  $x_{(i)} = x_{(i+1)}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so tritt der Wert  $i/n$  nicht auf. In Abbildung 2.3 sieht man, dass  $\hat{F}_n(x)$  eine rechtsstetige monoton nichtfallende Treppenfunktion

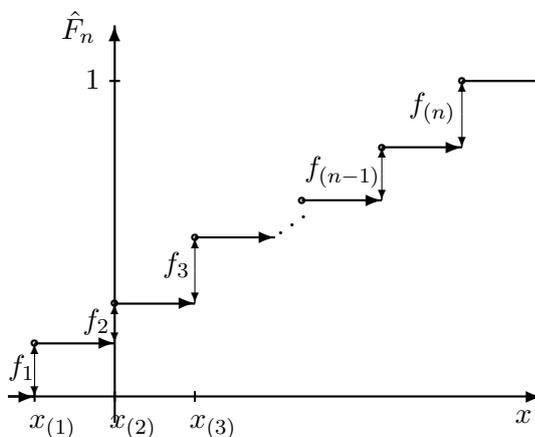


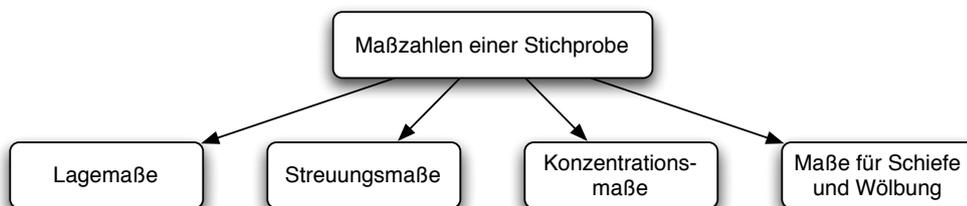
Abb. 2.3: Eine typische empirische Verteilungsfunktion

funktion ist, für die  $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ ,  $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$  gilt.

### Übungsaufgabe 2.1.1

Zeigen Sie, dass  $\hat{F}_n(x)$  eine Verteilungsfunktion ist.

## 2.2 Beschreibung von Verteilungen



Es sei eine konkrete Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  gegeben. Im Folgenden werden Kennzahlen (die sogenannten Maße) dieser Stichprobe betrachtet, welche die wesentlichen Aspekte der der Stichprobe zugrundeliegenden Verteilung wiedergeben:

1. Wo liegen die Werte  $x_i$  (Mittel, Ordnungsstatistiken, Quantile)?  $\implies$  Lagemaße
2. Wie stark streuen die Werte  $x_i$  (Varianz)  $\implies$  Streuungsmaße
3. Wie stark sind die Werte  $x_i$  in gewissen Bereichen von  $\mathbb{R}$  konzentriert  $\implies$  Konzentrationsmaße
4. Wie schief bzw. gewölbt ist die Verteilung von  $X$   $\implies$  Maße für Schiefe und Wölbung

### 2.2.1 Lagemaße

Man unterscheidet folgende wichtige Lagemaße:

- Mittelwerte: Stichprobenmittel (arithmetisch), geometrisches und harmonisches Mittel, gewichtetes Mittel, getrimmtes Mittel
- Ordnungsstatistiken und Quantile, insbesondere Median und Quartile
- Modus

Betrachten wir sie der Reihe nach:

1. *Mittelwertbildung*: Seit der Antike kennt man mindestens 3 Arten der *Mittelberechnung* von  $n$  Zahlen  $(x_1, \dots, x_n)$ :

- *arithmetisch*:  $\bar{x}_n = 1/n \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,
- *geometrisch*:  $x_n^g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$ ,  $x_1, \dots, x_n > 0$ ,
- *harmonisch*:  $x_n^h = \left(1/n \sum_{i=1}^n x_i^{-1}\right)^{-1}$ ,  $x_1, \dots, x_n \neq 0$ .

- a) Das *arithmetische Mittel* wird in der Statistik am meisten benutzt, weil es keine Voraussetzungen über den Wertebereich von  $x_1, \dots, x_n$  braucht. Es wird auch *Stichprobenmittel* genannt. Offensichtlich ist  $\bar{x}_n$  ein Spezialfall des sogenannten gewichteten Mittels  $x_n^w = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ , wobei für die Gewichte  $w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$  und  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  gilt. Als eine natürliche Gewichtung kommt  $w_i = 1/n$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  bei einer konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  in Frage. Die Summe aller Abweichungen von  $\bar{x}_n$  ist Null, denn  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) = n\bar{x}_n - n\bar{x}_n = 0$ , d.h.  $\bar{x}_n$  stellt geometrisch den Schwerpunkt der Werte  $x_i$  dar, falls jedem Punkt eine Einheitsmasse zugeordnet wird. Wenn es in der Stichprobe große Ausreißer gibt, so beeinflussen sie das

Stichprobenmittel entscheidend und erschweren so die objektive Datenanalyse. Deshalb verwendet man oft die robuste Version des arithmetischen Mittels, das sogenannte *getrimmte Mittel*:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{n - 2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_{(i)},$$

bei dessen Berechnung die  $k$  kleinsten und  $k$  größten Ausreißer ausgelassen werden, wobei  $k \ll n/2$ .

- b) Das *geometrische Mittel* wird hauptsächlich bei der Beobachtung von Wachstums- und Zinsfaktoren verwendet. Sei  $x_i = B_i/B_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  der Wachstumsfaktor des Merkmals  $B_i$ , das in den Jahren  $i = 1, \dots, n$  beobachtet wurde (z.B. Inflationsfaktor). Dann ist  $B_n = B_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  und somit wäre der Zins im Jahre  $n$

$$B_n^g = B_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n = B_0 \cdot (x_n^g)^n.$$

Für das geometrische Mittel gilt

$$\log x_n^g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \leq \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

wegen der Konkavität des Logarithmus, d.h.  $\log x_n^g = \overline{\log x_n} \leq \log \bar{x}_n$  und somit  $x_n^g \leq \bar{x}_n$ , wobei  $x_n^g = \bar{x}_n$  genau dann, wenn  $x_1 = \dots = x_n$ .

- c) Das *harmonische Mittel* wird bei der Ermittlung von z.B. durchschnittlicher Geschwindigkeiten gebraucht.

### Beispiel 2.2.1

Seien  $x_i$  Geschwindigkeiten mit denen Bauteile eine Produktionslinie der Länge  $l$  durchlaufen. Die gesamte Bearbeitungszeit ist  $l/x_1 + \dots + l/x_n$  und die Durchschnittslaufgeschwindigkeit

$$\frac{l + \dots + l}{l/x_1 + \dots + l/x_n} = x_n^h.$$

Es gilt  $x_{(1)} \leq x_n^h \leq x_n^g \leq \bar{x}_n \leq x_{(n)}$  für  $x_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### Übungsaufgabe 2.2.1

Beweisen Sie diese Relation per Induktion bzgl.  $n$ .

## 2. Ordnungsstatistiken und Quantile

### Definition 2.2.1

Die *Ordnungsstatistiken*  $x_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  sind durch die messbare Permutation  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  gegeben, so dass

$$x_{(i)} = \min \{x_j : \#\{k : x_k \leq x_j\} \geq i\}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Somit gilt  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ . Dieselbe Definition kann auch auf der Modellebene gegeben werden.

**Definition 2.2.2**

- a) Sei nun  $X$  die Zufallsvariable, die das Merkmal modelliert. Sei  $F_X$  ihre Verteilungsfunktion. Die verallgemeinerte Inverse von  $F_X$ , definiert durch

$$F_X^{-1}(y) = \inf \{x : F_X(x) \geq y\}, \quad y \in [0, 1],$$

heißt *Quantilfunktion* von  $F_X$  bzw.  $X$ . Es gilt  $F_X^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Die Zahl  $F_X^{-1}(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  wird  $\alpha$ -*Quantil* von  $F_X$  genannt.

- b) •  $F_X^{-1}(0, 25)$  heißt *unteres Quartil*,  
 •  $F_X^{-1}(0, 75)$  heißt *oberes Quartil*,  
 •  $F_X^{-1}(0, 5)$  heißt der *Median* der Verteilung von  $X$ .

Zwischen Ordnungsstatistiken und Quantilen besteht ein enger Zusammenhang. So bedeutet  $F_X^{-1}(\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , dass ca.  $\alpha \cdot 100\%$  aller Merkmalsausprägungen in der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  unter  $F_X^{-1}(\alpha)$  und ca.  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  über  $F_X^{-1}(\alpha)$  liegen (im absolut stetigen Fall). Insbesondere gilt  $F_X^{-1}(\alpha) \approx x_{([n\alpha])}$ , deshalb werden Ordnungsstatistiken auch *empirische Quantile* genannt. Dabei ist  $x_\alpha$  definiert als

$$x_\alpha = \begin{cases} x_{([n\alpha]+1)}, & n\alpha \notin \mathbb{N} \\ 1/2(x_{([n\alpha])} + x_{([n\alpha]+1)}), & n\alpha \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

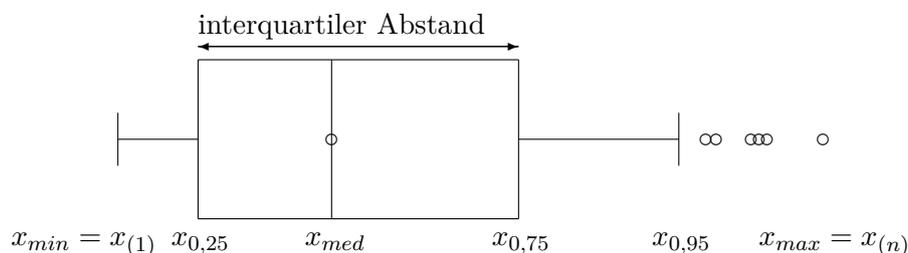
Dies ist die allgemeine Definition des *empirischen  $\alpha$ -Quantils*.

Der *empirische Median* ist

$$x_{med} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \left( x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)} \right), & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit sind mindestens 50% aller Stichprobenwerte kleiner gleich und 50% größer gleich  $x_{med}$ . Der Median ist ein Lagemaß, das ein robuster Ersatz für den Mittelwert darstellt, denn er ist bzgl. Ausreißern in der Stichprobe nicht sensibel.

Die oben genannten Statistiken werden in einem *Box-Plot* zusammengefasst und grafisch dargestellt:



Manchmal werden  $x_{(1)}$  und  $x_{(n)}$  durch  $x_{0,05}$  und  $x_{0,95}$  ersetzt. Die restlichen Werte werden darüber hinaus als Einzelpunkte auf der  $x$ -Achse abgebildet. Dann liegt ein sogenannter *modifizierter Box-Plot* vor.

3. *Modus*: Sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Stichprobe, die aus  $n$  unabhängigen Realisierungen des Merkmals  $X$  besteht. Sei  $(p(x)) f(x)$  die (Zähl-) Dichte von  $X$ , wobei die Verteilung von  $X$  unimodal ist.

**Definition 2.2.3**

- a) Der Wert  $x_{mod} = \arg \max f(x)$  ( $\arg \max p(x)$ ) wird der *Modus der Verteilung von  $X$*  genannt (vgl. Abb. 2.4).
- b) Empirisch wird  $\hat{x}_{mod}$  als  $\frac{c_{m-1} + c_m}{2}$  für  $m = \arg \max f_i$  definiert, also als die Mitte des Intervalls mit der größten Häufigkeit des Vorkommens in der Stichprobe, falls dieser eindeutig bestimmbar ist.

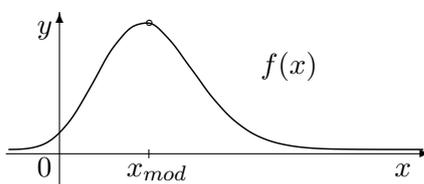


Abb. 2.4: Veranschaulichung des Modus

Den Mittelwert  $\bar{x}_n$ , Median  $x_{med}$  und Modus  $x_{mod}$  kann man auch wie folgt definieren:

$$\bar{x}_n = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$$

$$x_{med} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n |x_i - x|$$

$$\hat{x}_{mod} = \frac{c_{m-1} + c_m}{2}, \quad \text{wobei } m = \arg \min_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i \notin (c_{j-1}, c_j])$$

**Übungsaufgabe 2.2.2**

Zeigen Sie die Äquivalenz der oben genannten Definitionen des Mittelwerts  $\bar{x}_n$ , Medians  $x_{med}$  und des Modus  $x_{mod}$  zu den bekannten Definitionen.

Die Größen  $\bar{x}_n$ ,  $x_{med}$  und  $\hat{x}_{mod}$  können auch zur Beschreibung der Symmetrie einer unimodalen Verteilung  $F_X$  von Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  verwendet werden, da

- bei symmetrischen Verteilung  $F_X$  gilt  $\bar{x}_n \approx x_{med} \approx \hat{x}_{mod}$

- bei linkssteilen Verteilung  $F_X$  gilt  $\hat{x}_{mod} < x_{med} < \bar{x}_n$
- bei rechtssteilen Verteilung  $F_X$  gilt  $\bar{x}_n < x_{med} < \hat{x}_{mod}$ .

## 2.2.2 Streuungsmaße

Bekannte Streuungsmaße einer konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  sind die folgenden Größen:

- *Spannweite*  $x_{(n)} - x_{(1)}$ ,
- *empirische Varianz*  $\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$ ,
- *Stichprobenvarianz*  $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \bar{s}_n^2$ ,
- *empirische Standardabweichungen*  $\bar{s}_n = \sqrt{\bar{s}_n^2}$ ,  $s_n = \sqrt{s_n^2}$ ,
- *empirischer Variationskoeffizient*  $\gamma_n = s_n / \bar{x}_n$ , falls  $\bar{x}_n > 0$ .

Die Spannweite zeigt die *maximale Streuung* in den Daten, wobei sich die empirische Varianz mit der *mittleren quadratischen Abweichung* vom Stichprobenmittel auseinandersetzt. Hier sind einige Eigenschaften von  $\bar{s}_n^2$  (bzw.  $s_n^2$ , da sie sich nur durch einen Faktor unterscheiden):

### Lemma 2.2.1

1. Für jedes  $b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n (x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - b)^2$$

und somit für  $b = 0$

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2) \quad \text{bzw.} \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2).$$

2. *Transformationsregel:*

Falls die Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  linear transformiert werden, d.h.  $y_i = ax_i + b$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\bar{s}_{n,y}^2 = a^2 \bar{s}_{n,x}^2 \quad \text{bzw.} \quad \bar{s}_{n,y} = |a| \bar{s}_{n,x},$$

wobei

$$\bar{s}_{n,y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2, \quad \bar{s}_{n,x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

**Beweis** 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - b)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n + \bar{x}_n - b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) \cdot (\bar{x}_n - b) + \sum_{i=1}^n (\bar{x}_n - b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + 2(\bar{x}_n - b) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)}_{=0} + n(\bar{x}_n - b)^2, \quad \forall b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Es gilt:

$$\bar{s}_{n,y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{x}_n - b)^2 = \frac{a^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = a^2 \bar{s}_{n,x}^2.$$

□

Der Skalierungsunterschied zwischen  $\bar{s}_n^2$  und  $s_n^2$  ist den Eigenschaften der *Erwartungstreue* von  $s_n^2$  zu verdanken, die später im Laufe dieser Vorlesung behandelt wird, und besagt, dass für eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  mit  $X_i$  unabhängig identisch verteilt,  $X_i \sim X$ ,  $\text{Var } X = \sigma^2 \in (0, \infty)$  gilt  $\mathbb{E}s_n^2 = \sigma^2$ , wobei  $\mathbb{E}\bar{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2$ . Das heißt, während bei der Verwendung von  $s_n^2$  zur Schätzung von  $\sigma^2$  kein Fehler „im Mittel“ gemacht wird, ist diese Aussage für  $\bar{s}_n^2$  nur asymptotisch (für große Datenmengen  $n$ ) richtig.

Aufgrund von  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) = 0$  ist z.B.  $x_n - \bar{x}_n$  durch  $x_i - \bar{x}_n$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  bestimmt. Somit verringert sich die *Anzahl der Freiheitsgrade* in der Summe  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$  um 1 und somit scheint die Normierung  $\frac{1}{n-1}$  plausibel zu sein.

Die *Standardabweichungen*  $\bar{s}_n$  und  $s_n$  werden verwendet, damit man die selben Einheiten (und nicht ihre Quadrate, also z.B. Euro und nicht Euro<sup>2</sup>) erhält. Für normalverteilte Stichproben ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) liefert  $\bar{s}_n$  auch die „*k*-Sigma-Regel“ (vgl. Vorlesung WR), die besagt, dass in den Intervallen

$$\begin{array}{lll} [\bar{x}_n - \bar{s}_n, \bar{x}_n + \bar{s}_n] & \text{ca.} & 68\%, \\ [\bar{x}_n - 2\bar{s}_n, \bar{x}_n + 2\bar{s}_n] & \text{ca.} & 95\%, \\ [\bar{x}_n - 3\bar{s}_n, \bar{x}_n + 3\bar{s}_n] & \text{ca.} & 99\% \end{array}$$

aller Daten liegen.

Der Vorteil vom *empirischen Variationskoeffizienten* ist, dass er *maßstabsunabhängig* ist und somit den Vergleich von Streuungseigenschaften unterschiedlicher Stichproben zulässt.

### 2.2.3 Maße für Schiefe und Wölbung

Im Vorlesungsskript WR, Abschnitt 4.5 S. 99 wurden folgende Maße für Schiefe bzw. Wölbung der Verteilung einer Zufallsvariable  $X$  eingeführt:

*Schiefe oder Symmetriekoeffizient:*

$$\gamma_1 = \frac{\mu'_3}{\sigma^3} = E(\tilde{X}^3),$$

wobei

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k, \quad \sigma^2 = \mu'_2 = \text{Var } X, \quad \tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sigma}.$$

*Wölbung (Exzess):*

$$\gamma_2 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4} - 3 = \mathbb{E}(\tilde{X}^4) - 3,$$

vorausgesetzt, dass  $\mathbb{E}(X^4) < \infty$ . Für ihre Bedeutung und Interpretation siehe die oben genannten Seiten des WR-Vorlesungsskriptes. Falls nun das Merkmal  $X$  statistisch in einer Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  beobachtet wird, wie können  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  aus diesen Daten geschätzt und interpretiert werden?

Als Schätzer für das  $k$ -te zentrierte Moment  $\mu'_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  schlagen wir

$$\hat{\mu}'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^k$$

vor, die Varianz  $\sigma^2$  wird durch

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

geschätzt. Somit bekommt man den Momentenkoeffizient an der Schiefe (engl. „skewness“)

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\hat{\mu}'_3}{\bar{s}_n^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2\right)^{3/2}}.$$

Falls die Verteilung von  $X$  linksschief ist, überwiegen positive Abweichungen im Zähler und somit gilt  $\hat{\gamma}_1 > 0$  für linksschiefe Verteilungen. Analog gilt  $\hat{\gamma}_1 \approx 0$  für symmetrische und  $\hat{\gamma}_1 < 0$  für rechtsschiefe Verteilungen.

Das *Wölbungsmaß von Fisher* (engl. „kurtosis“) ist gegeben durch

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\hat{\mu}'_4}{\bar{s}_n^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2\right)^2} - 3.$$

Falls  $\hat{\gamma}_2 > 0$  so ist die Verteilung von  $X$  steilgipflig, für  $\hat{\gamma}_2 < 0$  ist sie flachgipflig. Falls  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , so gilt  $\hat{\gamma}_2 \approx 0$ . Die Ursache dafür ist, dass die steilgipfligen Verteilungen schwerere Tails haben als die flachgipfligen. Als Maß dient dabei die Normalverteilung,

für die  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  und somit  $\hat{\gamma}_1 \approx 0, \hat{\gamma}_2 \approx 0$ . So definiert, sind  $\hat{\gamma}_1$  und  $\hat{\gamma}_2$  nicht resistent gegenüber Ausreißern. Eine robuste Variante von  $\hat{\gamma}_1$  ist beispielsweise durch den sogenannten *Quantilkoeffizienten der Schiefe*

$$\hat{\gamma}_q(\alpha) = \frac{(x_{1-\alpha} - x_{med}) - (x_{med} - x_\alpha)}{x_{1-\alpha} - x_\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1/2)$$

gegeben.

Für  $\alpha = 0,25$  erhält man den Quartilkoeffizienten.  $\hat{\gamma}_q(\alpha)$  misst den Unterschied zwischen der Entfernung des  $\alpha$ - und  $(1 - \alpha)$ -Quantils zum Median. Bei linkssteilen (bzw. rechtssteilen) Verteilungen liegt das (untere)  $x_\alpha$ -Quantil näher an (bzw. weiter entfernt von) dem Median. Somit gilt

- $\hat{\gamma}_q(\alpha) > 0$  für linkssteile Verteilungen,
- $\hat{\gamma}_q(\alpha) < 0$  für rechtssteile Verteilungen,
- $\hat{\gamma}_q(\alpha) = 0$  für symmetrische Verteilungen.

Durch das zusätzliche Normieren (Nenner) gilt  $-1 \leq \hat{\gamma}_q(\alpha) \leq 1$ .

## 2.3 Quantilplots (Quantil-Grafiken)

Nach der ersten beschreibenden Analyse eines Datensatzes  $(x_1, \dots, x_n)$  soll überlegt werden, mit welcher Verteilung diese Stichprobe modelliert werden kann. Hier sind die sogenannten *Quantilplots* behilflich, da sie grafisch zeigen, wie gut die Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  mit dem Verteilungsgesetz  $G$  übereinstimmen, wobei  $G$  die Verteilungsfunktion einer hypothetischen Verteilung ist.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit (unbekannter) Verteilungsfunktion  $F_X$ . Auf Basis der Daten  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i$  unabhängig identisch verteilt und  $X_i \stackrel{d}{=} X$  möchte man prüfen, ob  $F_X = G$  für eine bekannte Verteilungsfunktion  $G$  gilt. Die Methode der *Quantil-Grafiken* besteht darin, dass man die entsprechenden Quantil-Funktionen  $\hat{F}_n^{-1}$  und  $G^{-1}$  von  $\hat{F}_n$  und  $G$  grafisch vergleicht. Hierzu

- plote man  $G^{-1}(k/n)$  gegen  $\hat{F}_n^{-1}(k/n) = X_{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
- Falls die Punktwolke

$$\left\{ \left( G^{-1}(k/n), X_{(k)} \right), \quad k = 1, \dots, n \right\}$$

näherungsweise auf einer Geraden  $y = ax + b$  liegt, so sagt man, dass  $F_X(x) \approx G\left(\frac{x-a}{b}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Diese empirische Vergleichsmethode beruht auf folgenden Überlegungen:

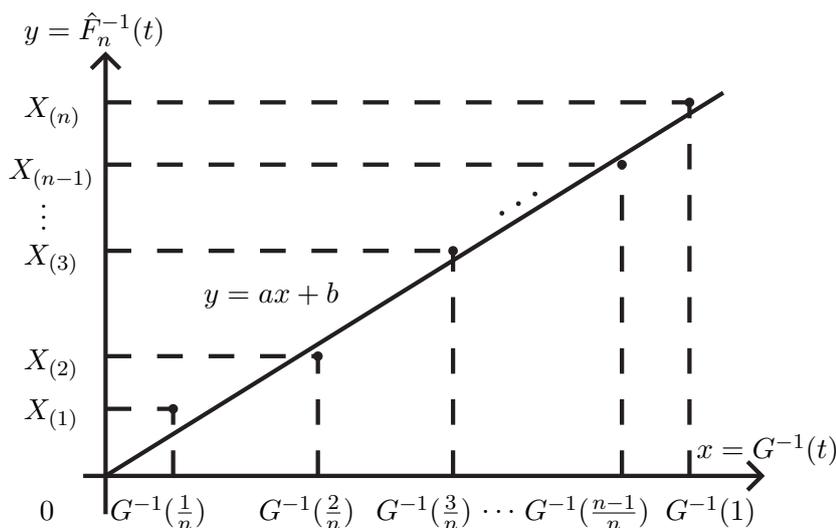


Abb. 2.5: Quantil-Grafik

- Man ersetzt die unbekannte Funktion  $F_X$  durch die aus den Daten berechenbare Funktion  $\hat{F}_n$ . Dabei macht man einen Fehler, der allerdings asymptotisch (für  $n \rightarrow \infty$ ) klein ist. Dies folgt aus dem Satz 3.3.9 (WR-Skript) von Gliwenko-Cantelli, der besagt, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F_X(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Der Vergleich der entsprechenden Quantil-Funktionen wird durch folgendes Ergebnis bestärkt: Falls  $\mathbb{E}X < \infty$ , dann gilt

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \left( \hat{F}_n^{-1}(y) - F_X^{-1}(y) \right) dy \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} 0.$$

Somit setzt man bei der Verwendung der Quantil-Grafiken voraus, dass der Stichprobenumfang  $n$  ausreichend groß ist, um  $\hat{F}_n^{-1} \approx F_X^{-1}$  zu gewährleisten.

- Man setzt zusätzlich voraus, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ y &= F_X^{-1}(t), \\ x &= G^{-1}(t) \end{aligned}$$

für alle  $t$  (und nicht nur näherungsweise für  $t = k/n$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) gelten. Daraus folgt, dass  $G(x) = t = F_X(y) = F_X(ax + b)$  für alle  $x$ , oder  $F_X(y) = G\left(\frac{y-b}{a}\right)$  für alle  $y$ , weil  $x = \frac{y-b}{a}$  ist.

Aus praktischer Sicht ist es besser, Paare  $\left(G^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right), X_{(k)}\right)$ ,  $k = 1, \dots, n$  zu plotten. Dadurch wird vermieden, dass  $G^{-1}(n/n) = G^{-1}(1) = \infty$  vorkommt, wie es zum Beispiel bei einer Verteilung  $G$  der Fall ist, bei der  $F(x) < 1$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Tatsächlich gilt für  $k = n$ , dass  $\frac{n}{n+1} < 1$  und somit  $G^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right) < \infty$ .

**Beispiel 2.3.1 (Exponential-Verteilung,  $G(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{I}(x \geq 0)$ ):**

Es gilt  $G^{-1}(y) = -1/\lambda \log(1 - y)$ ,  $y \in (0, 1)$ . So wird man beim Quantil-Plot Paare

$$\left(-\frac{1}{\lambda} \log\left(1 - \frac{k}{n+1}\right), X_{(k)}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

zeichnen, wobei der Faktor  $1/\lambda$  für die Linearität unwesentlich ist und weggelassen werden kann.

**Beispiel 2.3.2 (Normalverteilung,  $G(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ):**

Leider ist die analytische Berechnung von  $\Phi^{-1}$  mit einer geschlossenen Formel nicht möglich. Aus diesem Grund wird  $\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right)$  numerisch berechnet und in Tabellen oder statistischen Software-Paketen (wie z.B. R) abgelegt. Um die empirische Verteilung der Daten mit der Normalverteilung zu vergleichen, trägt man Punkte mit Koordinaten

$$\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right), X_{(k)}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

auf der Ebene auf und prüft, ob sie eine Gerade bilden (vgl. Abb. 2.6).

**Bemerkung 2.3.1**

Falls  $\bar{x}_n = 0$  und die Verteilung  $F_X$  linkssteil ist, so sind die Quantile von  $F_X$  kleiner als die von  $\Phi$ . Somit ist der Normal-Quantilplot konvex. Falls  $\bar{x}_n = 0$  und  $F_X$  rechtssteil ist, so wird der Normal-Quantilplot konkav sein.

**Beispiel 2.3.3 (Haftpflichtversicherung (Belgien, 1992)):**

In Abbildung 2.7 sind Ordnungsstatistiken der Stichprobe von  $n = 227$  Schadenhöhen der Industrie-Unfälle in Belgien im Jahr 1992 (Haftpflichtversicherung) gegen Quantile von Exponential-, Pareto-, Standardnormal- und Weibull-Verteilungen geplottet. Im Bereich von Kleinschäden zeigen die Exponential- und Pareto-Verteilungen eine gute Übereinstimmung mit den Daten. Die Verteilung von mittelgroßen Schäden kann am besten durch die Lognormal- und Weibull-Verteilungen modelliert werden. Für Großschäden erweist sich die Weibull-Verteilung als geeignet.

**Beispiel 2.3.4 (Rendite der BMW-Aktie):**

In Abbildung 2.8 ist der Quantilplot für Renditen der BMW-Aktie beispielhaft zu sehen.

## 2.4 Dichteschätzung

Sei eine Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  von unabhängigen Realisierungen eines absolut stetig verteilten Merkmals  $X$  mit Dichte  $f_X$  gegeben. Mit Hilfe der in Abschnitt ?? eingeführten

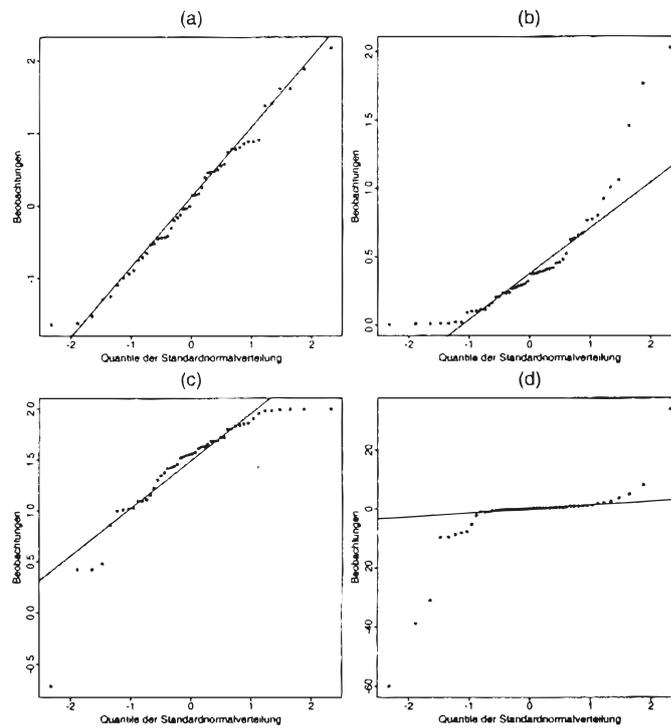


Abb. 2.6: QQ-Plot einer Normalverteilung (a), einer linkssteilen Verteilung (b), einer rechtssteilen Verteilung (c) und einer symmetrischen, aber stark gekrümmten Verteilung (d)

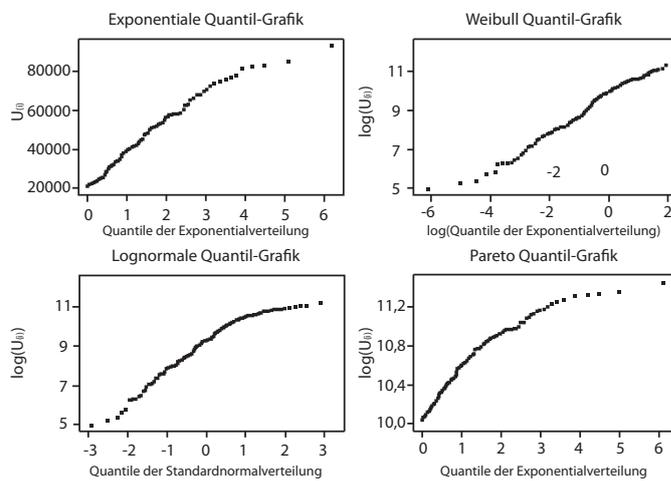


Abb. 2.7: Ordnungsstatistiken einer Stichprobe von Schadenhöhen der Industrie-Unfälle in Belgien im Jahr 1992

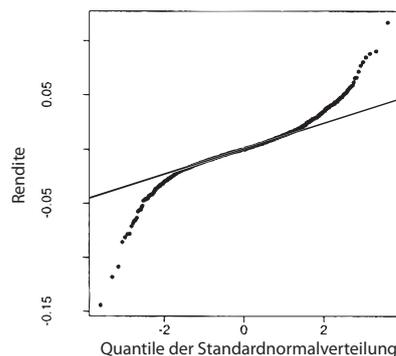


Abb. 2.8: Quantilplot der Rendite der BMW-Aktie

Histogramme lässt sich  $f_X$  grafisch durch eine Treppenfunktion  $\hat{f}_X$  darstellen. Dabei gibt es zwei entscheidende Nachteile der Histogrammdarstellung:

1. Willkür in der Wahl der Klasseneinteilung  $[c_{i-1}, c_i]$ ,
2. Eine (möglicherweise) stetige Funktion  $f_X$  wird durch eine Treppenfunktion  $\hat{f}_X$  ersetzt.

In diesem Abschnitt werden wir versuchen, diese Nachteile zu beseitigen, indem wir eine Klasse von Kerndichtenschätzern einführen, die (je nach Wahl des Kerns) auch zu stetigen Schätzern  $\hat{f}_X$  führen.

#### Definition 2.4.1

Der Kern  $K(x)$  wird definiert als eine nicht-negative messbare Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $\int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1$ .

#### Definition 2.4.2

Der *Kerndichteschätzer* der Dichte  $f_X$  aus den Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  mit Kernfunktion  $K(x)$  ist gegeben durch

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $h > 0$  die sogenannte *Bandbreite* ist.

*Beispiele für Kerne:*

1. *Rechteckskern:*

$$K(x) = 1/2 \cdot \mathbb{I}(x \in [-1, 1]).$$

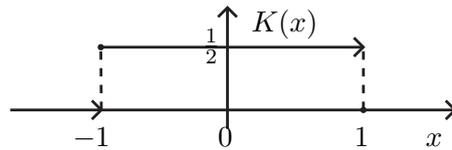
Dabei ist

$$\frac{1}{h} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \begin{cases} 1/(2h), & x_i - h \leq x < x_i + h, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und somit

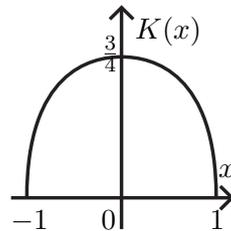
$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^k K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \frac{\#\{x_i \in [x - h, x + h]\}}{2nh},$$

das auch *gleitendes Histogramm* genannt wird. Dieser Dichteschätzer ist (noch) nicht stetig, was durch die (besonders einfache rechteckige unstetige) Form des Kerns erklärt wird.



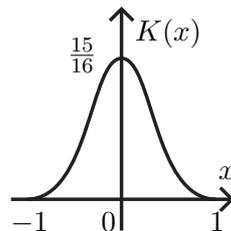
2. *Epanechnikov-Kern:*

$$K(x) = \begin{cases} 3/4(1 - x^2), & x \in [-1, 1) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



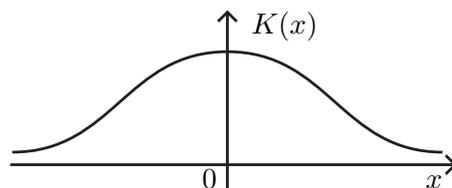
3. *Bisquare-Kern:*

$$K(x) = \frac{15}{16} \left( (1 - x^2)^2 \cdot \mathbb{I}(x \in [-1, 1]) \right).$$



4. *Gauss-Kern:*

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Dabei ist die Wahl der Bandbreite  $h$  entscheidend für die Qualität der Schätzung. Je größer  $h > 0$ , desto glatter wird  $\hat{f}_X$  sein und desto mehr „Details“ werden „herausgemittelt“. Für kleinere  $h$  wird  $\hat{f}_X$  rauer. Dabei können aber auch Details auftreten, die rein stochastischer Natur sind und keine Gesetzmäßigkeiten zeigen. Mit der adäquaten Wahl von  $h$  beschäftigen sich viele wissenschaftliche Arbeiten, die empirische Faustregeln, aber auch kompliziertere Optimierungsmethoden dafür vorschlagen. Insgesamt ist das Problem der optimalen Dichteschätzung in der Statistik immer noch offen.

## 2.5 Beschreibung und Exploration von bivariaten Datensätzen

Im Gegensatz zu der Datenlage in den Abschnitten 2.1 bis 2.4 betrachten wir im Folgenden Datensätze bestehend aus 2 Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$ , die als Realisierungen von stochastischen Stichproben  $(X_1, \dots, X_n)$  und  $(Y_1, \dots, Y_n)$  aufgefasst werden, wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $X_i \stackrel{d}{=} X \sim F_X$ ,  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $Y_i \stackrel{d}{=} Y \sim F_Y$  sind. Wir betrachten hier ausschließlich quantitative Merkmale  $X$  und  $Y$ . Es wird ein Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  vermutet, der an Hand von (konkreten) Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  näher untersucht werden soll. Mit anderen Worten, wir interessieren uns für die Eigenschaften der bivariaten Verteilung  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  des Zufallsvektors  $(X, Y)^T$ .

### 2.5.1 Zusammenhangsmaße

Jetzt wird uns die Frage beschäftigen, in welchem Maße die Merkmale  $X$  und  $Y$  voneinander abhängig sind. Um die  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$  aus den Daten zu schätzen, setzt man die sogenannte *empirische Kovarianz*

$$S_{xy}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$$

ein. Dabei ist  $S_{xy}^2$  jedoch von den Skalen von  $X$  und  $Y$  abhängig.

1. Um eine skaleninvariantes Zusammenhangsmaß zu bekommen, betrachtet man die empirische Variante des Korrelationskoeffizienten

$$\varrho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X} \cdot \sqrt{\text{Var } Y}},$$

den sogenannten *Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten*

$$\varrho_{xy} = \frac{S_{xy}^2}{\sqrt{S_{xx}^2 \cdot S_{yy}^2}},$$

wobei

$$S_{xx}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2, \quad S_{yy}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2$$

die Stichprobenvarianzen der Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  sind. Dabei erbt  $\varrho_{xy}$  alle Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten  $\varrho(X, Y)$ :

- $|\varrho_{xy}| \leq 1$
- $\varrho_{xy} = \pm 1$ , falls ein linearer Zusammenhang in den Daten  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$  vorliegt, d.h. alle Punkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  liegen auf einer Gerade mit positivem (bei  $\varrho_{xy} = 1$ ) bzw. negativem (bei  $\varrho_{xy} = -1$ ) Anstieg.
- Wenn  $|\varrho_{xy}|$  klein ist ( $\varrho_{xy} \approx 0$ ), so sind die Datensätze unkorreliert. Dabei wird oft folgende grobe Einteilung vorgenommen:

Merkmale  $X$  und  $Y$  sind

- „*schwach korreliert*“, falls  $|\varrho_{xy}| < 0.5$ ,
- „*stark korreliert*“, falls  $|\varrho_{xy}| \geq 0.8$ .

Ansonsten liegt ein mittlerer Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  vor.

### Lemma 2.5.1

Für  $\varrho_{xy}$  gilt die alternative rechengünstige Darstellung

$$\varrho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}_n}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}_n^2)}}. \quad (2.5.1)$$

### 2. Spearman's Korrelationskoeffizient

Einen alternativen Korrelationskoeffizienten erhält man, wenn man die Stichprobenwerte  $x_i$  bzw.  $y_i$  in  $\varrho_{xy}$  durch ihre *Ränge*  $\text{rg}(x_i)$  bzw.  $\text{rg}(y_i)$  ersetzt, die als Position dieser Werte in den ansteigend geordneten Stichproben zu verstehen sind:  $\text{rg}(x_i) = j$ , falls  $x_i = x_{(j)}$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Es bedeutet, dass  $\text{rg}(x_{(i)}) = i \forall i = 1, \dots, n$ , falls  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ .

Falls die Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$   $k$  identische Werte  $x_i$  (die sogenannten *Bindungen*) enthält, so wird diesen Werten der sogenannte Durchschnittsrank  $\text{rg}(x_i)$  zugewiesen, der als arithmetisches Mittel der  $k$  in Frage kommenden Ränge errechnet wird. Zum Beispiel findet folgende Zuordnung statt:

$$\begin{array}{c|c} x_i & (3, 1, 7, 5, 3, 3) \\ \hline \text{rg}(x_i) & (a, 1, 6, 5, a, a) \end{array}$$

wobei der Durchschnittsrank  $a$  von Stichprobeneintrag 3 gleich  $a = 1/3(2+3+4) = 3$  ist.

Somit wird der sogenannte *Spearman's Korrelationskoeffizient* (Rangkorrelationskoeffizient) der Stichproben

$$(x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad (y_1, \dots, y_n)$$

als der *Bravais-Pearson-Koeffizient* der Stichproben ihrer Ränge

$$(\text{rg}(x_1), \dots, \text{rg}(x_n)) \quad \text{und} \quad (\text{rg}(y_1), \dots, \text{rg}(y_n))$$

definiert:

$$\varrho_{sp} = \frac{\sum_{i=1}^n (\operatorname{rg}(x_i) - \bar{\operatorname{rg}}_x)(\operatorname{rg}(y_i) - \bar{\operatorname{rg}}_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\operatorname{rg}(x_i) - \bar{\operatorname{rg}}_x)^2 \sum_{i=1}^n (\operatorname{rg}(y_i) - \bar{\operatorname{rg}}_y)^2}},$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar{\operatorname{rg}}_x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{rg}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{rg}(x_{(i)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}, \\ \bar{\operatorname{rg}}_y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{rg}(y_i) = \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Dieselbe Darstellung  $\bar{\operatorname{rg}}_y$  gilt auch, wenn Bindungen vorhanden sind.

Dieser Koeffizient misst monotone Zusammenhänge in den Daten. Aus den Eigenschaften der Bravais-Pearson-Koeffizienten folgt  $|\varrho_{sp}| \leq 1$ . Betrachten wir die Fälle  $\varrho_{sp} = \pm 1$  gesondert:

- $\varrho_{sp} = 1$  bedeutet, dass die Punkte  $(\operatorname{rg}(x_i), \operatorname{rg}(y_i))$ ,  $i = 1, \dots, n$  auf einer Geraden mit positiver Steigung liegen. Da aber  $\operatorname{rg}(x_i), \operatorname{rg}(y_i) \in \mathbb{N}$ , kann diese Steigung nur 1 sein. Es bedeutet, dass dem kleinsten Wert in der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  der kleinste Wert in  $(y_1, \dots, y_n)$  entspricht, usw., d.h., für wachsende  $x_i$  wachsen auch die  $y_i$  streng monoton:  $x_i < x_j \implies y_i < y_j \quad \forall i \neq j$ .
- Analog gilt dann für  $\varrho_{sp} = -1$ , dass  $x_i < x_j \implies y_i > y_j \quad \forall i \neq j$ .

Dies kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- $\varrho_{sp} > 0$ : gleichsinniger monotoner Zusammenhang ( $x_i$  groß  $\iff$   $y_i$  groß)
- $\varrho_{sp} < 0$ : gegensinniger monotoner Zusammenhang ( $x_i$  groß  $\iff$   $y_i$  klein)
- $\varrho_{sp} \approx 0$ : kein monotoner Zusammenhang.

Da der Spearmans Korrelationskoeffizient nur Ränge von  $x_i$  und  $y_i$  betrachtet, eignet er sich auch für ordinale (und nicht nur quantitative) Daten.

### Lemma 2.5.2

Falls die Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  keine Bindung enthalten ( $x_i \neq x_j$ ,  $y_i \neq y_j \quad \forall i \neq j$ ), dann gilt

$$\varrho_{sp} = 1 - \frac{6}{(n^2 - 1)n} \sum_{i=1}^n d_i^2,$$

wobei  $d_i = \operatorname{rg}(x_i) - \operatorname{rg}(y_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

**Beweis** Als Übungsaufgabe. □

### Satz 2.5.1 (Invarianzeigenschaften):

1. Wenn die Merkmale  $X$  und  $Y$  linear transformiert werden:

$$\begin{aligned} f(X) &= a_x X + b_x, & a_x \neq 0, b_x \in \mathbb{R}, \\ g(Y) &= a_y Y + b_y, & a_y \neq 0, b_y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dann gilt  $\varrho_{f(x)g(y)} = \operatorname{sgn}(a_x a_y) \cdot \varrho_{xy}$ .

2. Falls Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beide monoton wachsend oder beide monoton fallend sind, dann gilt

$$\varrho_{sp}(f(x), g(y)) = \varrho_{sp}(x, y).$$

Falls  $f$  monoton wachsend und  $g$  monoton fallend (oder umgekehrt) sind, dann gilt  $\varrho_{sp}(f(x), g(y)) = -\varrho_{sp}(x, y)$ .

**Beweis** Beweisen wir nur 1), weil 2) offensichtlich ist.

$$\begin{aligned} 1. \quad \varrho_{f(x)g(y)} &= \frac{\sum_{i=1}^n ((a_x x_i + b_x) - (a_x \bar{x}_n + b_x)) ((a_y y_i + b_y) - (a_y \bar{y}_n + b_y))}{\sqrt{a_x^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 a_y^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}} \\ &= \frac{a_x a_y}{|a_x| |a_y|} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}} = \operatorname{sgn}(a_x a_y) \cdot \varrho_{xy}. \end{aligned}$$

□

### Bemerkung 2.5.1

- Da lineare Transformationen monoton sind, gilt Aussage 1) auch für Spearmans Korrelationskoeffizienten  $\varrho_{sp}$ .
- Der Koeffizient  $\varrho_{xy}$  erfasst lineare Zusammenhänge, während  $\varrho_{sp}$  monotone Zusammenhänge aufspürt.

### 2.5.2 Einfache lineare Regression

Wenn man den Zusammenhang von Merkmalen  $X$  und  $Y$  mit Hilfe von Streudiagrammen visualisiert, wird oft ein linearer Trend erkennbar, obwohl der Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient einen Wert kleiner als 1 liefert, z.B.  $\varrho_{xy} \approx 0,6$  (vgl. Abb. 2.9). Dies ist der Fall, weil die Datenpunkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  oft um eine Gerade streuen und nicht exakt auf einer Geraden liegen. Um solche Situationen stochastisch modellieren zu können, nimmt man den Zusammenhang der Form

$$Y = f(X) + \varepsilon$$

an, wobei  $\varepsilon$  die sogenannte Störgröße ist, die auf mehrere Ursachen wie z.B. Beobachtungsfehler (Messfehler, Berechnungsfehler, usw.) zurückzuführen sein kann. Dabei

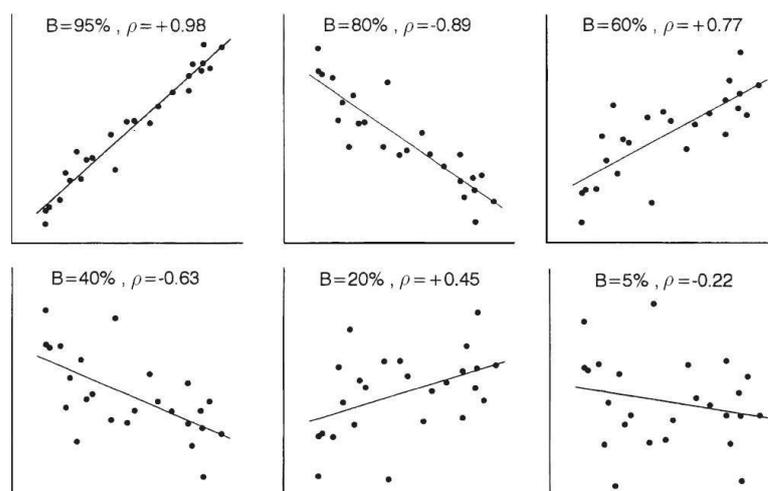


Abb. 2.9: Vergleich verschiedenwertiger Bestimmtheitsmaße. Es sind Regressionsgerade, Bestimmtheitsmaß  $B$  und Korrelationskoeffizient  $\rho$  verschiedener (fiktiver) Punktwolken vom Umfang  $n = 25$  dargestellt. Die Beschriftung der Achsen ist weggelassen, weil sie hier ohne Bedeutung ist.

nennt man die Zufallsvariable  $Y$  *Zielgröße* oder *Regressand*, die Zufallsvariable  $X$  *Einflussfaktor*, *Regressor* oder *Ausgangsvariable*. Der Zusammenhang  $Y = f(X) + \varepsilon$  wird *Regression* genannt, wobei man oft über  $\varepsilon$  voraussetzt, dass  $\mathbb{E}\varepsilon = 0$  (kein systematischer Beobachtungsfehler). Wenn  $f(x) = \alpha + \beta x$  eine lineare Funktion ist, so spricht man von der *einfachen linearen Regression*. Es sind aber durchaus andere Arten der Zusammenhänge denkbar, wie z.B.

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$$

(*polynomiale Regression*), usw. Beispiele für mögliche Ausgangs- bzw. Zielgrößen sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst, einige Beispiele in Abbildung 2.10.

Auf Modellebene ist damit folgende Fragestellung gegeben: Es gebe Zufallsstichproben von Ziel- bzw. Ausgangsvariablen  $(Y_1, \dots, Y_n)$  und  $(X_1, \dots, X_n)$ , zwischen denen ein verrauschter linearer Zusammenhang  $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$  besteht, wobei  $\varepsilon_i$  Störgrößen sind, die nicht direkt beobachtbar und uns somit unbekannt sind. Meistens nimmt man an, dass  $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$  und  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$ , d.h.  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  sind unkorreliert mit  $\text{Var}\varepsilon_i = \sigma^2$ . Wenn wir über die Eigenschaften der Schätzer für  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\sigma^2$  reden, gehen wir davon aus, dass die  $X$ -Werte nicht zufällig sind, also  $X_i = x_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Wenn man von einer konkreten Stichprobe  $(y_1, \dots, y_n)$  für  $(Y_1, \dots, Y_n)$  ausgeht, so sollen anhand von den Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  Regressionsparameter  $\alpha$

X	Y
Geschwindigkeit	Länge des Bremswegs
Körpergröße des Vaters	Körpergröße des Sohnes
Produktionsfaktor	Qualität des Produktes
Spraydosen-Verbrauch	Ozongehalt der Atmosphäre
Noten im Bachelor-Studium	Noten im Master-Studium

Tab. 2.1: Beispiele möglicher Ausgangs- und Zielgrößen

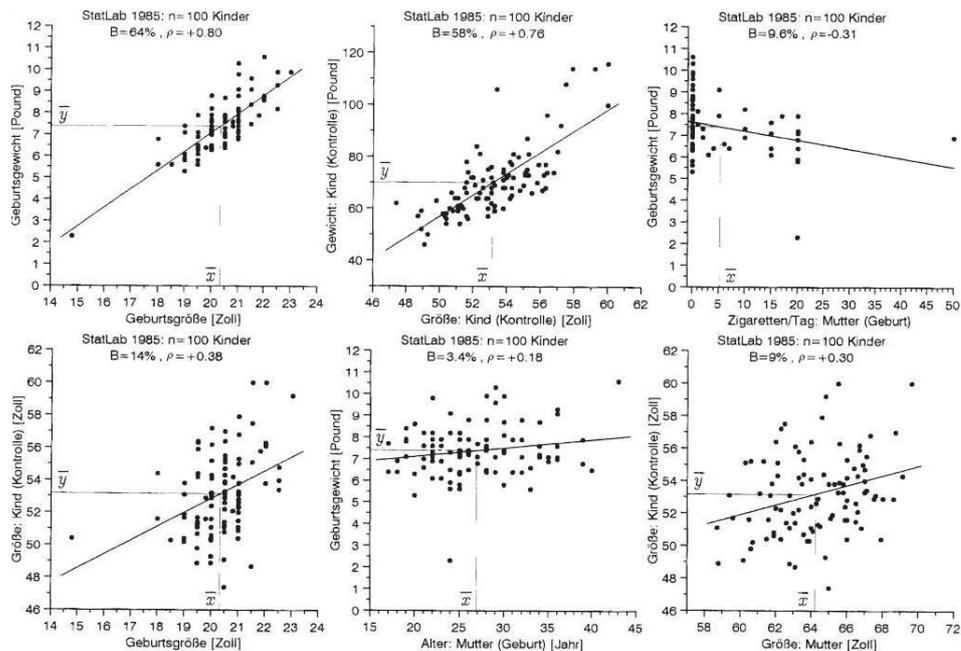


Abb. 2.10: Punktwolken verschiedener Merkmale der StatLab-Auswahl 1985 mit Regressionsgerade, Bestimmtheitsmaß  $B$  und Korrelationskoeffizient  $\rho$ .

(Regressionskonstante) und  $\beta$  (Regressionskoeffizient) sowie Regressionsvarianz  $\sigma^2$  geschätzt werden. Dabei verwendet man die sogenannte *Methode der kleinsten Quadrate*, die den mittleren quadratischen Fehler von den Datenpunkten  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$  des Streudiagramms zur *Regressionsgeraden*  $y = \alpha + \beta x$  minimiert:

$$(\alpha, \beta) = \arg \min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} e(\alpha, \beta) \quad \text{mit} \quad e(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2.$$

Da die Darstellung  $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$  gilt, kann man  $e(\alpha, \beta) = 1/n \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$  schreiben. Es ist der vertikale mittlere quadratische Abstand von den Datenpunkten  $(x_i, y_i)$  zur Geraden  $y = \alpha + \beta x$  (vgl. Abb. 2.11). Das Minimierungsproblem  $e(\alpha, \beta) \mapsto \min$  löst

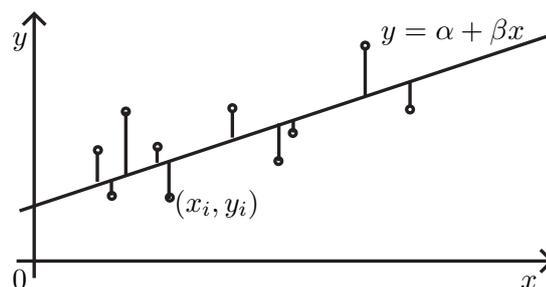


Abb. 2.11: Methode kleinster Quadrate

man durch das zweifache Differenzieren von  $e(\alpha, \beta)$ . Somit erhält man  $\hat{\alpha} = \bar{y}_n - \hat{\beta}\bar{x}_n$ , wobei

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}^2}, \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$S_{xy}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n), \quad S_{xx}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

### Übungsaufgabe 2.5.1

Leiten Sie die Schätzer  $\hat{\alpha}$  und  $\hat{\beta}$  selbstständig her.

Die Varianz  $\sigma^2$  schätzt man durch  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$ , wobei  $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  die sogenannten *Residuen* sind. Die Gründe, warum  $\hat{\sigma}^2$  diese Gestalt hat, können an dieser Stelle noch nicht angegeben werden, weil wir noch nicht die Maximum-Likelihood-Methode kennen. Zu gegebener Zeit (in der Vorlesung Stochastik III) wird jedoch klar, dass diese Art der Schätzung sehr natürlich ist.

### Bemerkung 2.5.2

Die angegebenen Schätzer für  $\alpha$  und  $\beta$  sind nicht symmetrisch bzgl. Variablen  $x_i$  und  $y_i$ . Wenn man also die *horizontalen* Abstände (statt vertikaler) zur Bildung des mittleren quadratischen Fehlers nimmt (was dem Rollentausch  $x \leftrightarrow y$  entspricht), so bekommt man andere Schätzer für  $\alpha$  und  $\beta$ , die mit  $\hat{\alpha}$  und  $\hat{\beta}$  nicht übereinstimmen müssen:

$$d_i = y_i - \alpha - \beta x_i \mapsto d'_i = x_i - \frac{(y_i - \alpha)}{\beta}.$$

Ein Ausweg aus dieser asymmetrischen Situation wäre es, die orthogonalen Abstände  $o_i$  von  $(x_i, y_i)$  zur Geraden  $y = \alpha + \beta x$  zu betrachten (vgl. Abb. 2.12). Diese Art der Regression, die „errors-in-variables regression“ genannt wird, hat aber eine Reihe von Eigenschaften, die sie zur Prognose von Zielvariablen  $y_i$  durch die Ausgangsvariablen  $x_i$  unbrauchbar machen. Sie sollte zum Beispiel nur dann verwendet werden, wenn die Standardabweichungen für  $X$  und  $Y$  etwa gleich groß sind.

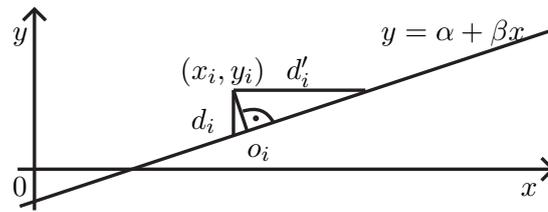


Abb. 2.12: Orthogonale Abstände

Kind $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fernsehzeit $x_i$	0,3	2,2	0,5	0,7	1,0	1,8	3,0	0,2	2,3
Tiefschlafdauer $y_i$	5,8	4,4	6,5	5,8	5,6	5,0	4,8	6,0	6,1

Tab. 2.2: Daten von Fernsehzeit und korrespondierender Tiefschlafdauer

**Beispiel 2.5.1**

Ein Kinderpsychologe vermutet, dass sich häufiges Fernsehen negativ auf das Schlafverhalten von Kindern auswirkt. Um diese Hypothese zu überprüfen, wurden 9 Kinder im gleichen Alter befragt, wie lange sie pro Tag fernsehen dürfen, und zusätzlich die Dauer ihrer Tiefschlafphase gemessen. So ergibt sich der Datensatz in Tabelle 2.2 und die Regressionsgerade aus Abbildung 2.13.

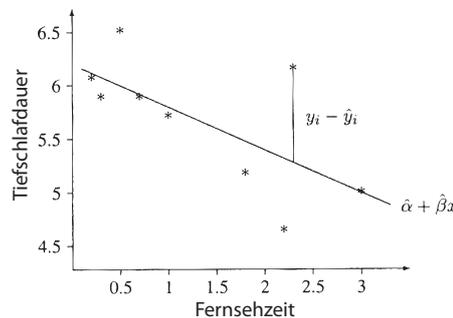


Abb. 2.13: Streudiagramm und Ausgleichsgerade zur Regression der Dauer des Tiefschlafs auf die Fernsehzeit

Es ergibt sich für die oben genannten Stichproben  $(x_1, \dots, x_9)$  und  $(y_1, \dots, y_9)$

$$\bar{x}_9 = 1,33, \quad \bar{y}_9 = 5,56, \quad \hat{\beta} = -0,45, \quad \hat{\alpha} = 6,16.$$

Somit ist

$$y = 6,16 - 0,45x$$

die Regressionsgerade, die eine negative Steigung hat, was die Vermutung des Kinderpsychologen bestätigt. Außerdem ist es mit Hilfe dieser Geraden möglich, Prognosen für die

Dauer des Tiefschlafs für vorgegebene Fernsehzeiten anzugeben. So wäre z.B. für die Fernsehzeit von 1 Stunde der Tiefschlaf von 6,  $16 - 0,45 \cdot 1 = 5,71$  Stunden plausibel.

**Bemerkung 2.5.3 (Eigenschaften der Regressionsgerade):**

1. Es gilt  $\text{sgn}(\hat{\beta}) = \text{sgn}(\rho_{xy})$ , was aus  $\hat{\beta} = s_{xy}^2/s_{xx}^2$  folgt. Dies bedeutet (falls  $s_{yy}^2 > 0$ ):
  - a) Die Regressionsgerade  $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  steigt an, falls die Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  positiv korreliert sind.
  - b) Die Regressionsgerade fällt ab, falls sie negativ korreliert sind.
  - c) Die Regressionsgerade ist konstant, falls die Stichproben unkorreliert sind.
 Falls  $s_{yy}^2 = 0$ , dann ist die Regressionsgerade konstant ( $y = \bar{y}_n$ ).
2. Die Regressionsgerade  $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  verläuft immer durch den Punkt  $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ :  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x}_n = \bar{y}_n$ .
3. Seien  $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$\bar{\hat{y}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \bar{y}_n \quad \text{und somit} \quad \sum_{i=1}^n \underbrace{(y_i - \hat{y}_i)}_{\hat{\varepsilon}_i} = 0.$$

Dabei sind  $\hat{\varepsilon}_i$  die schon vorher eingeführten Residuen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Güte der Regressionsprognose zu beurteilen.

## Residualanalyse und Bestimmtheitsmaß

### Definition 2.5.1

Der relative Anteil der Streuungsreduktion an der Gesamtstreuung  $S_{yy}^2$  heißt das *Bestimmtheitsmaß* der Regressionsgeraden:

$$R^2 = \frac{S_{yy}^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{S_{yy}^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}.$$

Es ist nur im Fall  $S_{xx}^2 > 0$ ,  $S_{yy}^2 > 0$  definiert, d.h., wenn nicht alle Werte  $x_i$  bzw.  $y_i$  übereinstimmen.

Warum  $R^2$  in dieser Form eingeführt wird, zeigt folgende Überlegung, die *Streuungszerlegung* genannt wird:

### Lemma 2.5.3

Die Gesamtstreuung („sum of squares total“)  $\text{SQT} = (n-1)S_{yy}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2$  lässt sich in die Summe der sogenannten erklärten Streuung „sum of squares explained“  $\text{SQE} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2$  und der Residualstreuung „sum of squared residuals“  $\text{SQR} = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  zerlegen:

$$\text{SQT} = \text{SQE} + \text{SQR}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \text{SQT} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}_{=\text{SQR}} + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}_n) + \underbrace{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}_{=\text{SQE}} \\ &= \text{SQE} + \text{SQR} + 2 \sum_{i=1}^n \hat{y}_i (y_i - \hat{y}_i) - 2\bar{y}_n \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}_{=0, \text{vgl. Eig. 3 S. 30}} = \text{SQE} + \text{SQR} + E, \end{aligned}$$

wobei noch zu zeigen ist, dass  $E = 2 \sum_{i=1}^n \hat{y}_i (y_i - \hat{y}_i) = 0$ , also

$$\begin{aligned} E &= 2 \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) = 2\hat{\alpha} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i}_{=0} + 2\hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) \\ &= 2\hat{\beta} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \stackrel{\hat{\alpha} = \bar{y}_n - \bar{x}_n \hat{\beta}}{=} 2\hat{\beta} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n + \hat{\beta} n \bar{x}_n^2 - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2}_{=(n-1)S_{xy}^2} \right) \\ &= 2\hat{\beta} \left( (n-1)S_{xy}^2 - \hat{\beta}(n-1)S_{xx}^2 \right) \stackrel{\hat{\beta} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}^2}}{=} 2\hat{\beta}(n-1) \left( S_{xy}^2 - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}^2} \cdot S_{xx}^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

□

Die erklärte Streuung gibt die Streuung der Regressionsgeradenwerte um  $\bar{y}_n$  an. Sie stellt damit die auf den linearen Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  zurückzuführende Variation der  $y$ -Werte dar. Das oben eingeführte Bestimmtheitsmaß ist somit der Anteil dieser Streuung an der Gesamtstreuung:

$$R^2 = \frac{\text{SQE}}{\text{SQT}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2} = \frac{\text{SQT} - \text{SQR}}{\text{SQT}} = 1 - \frac{\text{SQR}}{\text{SQT}}.$$

Es folgt aus dieser Darstellung, dass  $R^2 \in [0, 1]$  ist.

1.  $R^2 = 0$  bedeutet  $\text{SQE} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 = 0$  und somit  $\hat{y}_i = \bar{y}_n \forall i$ . Dies weist darauf hin, dass das lineare Modell in diesem Fall schlecht ist, denn aus  $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i = \bar{y}_n$  folgt  $\hat{\beta} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}^2} = 0$  und somit  $S_{xy}^2 = 0$ . Also sind die Merkmale  $X$  und  $Y$  unkorreliert.

2.  $R^2 = 1$  bedingt  $\text{SQR} = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = 0$ . Somit liegen alle  $(x_i, y_i)$  perfekt auf der Regressionsgeraden. Dies bedeutet, dass die Daten  $x_i$  und  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  perfekt linear abhängig sind.

*Faustregel* zur Beurteilung der Güte der Anpassung eines linearen Modells an Hand von Bestimmtheitsmaß  $R^2$ :

$R^2$  ist deutlich von Null verschieden (d.h. es besteht noch ein linearer Zusammenhang), falls  $R^2 > \frac{4}{n+2}$ , wobei  $n$  der Stichprobenumfang ist.

Allgemein gilt folgender Zusammenhang zwischen dem Bestimmtheitsmaß  $R^2$  und dem Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten  $\varrho_{xy}$ :

**Lemma 2.5.4**

$$R^2 = \varrho_{xy}^2$$

**Beweis** Aus der Eigenschaft 3 S. 30 folgt  $\bar{y}_n = \overline{\hat{y}_n}$ . Somit gilt

$$\text{SQE} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \overline{\hat{y}_n})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\bar{x}_n)^2 = \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

und damit

$$R^2 = \frac{\text{SQE}}{\text{SQT}} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2} = \frac{(S_{xy}^2)^2}{(S_{xx}^2)^2} \cdot \frac{(n-1)S_{xx}^2}{(n-1)S_{yy}^2} = \left( \frac{S_{xy}^2}{S_{yy}S_{xx}} \right)^2 = \varrho_{xy}^2$$

□

**Folgerung 2.5.1**

1. Der Wert von  $R^2$  ändert sich bei einer Lineartransformation der Daten  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  nicht. Grafisch kann man die Güte der Modellanpassung bei der linearen Regression folgendermaßen überprüfen:

Man zeichnet Punktpaare  $(\hat{y}_i, \hat{\varepsilon}_i)_{i=1, \dots, n}$  als Streudiagramm (der sogenannte *Residualplot*). Falls diese Punktwolke gleichmäßig um Null streut, so ist das lineare Modell gut gewählt worden. Falls das Streudiagramm einen erkennbaren Trend aufweist, bedeutet das, dass die Annahme des linearen Modells für diese Daten ungeeignet sei (vgl. Abb. 2.14)

2. Da  $R^2 = \varrho_{xy}^2$ , ist der Wert von  $R^2$  symmetrisch bzgl. der Stichproben  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$ :

$$\varrho_{xy}^2 = R^2 = \varrho_{yx}^2 \quad \text{bzw.} \quad R_{xy}^2 = R_{yx}^2,$$

wobei  $R_{xy}^2$  das Bestimmtheitsmaß bezeichnet, das sich aus der normalen Regression ergibt und  $R_{yx}^2$  das mit vertauschten Achsen.

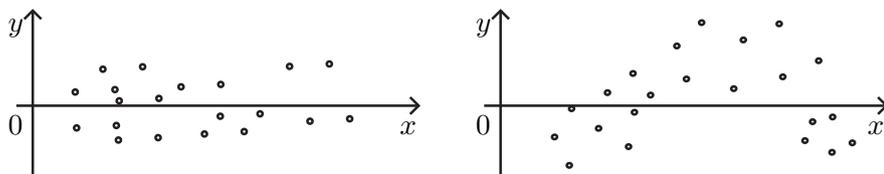


Abb. 2.14: Links: Gute, Rechts: Schlechte Übereinstimmung mit dem linearen Modell

# 3 Punktschätzer

## 3.1 Parametrisches Modell

Sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Stichprobe. Es wird angenommen, dass  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Realisierung einer Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  ist, wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit der unbekanntem Verteilungsfunktion  $F$  sind und  $F$  zu einer bekannten parametrischen Familie  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$  gehört. Hier ist  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$  der  $m$ -dimensionale Parametervektor der Verteilung  $F_\theta$  und  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  der sogenannte *Parameterraum* (eine Borel-Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$ , die die Menge aller zugelassenen Parameterwerte darstellt). Es wird vorausgesetzt, dass die Parametrisierung  $\theta \rightarrow F_\theta$  *identifizierbar* ist, indem  $F_{\theta_1} \neq F_{\theta_2}$  für  $\theta_1 \neq \theta_2$  gilt.

Eine wichtige Aufgabe der Statistik, die wir in diesem Kapitel betrachten werden, besteht in der Schätzung des Parametervektors  $\theta$  (oder eines Teils von  $\theta$ ) an Hand von der konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ . In diesem Fall spricht man von einem *Punktschätzer*  $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , der eine gültige Stichprobenfunktion ist. Meistens wird angenommen, dass

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \in \Theta) = 1,$$

wobei es zu dieser Regel auch Ausnahmen gibt.

### Beispiel 3.1.1

1. Sei  $X$  die Dauer des fehlerfreien Arbeitszyklus eines technischen Systems. Oft wird  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  angenommen. Dann stellt  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$  mit  $m = 1$ ,  $\theta = \lambda$ ,  $\Theta = \mathbb{R}_+$  und

$$F_\theta(x) = (1 - e^{-\theta x}) \cdot \mathbb{I}(x \geq 0)$$

ein parametrisches Modell dar, wobei der Parameterraum eindimensional ist. Später wird für  $\lambda$  der (Punkt-) Schätzer  $\hat{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = 1/\bar{x}_n$  vorgeschlagen.

2. In den Fragestellungen der statistischen Qualitätskontrolle werden  $n$  Erzeugnisse auf Mängel untersucht. Falls  $p \in (0, 1)$  die unbekannte Wahrscheinlichkeit des Mangels ist, so wird mit  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  die Gesamtanzahl der mangelhaften Produkte beschrieben. Dabei wird folgendes parametrische Modell unterstellt:

$$\Theta = \{(n, p) : n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)\}, \quad \theta = (n, p), \quad m = 2,$$

$$F_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X \leq x) = \begin{cases} 1, & x > n \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & x \in [0, n] \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Falls  $n$  bekannt ist, kann die Wahrscheinlichkeit  $p$  des Ausschusses durch den Punktschätzer  $\hat{p}(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_n$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$  näherungsweise berechnet werden.

## 3.2 Parametrische Familien von statistischen Prüfverteilungen

In der Vorlesung Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden bereits einige parametrische Familien von Verteilungen eingeführt. Hier geben wir weitere Verteilungsfamilien an, die in der Statistik eine besondere Stellung einnehmen, weil sie als Referenzverteilungen in der Schätztheorie, statistischen Tests und Vertrauensintervallen ihre Anwendung finden.

### 3.2.1 Gamma-Verteilung

Als erstes führen wir zwei spezielle Funktionen aus der Analysis ein:

1. Die *Gamma-Funktion*:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad \text{für } p > 0.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, & \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \quad \forall p > 0, & \Gamma(n+1) &= n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2. Die *Beta-Funktion*:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q > 0.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$B(p, q) = B(q, p), \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0.$$

#### Definition 3.2.1

Die *Gamma-Verteilung* mit Parametern  $\lambda > 0$  und  $p > 0$  ist eine absolut stetige Verteilung mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Dabei verwenden wir die Bezeichnung  $X \sim \Gamma(\lambda, p)$  für eine Zufallsvariable  $X$ , die Gamma-verteilt mit Parametern  $\lambda$  und  $p$  ist. Es gilt offensichtlich  $X \geq 0$  fast sicher für  $X \sim \Gamma(\lambda, p)$ .

#### Übungsaufgabe 3.2.1

Zeigen Sie, dass (3.2.1) eine Dichte ist.

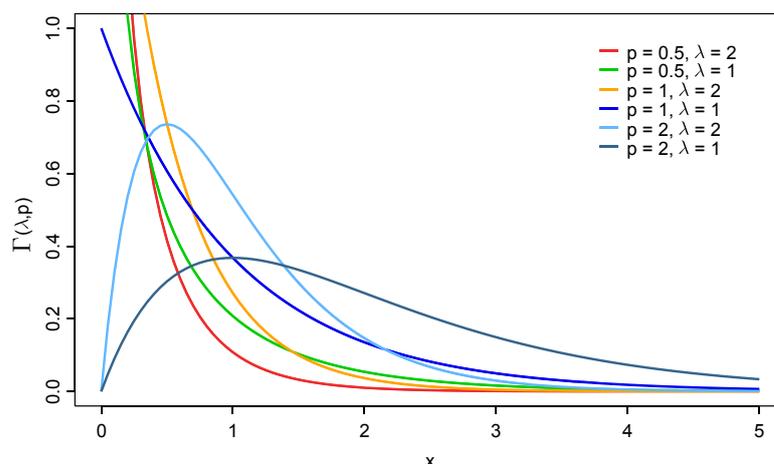


Abb. 3.1: Dichte der Gammaverteilung

**Beispiel 3.2.1**

1. In der Kraftfahrzeugversicherung wird die Gamma-Verteilung oft zur Modellierung des Gesamtschadens verwendet.
2. Falls  $p = 1$ , dann ist  $\Gamma(\lambda, 1) = \text{Exp}(\lambda)$ .

**Satz 3.2.1 (Momenterzeugende und charakteristische Funktion der Gamma-Verteilung):**

Falls  $X \sim \Gamma(\lambda, p)$ , dann gilt Folgendes:

1. Die momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung  $\Psi_X(s)$  ist gegeben durch

$$\Psi_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \frac{1}{(1 - s/\lambda)^p}, \quad s < \lambda.$$

2.  $k$ -te Momente:

$$\mathbb{E}X^k = \frac{p(p+1) \cdot \dots \cdot (p+k-1)}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Beweis** 1. Betrachte

$$\begin{aligned} \Psi_X(s) &= \int_0^\infty e^{sx} f_X(x) dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{\overbrace{(s-\lambda)x}^{<0}} dx \\ &\stackrel{-(s-\lambda)x=y}{=} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{-(s-\lambda)^p} e^{-y} dy = \frac{\lambda^p \Gamma(p)}{\Gamma(p)(\lambda-s)^p} \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda-s} \right)^p = \frac{1}{(1-s/\lambda)^p}, \quad \lambda > s. \end{aligned}$$

Falls  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) < \lambda$ , dann ist  $\Psi_X(s)$  holomorph auf  $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x < \lambda\}$ .

2.

$$\mathbb{E}X^k = \Psi^{(k)}(0) \implies \mathbb{E}X^k = \frac{p \cdot (p+1) \cdot \dots \cdot (p+k-1)}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

**Folgerung 3.2.1 (Faltungstabilität der  $\Gamma$ -Verteilung):**

Falls  $X \sim \Gamma(\lambda, p_1)$  und  $Y \sim \Gamma(\lambda, p_2)$ ,  $X, Y$  unabhängig, dann ist  $X + Y \sim \Gamma(\lambda, p_1 + p_2)$ .

**Beweis** Es gilt

$$\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_Y(s) = \frac{1}{(1 - is/\lambda)^{p_1}} \cdot \frac{1}{(1 - is/\lambda)^{p_2}} = \left( \frac{1}{1 - is/\lambda} \right)^{p_1 + p_2} = \varphi_{\Gamma(\lambda, p_1 + p_2)}(s).$$

Da die charakteristischen Funktionen die Verteilungen eindeutig bestimmen, folgt damit  $X + Y \sim \Gamma(\lambda, p_1 + p_2)$ . □

**Beispiel 3.2.2**

Seien  $X_1, \dots, X_n \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$  unabhängig. Nach der Folgerung 3.2.1 gilt  $X = X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(\lambda, \underbrace{1 + \dots + 1}_n) = \Gamma(\lambda, n)$ , denn  $\operatorname{Exp}(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$ . Dabei heißt  $X$  *Erlang-verteilt* mit Parametern  $\lambda$  und  $n$ . Man schreibt  $X \sim \operatorname{Erl}(\lambda, n)$ .

$$\text{Zusammengefasst:} \quad \operatorname{Erl}(\lambda, n) = \Gamma(\lambda, n)$$

*Interpretation:* In der Risikotheorie z.B. sind  $X_i$  Zwischenankunftszeiten der Einzelschäden. Dann ist  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  die Ankunftszeit des  $n$ -ten Schadens,  $X \sim \operatorname{Erl}(\lambda, n)$ .

**Definition 3.2.2 ( $\chi^2$ -Verteilung):**

$X$  ist eine  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable mit  $k$  Freiheitsgraden ( $X \sim \chi_k^2$ ), falls  $X \stackrel{d}{=} X_1^2 + \dots + X_k^2$ , wobei  $X_1, \dots, X_k \sim N(0, 1)$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen sind.

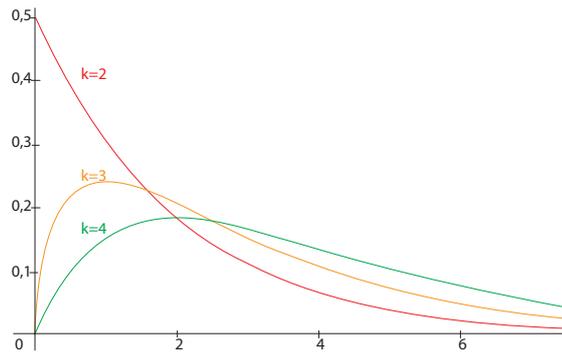
**Satz 3.2.2 ( $\chi^2$ -Verteilung: Spezialfall der  $\Gamma$ -Verteilung mit  $\lambda = 1/2$ ,  $p = k/2$ ):**

Falls  $X \sim \chi_k^2$ , dann gilt:

1.  $X \sim \Gamma(1/2, k/2)$ , d.h.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{k/2-1} e^{-x/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (3.2.2)$$

2. Insbesondere ist  $\mathbb{E}X = k$ ,  $\operatorname{Var} X = 2k$ .

Abb. 3.2: Dichte der  $\chi^2$ -Verteilung für  $k = 2, 3, 4$ 

**Beweis** 1. Sei  $X = X_1^2 + \dots + X_k^2$  mit  $X_i \sim N(0, 1)$  unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Errechnen wir zunächst die Verteilung der  $X_i^2$ :

$$\begin{aligned} P(X_1^2 \leq x) &= P(X_1 \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \int_{-\sqrt{x}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\stackrel{y^2=t}{=} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2} \frac{-1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^x \frac{(1/2)^{-1/2} t^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} e^{-t/2} dt, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Somit folgt  $X_1^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2) \implies X \sim \Gamma(1/2, \underbrace{1/2 + \dots + 1/2}_k) = \Gamma(1/2, k/2)$  und daher gilt der Ausdruck (3.2.2) für die Dichte.

2. Wegen der Additivität des Erwartungswertes und der Unabhängigkeit von  $X_i$  gilt

$$\mathbb{E}X = k \cdot \mathbb{E}X_1^2, \quad \text{Var } X = k \text{Var } X_1^2, \quad \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(\Gamma(1/2, 1/2)).$$

Bitte zeigen Sie selbstständig, dass  $\mathbb{E}X_1^2 = 1$ ,  $\text{Var } X_1^2 = 2$ .

□

### 3.2.2 Student-Verteilung (t-Verteilung)

#### Definition 3.2.3

Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariablen, wobei  $X \sim N(0, 1)$  und  $Y \sim \chi_r^2$ . Dann heißt die Zufallsvariable

$$U \stackrel{d}{=} \frac{X}{\sqrt{Y/r}}$$

Student- oder t-verteilt mit  $r$  Freiheitsgraden. Wir schreiben  $U \sim t_r$ .

**Satz 3.2.3 (Dichte der  $t$ -Verteilung):**

Falls  $X \sim t_r$ , dann gilt:

1.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{r} B\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{\frac{r+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.  $\mathbb{E}X = 0$ ,  $\text{Var} X = \frac{r}{r-2}$ ,  $r \geq 3$ .

**Bemerkung 3.2.1**

1. **Grafik von  $f_r$ :** Die  $t_r$ -Verteilung ist symmetrisch. Insbesondere gilt:

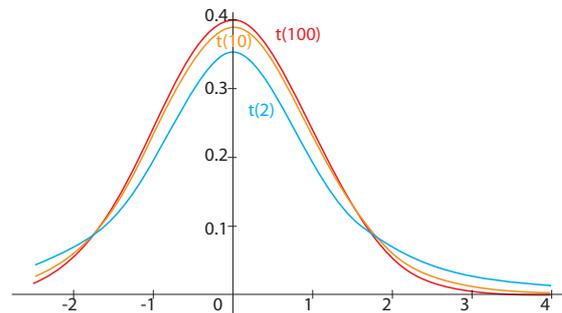


Abb. 3.3: Dichte  $\hat{f}$  der  $t$ -Verteilung für  $r = 2, 10, 100$

$$t_{r,\alpha} = -t_{r,1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

wobei  $t_{r,\alpha}$  das  $\alpha$ -Quantil der Student-Verteilung mit  $r$  Freiheitsgraden ist.

2. Falls  $r \rightarrow \infty$ , dann  $f_r(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (Übungsaufgabe)
3. Für  $r = 1$  gilt:  $t_1 = \text{Cauchy}(0, 1)$  mit Dichte  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Der Erwartungswert von  $t_1$  existiert nicht.

**3.2.3 Fisher-Snedecor-Verteilung (F-Verteilung)****Definition 3.2.4**

Falls  $X \stackrel{d}{=} \frac{U_r/r}{U_s/s}$ , wobei  $U_r \sim \chi_r^2$ ,  $U_s \sim \chi_s^2$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $U_r, U_s$  unabhängig, dann hat  $X$  eine F-Verteilung mit Freiheitsgraden  $r, s$ . Bezeichnung:  $X \sim F_{r,s}$ .

**Bemerkung 3.2.2**

Sei  $X \sim F_{r,s}$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  mit Dichte  $f_X$ .

1. Einige Graphen der F-Verteilung sind in Abbildung ?? dargestellt.
2. Einige Eigenschaften der F-Verteilung:

**Lemma 3.2.1**

Es gilt:

$$\text{a) } \mathbb{E}X = \frac{s}{s-2}, \quad s \geq 3.$$

$$\text{b) } \text{Var } X = \frac{2s^2(r+s-2)}{r(s-4)(s-2)^2}, \quad s \geq 5.$$

c) Falls  $F_{r,s,\alpha}$  das  $\alpha$ -Quantil der  $F_{r,s}$ -Verteilung ist, dann gilt

$$F_{r,s,\alpha} = \frac{1}{F_{s,r,1-\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1).$$

**3.3 Punktschätzer und ihre Grundeigenschaften**

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe, definiert auf dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$ . Seien  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F \in \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Finde einen Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für den Parameter  $\theta$  mit vorgegebenen Eigenschaften.

Unser Ziel im nächsten Abschnitt ist es, zunächst grundlegende Eigenschaften der Schätzer kennenzulernen.

**3.3.1 Eigenschaften von Punktschätzern****Definition 3.3.1 (Erwartungstreue):**

Ein Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta$  heißt *erwartungstreu* oder *unverzerrt*, falls

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta, \quad \theta \in \Theta.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass

$$\mathbb{E}_\theta |\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)| < \infty, \quad \theta \in \Theta.$$

Der *Bias* (*Verzerrung*) eines Schätzers  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ist gegeben durch

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta.$$

Falls  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  erwartungstreu ist, dann gilt  $\text{Bias}(\hat{\theta}) = 0$  (kein systematischer Schätzfehler).

**Definition 3.3.2 (Asymptotische Erwartungstreue):**

Der Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta$  heißt *asymptotisch erwartungstreu* (oder *asymptotisch unverzerrt*), falls (für große Datenmengen)

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta, \quad \theta \in \Theta.$$

**Definition 3.3.3 (Konsistenz):**

Falls

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta, \quad \theta \in \Theta$$

in  $L^2$ , stochastisch bzw. fast sicher, dann heißt der Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein *konsistenter Schätzer* für  $\theta$  im *mittleren quadratischen, schwachen bzw. starken Sinne*.

- $\hat{\theta}$   $L^2$ -konsistent: für  $\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty$  gilt

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \theta \iff \mathbb{E}_\theta |\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \theta \in \Theta.$$

- $\hat{\theta}$  schwach konsistent:

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta \iff P_\theta(|\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \theta \in \Theta.$$

- $\hat{\theta}$  stark konsistent:

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \theta \iff P_\theta \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta \right) = 1, \quad \theta \in \Theta.$$

Daraus ergibt sich folgendes Diagramm (vgl. Wahrscheinlichkeitsrechnungsskript, Kapitel 6).

**Definition 3.3.4 (Mittlerer quadratischer Fehler (mean squared error)):**

Der mittlere quadratische Fehler eines Schätzers  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta$  ist definiert als

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta |\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta|^2.$$

**Lemma 3.3.1**

Falls  $m = 1$  und  $\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ , dann gilt

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}_\theta \hat{\theta} + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2.$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}) &= \mathbb{E}_\theta (\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathbb{E}_\theta (\hat{\theta} - \mathbb{E}_\theta \hat{\theta} + \mathbb{E}_\theta \hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_\theta (\hat{\theta} - \mathbb{E}_\theta \hat{\theta})^2}_{\text{Var}_\theta \hat{\theta}} + 2 \underbrace{\mathbb{E}_\theta (\hat{\theta} - \mathbb{E}_\theta \hat{\theta})}_{=0} \underbrace{(\mathbb{E}_\theta \hat{\theta} - \theta)}_{=const} + \underbrace{(\mathbb{E}_\theta \hat{\theta} - \theta)^2}_{=Bias(\hat{\theta})^2} \\ &= \text{Var}_\theta \hat{\theta} + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.3.1**

Falls  $\hat{\theta}$  erwartungstreu für  $\theta$  ist, dann gilt  $MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}_\theta \hat{\theta}$ .

**Definition 3.3.5 (Vergleich von Schätzern):**

Seien  $\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)$  und  $\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)$  zwei Schätzer für  $\theta$ . Man sagt, dass  $\hat{\theta}_1$  *besser* ist als  $\hat{\theta}_2$ , falls

$$MSE(\hat{\theta}_1) < MSE(\hat{\theta}_2), \quad \theta \in \Theta.$$

Falls  $m = 1$  und die Schätzer  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  erwartungstreu sind, so ist  $\hat{\theta}_1$  *besser als*  $\hat{\theta}_2$ , falls  $\hat{\theta}_1$  die kleinere Varianz besitzt. Dabei wird stets vorausgesetzt, dass  $\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}_i^2 < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ .

**Definition 3.3.6 (Asymptotische Normalverteilung):**

Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$  ( $m = 1$ ). Falls  $0 < \text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$  und

$$\frac{\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1),$$

dann ist  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  *asymptotisch normalverteilt*.

**Definition 3.3.7 (Bester erwartungstreuer Schätzer):**

Der Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta$  ist der *beste erwartungstreue Schätzer*, falls

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty, \quad \theta \in \Theta, \quad \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta, \quad \theta \in \Theta,$$

und  $\hat{\theta}$  die minimale Varianz in der Klasse aller erwartungstreuen Schätzer für  $\theta$  besitzt. Das heißt, dass für einen beliebigen erwartungstreuen Schätzer  $\tilde{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  mit

$$\mathbb{E}_\theta \tilde{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty \quad \text{gilt} \quad \text{Var}_\theta \hat{\theta} \leq \text{Var}_\theta \tilde{\theta}, \quad \theta \in \Theta.$$

**3.3.2 Schätzer des Erwartungswertes und empirische Momente**

Sei  $X \stackrel{d}{=} X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ein statistisches Merkmal. Sei weiter  $\mathbb{E}|X_i|^k < \infty$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $m = 1$  und der zu schätzende Parameter  $\theta = \mu_k = \mathbb{E}X_i^k$ . Insbesondere gilt im Fall  $k = 1$ , dass  $\theta = \mu_1 = \mu$  der Erwartungswert ist.

**Definition 3.3.8**

Das  $k$ -te *empirische Moment* von  $X$  wird als

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

definiert. Unter dieser Definition gilt, dass  $\hat{\mu}_1 = \bar{X}_n$ , also das erste empirische Moment gleich dem Stichprobenmittel ist.

**Satz 3.3.1 (Eigenschaften der empirischen Momente):**

Unter obigen Voraussetzungen gelten folgende Eigenschaften:

1.  $\hat{\mu}_k$  ist erwartungstreu für  $\mu_k$  (insbesondere  $\bar{X}_n$ ).
2.  $\hat{\mu}_k$  ist stark konsistent.
3. Falls  $\mathbb{E}_\theta |X|^{2k} < \infty$ ,  $\forall \theta \in \Theta$ , dann ist  $\hat{\mu}_k$  asymptotisch normalverteilt.

4. Es gilt  $\text{Var } \bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$ , wobei  $\sigma^2 = \text{Var}_\theta X$ . Falls  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$  (eine normalverteilte Stichprobe), dann gilt:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

### Beweis

1. 
$$\mathbb{E}_\theta \hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta X_i^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_k = \frac{n\mu_k}{n} = \mu_k.$$

2. Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}_\theta X_i^k = \mu_k.$$

3. Mit dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^k - n \cdot \mathbb{E} X^k}{\sqrt{n \cdot \text{Var } X^k}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k - \mu_k}{\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\text{Var } X^k}} = \sqrt{n} \frac{\hat{\mu}_k - \mu_k}{\sqrt{\text{Var } X^k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

Insbesondere gilt für den Spezialfall  $k = 1$

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

- 4.

$$\text{Var } \bar{X}_n = \text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)_{X_i \text{ u.i.v.}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Falls  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann gilt wegen der Faltungsstabilität der Normalverteilung  $\bar{X}_n \sim N(\cdot, \cdot)$ , weil

$$\frac{1}{n} X_i \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n^2}\right), \quad X_i \text{ u.i.v.}$$

Somit folgt aus 1) und 4)  $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ .

Damit ist der Satz bewiesen. □

### 3.3.3 Schätzer der Varianz

Seien  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  unabhängig identisch verteilt,  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $\mathbb{E}_\theta X^2 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ ,  $\theta_i = \sigma^2 = \text{Var}_\theta X$  für ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Die *Stichprobenvarianz*

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

ist dann ein Schätzer für  $\sigma^2$ . Falls der Erwartungswert  $\mu = \mathbb{E}_\theta X$  der Stichprobenvariablen explizit benannt ist, so kann ein Schätzer für  $\sigma^2$  auch als

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

definiert werden.

Wir werden nun die Eigenschaften von  $S_n^2$  und  $\tilde{S}_n^2$  untersuchen und sie miteinander vergleichen.

**Satz 3.3.2**

1. Die Stichprobenvarianz  $S_n^2$  ist erwartungstreu für  $\sigma^2$ :

$$\mathbb{E}_\theta S_n^2 = \sigma^2, \quad \theta \in \Theta.$$

2. Wenn  $\mathbb{E}_\theta X^4 < \infty$ , dann gilt

$$\text{Var}_\theta S_n^2 = \frac{1}{n} \left( \mu'_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right),$$

wobei  $\mu'_4 = \mathbb{E}_\theta (X - \mu)^4$ .

**Satz 3.3.3** 1. Der Schätzer  $\tilde{S}_n^2$  für  $\sigma^2$  ist erwartungstreu.

2. Es gilt  $\text{Var}_\theta \tilde{S}_n^2 = 1/n(\mu'_4 - \sigma^4)$ .

**Beweis**

$$\mathbb{E}_\theta \tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}_\theta (X_i - \mu)^2}_{=\text{Var}_\theta X_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2.$$

□

**Folgerung 3.3.1**

Der Schätzer  $\tilde{S}_n^2$  für  $\sigma^2$  ist besser als  $S_n^2$ , weil beide erwartungstreu sind und

$$\text{Var}_\theta \tilde{S}_n^2 = \frac{\mu'_4 - \sigma^4}{n} < \frac{\mu'_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4}{n} = \text{Var}_\theta S_n^2.$$

Diese Eigenschaft von  $\tilde{S}_n^2$  im Vergleich zu  $S_n^2$  ist intuitiv klar, da man in  $\tilde{S}_n^2$  mehr Informationen über die Verteilung der Stichprobenvariablen  $X_i$  (nämlich den bekannten Erwartungswert  $\mu$ ) reingesteckt hat.

**Satz 3.3.4**

Die Schätzer  $S_n^2$  bzw.  $\tilde{S}_n^2$  sind stark konsistent und asymptotisch normalverteilt:

$$\begin{aligned} S_n^2 &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \sigma^2, & \sqrt{n} \frac{S_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\mu'_4 - \sigma^4}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1), \\ \tilde{S}_n^2 &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \sigma^2, & \sqrt{n} \frac{\tilde{S}_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\mu'_4 - \sigma^4}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1), \end{aligned}$$

falls  $\mu'_4 < \infty$ .

### Folgerung 3.3.2

Es gilt

$$1. \quad \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$$

und somit

$$2. \quad \mathbb{P} \left( \mu \in \left[ \bar{X}_n - \frac{z_{1-\alpha/2} S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2} S_n}{\sqrt{n}} \right] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - \alpha \quad (3.3.1)$$

für ein  $\alpha \in (0, 1)$ , wobei  $z_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der  $N(0, 1)$ -Verteilung ist.

### Bemerkung 3.3.2

Das Intervall in (3.3.1) nennt man *asymptotisches Konfidenz- oder Vertrauensintervall* für den Parameter  $\mu$ . Falls  $\alpha$  klein ist (z.B.  $\alpha = 0,05$ ), so liegt  $\mu$  mit einer asymptotisch großen Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  im vorgegebenen Intervall. Diese Art der Schätzung von  $\mu$  stellt eine Alternative zu den Punktschätzern dar und wird ausführlich in Kapitel 4 behandelt.

### Beweis der Folgerung 3.3.2

1. Aus Satz 3.3.4 folgt

$$S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \sigma^2 \implies \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} 1 \implies \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 1$$

und somit nach der Verwendung des Satzes von Slutsky

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \cdot 1 = Y \sim N(0, 1),$$

wobei wir die asymptotische Normalverteiltheit von  $\bar{X}_n$  benutzt haben.

2. Aus 1) folgt

$$\mathbb{P}_\theta \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \in [z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$$

Daraus folgt das Intervall (3.3.1) nach der Auflösung der Ungleichung

$$z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \leq z_{1-\alpha/2}$$

bzgl.  $\mu$ .

□

Betrachten wir weiterhin den wichtigen Spezialfall der normalverteilten Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , also  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

**Satz 3.3.5**

Falls  $X_1, \dots, X_n$  normalverteilt sind mit Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ , dann gilt

1. 
$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$
2. 
$$\frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2.$$

**Lemma 3.3.2**

Falls  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen,  $X_i \stackrel{d}{=} X$ , dann sind  $\bar{X}_n$  und  $S_n^2$  unabhängig.

Dieses Lemma wird unter Anderem gebraucht, um folgendes Ergebnis zu beweisen:

**Satz 3.3.6**

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3.2 gilt

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

**Beweis des Satzes 3.3.6** Aus den Sätzen 3.3.1, 4) und 3.3.5 folgt

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{und} \quad \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

also

$$Y_1 = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{und} \quad Y_2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Nach dem Lemma 3.3.2 und Satz ?? sind  $Y_1$  und  $Y_2$  unabhängig. Dann gilt

$$T = \frac{Y_1}{\sqrt{\frac{Y_2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

nach der Definition einer  $t$ -Verteilung, wobei

$$T = \frac{\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}.$$

Somit gilt

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

□

**Bemerkung 3.3.3**

Mit Hilfe des Satzes 3.3.6 kann folgendes Konfidenzintervall für den Erwartungswert  $\mu$  einer normalverteilten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$  ( $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) konstruiert werden:

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} S_n, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} S_n\right]\right) = 1 - \alpha$$

für  $\alpha \in (0, 1)$ , denn

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \in \left[\underbrace{t_{n-1, \alpha/2}}_{=-t_{n-1, 1-\alpha/2} \text{ wg. Sym. } t\text{-Vert.}}, t_{n-1, 1-\alpha/2}\right]\right) &= F_{t_{n-1}}(t_{n-1, 1-\alpha/2}) - F_{t_{n-1}}(t_{n-1, \alpha/2}) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

wobei  $t_{n-1, \alpha}$  das  $\alpha$ -Quantil der  $t_{n-1}$ -Verteilung darstellt. Der Rest folgt aus (3.3.2) durch das Auflösen bzgl.  $\mu$ .

**3.3.4 Eigenschaften der Ordnungsstatistiken**

In Abschnitt 2.2.2 haben wir bereits die Ordnungsstatistiken  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  einer konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  betrachtet. Wenn wir nun auf der Modellebene arbeiten, also eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F(x)$  haben, welche Eigenschaften haben dann ihre Ordnungsstatistiken

$$X_{(1)}, \dots, X_{(n)}?$$

**Satz 3.3.7**

1. Die Verteilungsfunktion der Ordnungsstatistik  $X_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  ist gegeben durch

$$F_{X_{(i)}}(x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F^k(x) (1 - F(x))^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.3)$$

2. Falls  $X_i$  absolut stetig verteilt sind mit Dichte  $f$ , die stückweise stetig ist, dann ist auch  $X_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  absolut stetig verteilt mit der Dichte

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) F^{i-1}(x) (1 - F(x))^{n-i}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis**

Führen wir die Zufallsvariable

$$Y = \#\{i : X_i \leq x\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

ein. Da  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion  $F$  sind, gilt  $Y \sim \text{Bin}(n, F(x))$ . Weiterhin gilt

$$F_{X_{(i)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(i)} \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq i) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F^k(x) (1 - F(x))^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

### Bemerkung 3.3.4

Für  $i = 1$  und  $i = n$  sieht die Formel (3.3.3) besonders einfach aus:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - (1 - F(x))^n, & x \in \mathbb{R} \\ F_{X_{(n)}}(x) &= F^n(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### Übungsaufgabe 3.3.1

Zeigen Sie für  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig identisch verteilt,  $X_i \sim U[0, \theta]$ ,  $\theta > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dass

1. die Dichte von  $X_{(i)}$  gleich

$$f_{X_{(i)}}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \theta^{-n} x^{i-1} (\theta - x)^{n-i}, & x \in (0, \theta) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

- 2.

$$\mathbb{E}X_{(i)}^k = \frac{\theta^k n! (i+k-1)!}{(n+k)!(i-1)!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n$$

sind. Insbesondere gilt  $\mathbb{E}X_{(i)} = \frac{i}{n+1}\theta$  und  $\text{Var} X_{(i)} = \frac{i(n-i+1)\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ .

### 3.3.5 Empirische Verteilungsfunktion

Im Folgenden betrachten wir die statistischen Eigenschaften der in Abschnitt 2.1.2 eingeführten empirischen Verteilungsfunktion  $\hat{F}_n(x)$  einer Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ , wobei  $X_i \stackrel{d}{=} X$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F(\cdot)$  sind.

#### Satz 3.3.8

Es gilt

1.  $n\hat{F}_n(x) \sim \text{Bin}(n, F(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

2.  $\hat{F}_n(x)$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  mit

$$\text{Var } \hat{F}_n(x) = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}.$$

3.  $\hat{F}_n(x)$  ist stark konsistent.

4.  $\hat{F}_n(x)$  ist asymptotisch normalverteilt:

$$\sqrt{n} \frac{\hat{F}_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1), \quad \forall x : F(x) \in (0, 1).$$

**Beweis** 1. folgt aus der Darstellung

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

weil  $\mathbb{I}(X_i \leq x) \sim \text{Bernoulli}(F(x))$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Somit ist

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x) \sim \text{Bin}(n, F(x)).$$

2. Es folgt aus 1)

$$\begin{cases} \mathbb{E}(n\hat{F}_n(x)) = nF(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \text{Var}(n\hat{F}_n(x)) = nF(x) \cdot (1 - F(x)), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

woraus  $\mathbb{E}\hat{F}_n(x) = F(x)$  und  $\text{Var } \hat{F}_n(x) = F(x)(1 - F(x))/n$  folgen.

3. Da  $Y_i = \mathbb{I}(X_i \leq x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen sind, gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}Y_i = F(x).$$

4. folgt aus der Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes auf die oben genannte Folge  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . □

In Satz 3.3.8, 3) wird behauptet, dass

$$\hat{F}_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Der nachfolgende Satz von Gliwienko-Cantelli behauptet, dass diese Konvergenz gleichmäßig in  $x \in \mathbb{R}$  stattfindet. Um diesen Satz formulieren zu können, betrachten wir den *gleichmäßigen Abstand* zwischen  $\hat{F}_n$  und  $F$

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|.$$

Dieser Abstand ist eine Zufallsvariable, die auch *Kolmogorow-Abstand* genannt wird. Er gibt den maximalen Fehler an, den man bei der Schätzung von  $F(x)$  durch  $\hat{F}_n(x)$  macht.

**Übungsaufgabe 3.3.2**

Zeigen Sie, dass

$$D_n = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \max \left\{ F(X_{(i)} - 0) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(X_{(i)}) \right\}. \quad (3.3.4)$$

Beachten Sie dabei die Tatsache, dass  $\hat{F}_n(x)$  eine Treppenfunktion mit Sprungstellen  $X_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  ist.

**Satz 3.3.9 (Gliwenko-Cantelli):**

Es gilt  $D_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} 0$ .

**Satz 3.3.10**

Für jede stetige Verteilungsfunktion  $F$  gilt

$$D_n \stackrel{d}{=} \sup_{y \in [0,1]} \left| \hat{G}_n(y) - y \right|, \text{ wobei } \hat{G}_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Y_i \leq y), \quad y \in \mathbb{R}$$

die empirische Verteilungsfunktion der Zufallsstichprobe  $(Y_1, \dots, Y_n)$  mit unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $Y_i \sim U[0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  ist.

**Folgerung 3.3.3**

Falls  $F$  eine stetige Verteilungsfunktion ist, dann gilt

$$D_n \stackrel{d}{=} \max_{i=1, \dots, n} \max \left\{ Y_{(i)} - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - Y_{(i)} \right\},$$

wobei  $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$  die Ordnungsstatistiken der auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Stichprobenvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  sind.

**Beweis** Benutze dazu die Darstellung (3.3.4), den Satz 3.3.10 sowie die Tatsache, dass

$$F(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

für die Verteilungsfunktion der  $U[0, 1]$ -Verteilung ist. □

Folgende Ergebnisse werden ohne Beweis angegeben:

**Bemerkung 3.3.5**

Für die Zwecke des statistischen Testens (vgl. den Anpassungstest von Kolmogorow-Smirnow, Bemerkung 3.3.6, 2)) ist es notwendig, die Quantile der Verteilung von  $D_n$  zu nennen. Auf Grund der Komplexität der Verteilung von  $D_n$  ist es jedoch unmöglich, sie explizit anzugeben. Mit Hilfe des Satzes 3.3.10 ist es möglich, diese Quantile durch Monte-Carlo-Simulationen numerisch zu berechnen. Dazu simuliert man mehrere Stichproben  $(Y_1, \dots, Y_n)$  von  $U[0, 1]$ -verteilten Pseudozufallszahlen, bildet  $\hat{G}_n(x)$  und berechnet  $D_n$  nach Folgerung 3.3.3.

**Satz 3.3.11 (Kolmogorow):**

Falls die Verteilungsfunktion  $F$  der unabhängigen und identisch verteilten Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  stetig ist, dann gilt

$$\sqrt{n}D_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y,$$

wobei  $Y$  eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$K(x) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Kolmogorow-Verteilung) ist.

**Bemerkung 3.3.6**

1. Aus Satz 3.3.11 folgt

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \leq x) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} K(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die daraus resultierende Näherungsformel

$$\mathbb{P}(D_n \leq x) \approx K(x\sqrt{n})$$

ist ab  $n > 40$  praktisch brauchbar.

2. *Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstest*: Mit Hilfe der Aussage des Satzes 3.3.11 ist es möglich, folgenden *asymptotischen Anpassungstest von Komogorow-Smirnow* zu entwickeln. Es wird die Haupthypothese  $H_0 : F = F_0$  (die unbekannte Verteilungsfunktion der Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ist gleich  $F_0$ ) gegen die Alternative  $H_1 : F \neq F_0$  getestet. Dabei wird  $H_0$  verworfen, falls

$$\sqrt{n}D_n \notin [k_{\alpha/2}, k_{1-\alpha/2}]$$

ist, wobei

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F_0(x)|$$

und  $k_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der Kolmogorow-Verteilung ist. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, die richtige Hypothese  $H_0$  zu verwerfen (Wahrscheinlichkeit des *Fehlers 1. Art*) asymptotisch gleich

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \notin [k_{\alpha/2}, k_{1-\alpha/2}] | H_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - K(k_{1-\alpha/2}) + K(k_{\alpha/2}) = 1 - (1 - \alpha/2) + \alpha/2 = \alpha.$$

In der Praxis wird  $\alpha$  klein gewählt, z.B.  $\alpha \approx 0,05$ . Somit ist im Fall, dass  $H_0$  stimmt, die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung in Folge des Testens klein.

Dieser Test ist nur ein Beispiel dessen, wie der Satz von Kolmogorow in der statistischen Testtheorie verwendet wird. Die allgemeine Philosophie des Testens wird in Stochastik III erläutert.

Mit Hilfe von  $\hat{F}_n$  lassen sich sehr viele Schätzer durch die sogenannte *Plug-in-Methode* konstruieren. Dies werden wir jetzt näher erläutern: Sei  $M = \{\text{Menge aller Verteilungsfunktionen}\}$ .

### 3.4 Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F \in \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  (Parametrisches Modell). Sei die Parametrisierung  $\theta \mapsto F_\theta$  unterscheidbar, d.h.  $F_\theta \neq F_{\theta'} \iff \theta \neq \theta'$ .

*Zielstellung:* Konstruiere einen Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  für  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ .

#### 3.4.1 Momentenschätzer

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Satz 4.8) folgt, dass unter gewissen Voraussetzungen (z.B. Gleichverteilung auf einem kompakten Intervall) an die Verteilung  $F$  diese Verteilung aus der Kenntnis von Momenten  $\mathbb{E}X^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  wiedergewonnen werden kann. Auf dieser Idee der Schätzung von  $F$  aus den Momenten basiert die von Karl Pearson am Ende des XIX. Jh. vorgeschlagene *Momentenmethode*.

*Annahme:* Es existiert ein  $r \geq m$ , so dass  $\mathbb{E}_\theta |X_i|^r < \infty$ . Seien die Momente  $\mathbb{E}_\theta X_i^k = g_k(\theta)$ ,  $k = 1, \dots, r$  als Funktionen des Parametervektors  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$  gegeben.

*Momenten-Gleichungssystem:*  $\hat{\mu}_k = g_k(\theta)$ ,  $k = 1, \dots, r$ , wobei  $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_i^k$  die  $k$ -ten empirischen Momente sind.

##### Definition 3.4.1

Falls das obige Gleichungssystem eindeutig lösbar bzgl.  $\theta$  ist, so heißt die Lösung  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  *Momentenschätzer (M-Schätzer)* von  $\theta$ .

##### Lemma 3.4.1

Falls die Funktion  $g = (g_1, \dots, g_r) : \Theta \rightarrow C \subset \mathbb{R}^r$  eineindeutig und ihre Inverse  $g^{-1} : C \rightarrow \Theta$  stetig ist, dann ist der M-Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  von  $\theta$  stark konsistent.

**Beweis** Es gilt  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = g^{-1}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_r) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} \theta$ , weil  $\hat{\mu}_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} g_k(\theta)$ ,  $k = 1, \dots, r$  (starke Konsistenz der empirischen Momente) und  $g^{-1}$  stetig.  $\square$

##### Bemerkung 3.4.1

1. Andere Eigenschaften gelten für M-Schätzer im Allgemeinen nicht. Zum Beispiel sind nicht alle M-Schätzer erwartungstreu (vgl. Beispiel 3.4.1, 1)).

2. Manchmal sind  $r > m$  Gleichungen im Momentensystem notwendig, um einen M-Schätzer zu bekommen. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn manche Funktionen  $g_i = \text{const}$  sind, d.h. sie enthalten keine Information über  $\theta$  (vgl. Beispiel 3.4.1, 2)).

### Beispiel 3.4.1

1. *Normalverteilung:*  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ; Gesucht ist ein M-Schätzer für  $\mu$  und  $\sigma^2$ , also  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} g_1(\mu, \sigma^2) &= \mathbb{E}_\theta X = \mu, \\ g_2(\mu, \sigma^2) &= \mathbb{E}_\theta X^2 = \text{Var}_\theta X + (\mathbb{E}_\theta X)^2 = \sigma^2 + \mu^2. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \mu^2 + \sigma^2. \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \bar{X}_n^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2. \end{aligned}$$

Das heißt, das die M-Schätzer  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ ,  $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2$  sind. Dabei ist  $\hat{\sigma}^2$  nicht erwartungstreu:

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} \cdot \mathbb{E}_\theta S_n^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

2. *Gleichverteilung:*  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $X \sim U[-\theta, \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Gesucht ist ein Momentenschätzer für  $\theta$ . Es gilt

$$\begin{aligned} g_1(\theta) &= \mathbb{E}_\theta X = 0, \\ g_2(\theta) &= \mathbb{E}_\theta X^2 = \text{Var}_\theta X = \frac{(\theta - (-\theta))^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0 & \text{unbrauchbar,} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{\theta^2}{3}. \end{cases}$$

Es folgt, dass  $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$  der Momentenschätzer für  $\theta$  ist. Wir haben somit 2 Gleichungen für die Schätzung eines einzigen Parameters  $\theta$  benötigt, d.h.  $r = 2 > m = 1$ .

### 3.4.2 Maximum-Likelihood-Schätzer

Diese wurden von Carl Friedrich Gauss (Anfang des XIX. Jh.) und Sir Ronald Fisher (1922) entdeckt. Seien entweder alle Verteilungen aus der parametrischen Familie  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$  diskret oder alle absolut stetig.

#### Definition 3.4.2

1. Falls die Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  absolut stetig verteilt mit Dichte  $f_\theta(x)$  sind, dann heißt

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \Theta$$

die *Likelihood-Funktion* der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ .

2. Falls die Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  diskret verteilt mit Zähldichte  $p_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X_i = x)$ ,  $x \in C$  sind ( $C$  ist der Wertebereich von  $X$ ), dann heißt

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i), \quad (x_1, \dots, x_n) \in C^n, \quad \theta \in \Theta$$

die *Likelihood-Funktion* der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Nach dieser Definition gilt im

- *diskreten Fall*  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$
- *absolut stetigen Fall*

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \theta) \Delta x_1 \cdot \dots \cdot \Delta x_n &= f_{(X_1, \dots, X_n), \theta}(x_1, \dots, x_n) \Delta x_1 \cdot \dots \cdot \Delta x_n \\ &\approx \mathbb{P}_\theta(X_1 \in [x_1, x_1 + \Delta x_1], \dots, X_n \in [x_n, x_n + \Delta x_n]), \quad \Delta x_i \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Nun wird ein Schätzer für  $\theta$  so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}_\theta(X_i \in [x_i, x_i + \Delta x_i], \quad i = 1, \dots, n)$$

maximal wird.  $\implies$  Maximum-Likelihoodmethode:

#### Definition 3.4.3

Sei das Maximierungsproblem  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) \mapsto \max_{\theta \in \Theta}$  eindeutig lösbar. Dann heißt

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$$

der *Maximum-Likelihood-Schätzer* von  $\theta$  (*ML-Schätzer*).

#### Bemerkung 3.4.2

1. In relativ wenigen Fällen ist ein ML-Schätzer  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  explizit auffindbar. In diesen Fällen wird meistens der konstante Faktor von  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  weggeworfen und vom Rest der Logarithmus gebildet:

$$\log L(x_1, \dots, x_n, \theta) \quad (\text{die sog. Loglikelihood-Funktion}).$$

Dadurch wird

$$\prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=1}^n p_{\theta}(x_i)$$

zu einer Summe

$$\sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(x_i) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n \log p_{\theta}(x_i),$$

die leichter bzgl.  $\theta$  zu differenzieren ist. Danach betrachtet man

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dies ist die notwendige Bedingung eines Extremums von  $\log L$  (und somit von  $L$ , weil  $\log \nearrow$ ). Falls dieses System eindeutig lösbar ist, und die Lösung eine Maximum-Stelle ist, dann wird sie zum ML-Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  erklärt.

2. In den meisten praxisrelevanten Fällen sind ML-Schätzer jedoch nur numerisch auffindbar.

### Beispiel 3.4.2

1. *Bernoulli-Verteilung*:  $X_i \stackrel{d}{=} X$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ , für ein  $p \in [0, 1]$ .  
Da

$$X = \begin{cases} 1, & \text{mit Wkt. } p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Zähldichte

$$p_{\theta}(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\},$$

ist die *Likelihood-Funktion der Stichprobe*  $(X_1, \dots, X_n)$  gegeben durch

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \stackrel{\text{def.}}{=} h(p).$$

- a) Falls  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  ( $\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ), es folgt  $h(p) = (1-p)^n \rightarrow \max_{p \in [0,1]} h(p)$  bei  $p = 0$ . Dann ist der ML-Schätzer  $\hat{p}(0, \dots, 0) = 0$ .
- b) Falls  $\sum_{i=1}^n x_i = n$  ( $\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ ), es folgt  $h(p) = p^n \rightarrow \max_{p \in [0,1]} h(p)$  bei  $p = 1$ . Dann ist der ML-Schätzer  $\hat{p}(1, 1, \dots, 1) = 1$ .

c) Falls  $0 < \sum_{i=1}^n x_i < n$ , dann gilt

$$\log L(x_1, \dots, x_n, p) = n\bar{x}_n \log p + n(1 - \bar{x}_n) \log(1 - p) = n \cdot g(p).$$

Da  $g(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0,1} -\infty$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p)}{\partial p} &= \frac{\bar{x}_n}{p} + \frac{1 - \bar{x}_n}{1 - p} \cdot (-1) = \frac{\bar{x}_n}{p} + \frac{\bar{x}_n - 1}{1 - p} = 0 \\ \Leftrightarrow (1 - p)\bar{x}_n + (\bar{x}_n - 1)p &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = \bar{x}_n, \end{aligned}$$

folgt aufgrund der Stetigkeit von  $g$ , dass  $g$  genau ein Extremum  $\arg \max_p g(p) = \bar{x}_n$  besitzt.

Der ML-Schätzer ist also gegeben durch  $\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n$ .

2. *Gleichverteilung*:  $X \sim U[0, \theta]$ ,  $\theta > 0$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  unabhängig identisch verteilt, gesucht ist ein ML-Schätzer für  $\theta$ . Es gilt

$$f_{X_i}(x) = 1/\theta \cdot \mathbb{I}(x \in [0, \theta]), \quad i = 1, \dots, n.$$

Somit ist die Likelihood-Funktion durch

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \theta) &= \begin{cases} (1/\theta)^n, & 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1/\theta)^n, & \text{falls } \min\{x_1, \dots, x_n\} \geq 0, \quad \max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \theta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= g(\theta), \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

gegeben. Damit folgt  $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta > 0} g(\theta) = \max\{x_1, \dots, x_n\} = x_{(n)}$ , wodurch der

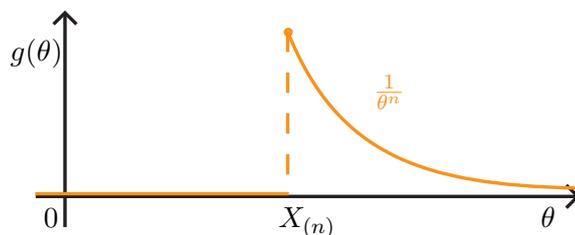


Abb. 3.4: Illustration der Funktion  $g$ .

ML-Schätzer durch  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$  gegeben ist.

**Satz 3.4.1 (Schwache Konsistenz von ML-Schätzern):**

Sei  $m = 1$  und  $\Theta$  ein offenes Intervall aus  $\mathbb{R}$ . Sei  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  *unimodal*, d.h. für  $\hat{\theta}$  ML-Schätzer für  $\theta$  gilt

$$\begin{cases} \forall \theta < \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) & \Rightarrow L(x_1, \dots, x_n, \theta) \text{ ist steigend} \\ \forall \theta > \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) & \Rightarrow L(x_1, \dots, x_n, \theta) \text{ ist fallend} \end{cases}$$

(d.h. es existiert genau ein  $\max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ ). Dann gilt  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ .

#### Definition 3.4.4

Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $L(x, \theta)$  die Likelihood-Funktion von  $X_i$ . Dann heißt der Ausdruck

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \theta) \right)^2, \quad \theta \in \Theta \quad (3.4.1)$$

die *Fisher-Information* der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Es wird in Zukunft vorausgesetzt, dass  $0 < I(\theta) < \infty$ . Wir stellen nun einige Bedingungen auf, die für die asymptotische Normalverteiltheit von ML-Schätzern notwendig sind.

1.  $\Theta \subset \mathbb{R}$  ist ein offenes Intervall ( $m = 1$ ).
2. Es gelte  $\mathbb{P}_\theta \neq \mathbb{P}_{\theta'}$  genau dann, wenn  $\theta \neq \theta'$ .
3. Die Familie  $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ,  $\theta \in \Theta$  bestehe nur aus diskreten oder nur aus absolut stetigen Verteilungen, also nicht aus Mischungen von diskreten und absolut stetigen Verteilungen.
4.  $B = \text{supp } L(x, \theta) = \{x \in \mathbb{R} : L(x, \theta) > 0\}$  hängt nicht von  $\theta \in \Theta$  ab. Dabei heißt  $\text{supp}$  (von englisch „support“) der „Träger“ einer Funktion  $f$  und ist definiert als

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

und die Likelihood-Funktion  $L(x, \theta)$  ist durch

$$L(x, \theta) = \begin{cases} p(x, \theta), & \text{im diskreten Fall,} \\ f(x, \theta), & \text{im absolut stetigen Fall} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

gegeben, wobei  $p(x, \theta)$  bzw.  $f(x, \theta)$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichte von  $\mathbb{P}_\theta$  ist.

5. Die Abbildung  $L(x, \theta)$  ist dreimal stetig differenzierbar und es gilt

$$0 = \frac{d^k}{d\theta^k} \int_B L(x, \theta) dx = \int_B \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} L(x, \theta) dx, \quad k = 1, 2, \theta \in \Theta.$$

Da das Integral über die Dichte  $L(x, \theta)$  gleich 1 ist, ist die Ableitung gleich 0. Dabei sind im diskreten Fall die Integrale durch Summen zu ersetzen.

6. Für alle  $\theta_0 \in \Theta$  existiert eine Konstante  $\delta_{\theta_0} > 0$  und eine messbare Funktion  $g_{\theta_0} : B \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\left| \frac{\partial^3 \log L(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq g_{\theta_0}(x), \quad \forall x \in B, \quad |\theta - \theta_0| < \delta_{\theta_0},$$

wobei  $\mathbb{E}_{\theta_0} g_{\theta_0}(X_1) < \infty$ .

**Bemerkung 3.4.3**

Es gilt folgende Relation:

$$n \cdot I(\theta) = \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right),$$

wobei

$$L(X_1, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n L(X_i, \theta) \quad (3.4.3)$$

die Likelihood-Funktion der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  ist mit  $L(X_i, \theta)$  nach (3.4.2).

**Beweis** Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \log L(X_i, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{L'(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta)}.$$

Ferner

$$\mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta \frac{L'(X_i, \theta)}{L(X_i, \theta)} = \sum_{i=1}^n \int_B \frac{L'(X, \theta)}{L(X, \theta)} \cdot L(X, \theta) dx \stackrel{5}{=} 0.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right) &= \text{Var}_\theta \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta) \right) \\ &\stackrel{X_i \text{ unabh.}}{=} \sum_{i=1}^n \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_i, \theta) \right) \stackrel{X_i \text{ ident. vert.}}{=} n \cdot \text{Var}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \theta) \right) \\ &= n \cdot \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \theta) \right)^2 = n \cdot I(\theta). \end{aligned}$$

□

**Satz 3.4.2**

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von Zufallsvariablen, für die die Bedingungen 1) bis 6) erfüllt sind und  $0 < I(\theta) < \infty$ ,  $\theta \in \Theta$ . Falls  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein schwach konsistenter ML-Schätzer für  $\theta$  ist, dann ist  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  asymptotisch normalverteilt:

$$\sqrt{n \cdot I(\theta)} \left( \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

**3.4.3 Bayes-Schätzer**

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe, wobei  $X_i$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F_\theta, \theta \in \Theta$  sind. Sei  $F_\theta$  entweder eine diskrete oder eine absolut stetige Verteilung. Sei aber auch  $\theta$  eine Zufallsvariable  $\tilde{\theta}$  mit Verteilung  $Q(\cdot)$  auf dem Messraum  $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ , die entweder diskret mit Zähldichte  $q(\cdot)$  oder absolut stetig mit Dichte  $q(\cdot)$  ist. Nach wie vor werden beide Fälle gemeinsam betrachtet, dabei entsprechen sich die Summation und Integration im diskreten bzw. absolut stetigen Fall.

**Definition 3.4.5**

Die Verteilung  $Q(\cdot)$  heißt *a-priori-Verteilung* des Parameters  $\theta$  (von  $\tilde{\theta}$ ) (a-priori bedeutet hier „vor dem Experiment  $(X_1, \dots, X_n)$ “).

**Definition 3.4.6**

Die *a-posteriori-Verteilung* des Parameters  $\theta$  (von  $\tilde{\theta}$ ) ist gegeben durch die (Zähl-)Dichte

$$q_{X_1, \dots, X_n}(\theta, X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{\theta} = \theta | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), & \text{falls die Verteilung } Q \text{ diskret ist,} \\ f_{\tilde{\theta}|X_1, \dots, X_n}(\theta, x_1, \dots, x_n), & \text{falls die Verteilung } Q \text{ absolut stetig ist.} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{\theta} = \theta | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \frac{\mathbb{P}(\tilde{\theta} = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) \cdot q(\theta)}{\sum_{\theta_1 \in \Theta} \mathbb{P}_{\theta_1}(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) \cdot q(\theta_1)} \end{aligned}$$

die *Bayesche Formel*, bzw.

$$f_{\tilde{\theta}|X_1, \dots, X_n}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{f_{(\tilde{\theta}, X_1, \dots, X_n)}(\theta, x_1, \dots, x_n)}{f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)} = \frac{L(x_1, \dots, x_n, \theta) \cdot q(\theta)}{\int_{\Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta_1) \cdot q(\theta_1) d\theta_1},$$

mit  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  nach (3.4.3).

**Definition 3.4.7**

Eine *Verlustfunktion*  $V : \Theta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist eine  $\Theta^2$ -messbare Funktion.

*Verlustfunktionen* spielen in unseren Betrachtungen folgende Rolle:  $\mathbb{E}_*V(\tilde{\theta}, a)$  stellt den *erwarteten Verlust* (mittleres Risiko) dar, der bei der Schätzung des Parameters  $\theta$  durch  $a$  entsteht. Dabei stellt  $\mathbb{E}_*$  den Erwartungswert bezüglich der *a-posteriori-Verteilung* von  $\tilde{\theta}$  dar. Es sind offensichtlich die konkreten Stichprobenwerte  $x_1, \dots, x_n$  in die a-posteriori-Verteilung eingegangen, deshalb ist  $\mathbb{E}_*V(\tilde{\theta}, a)$  eine Funktion von  $a$  und  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\mathbb{E}_*V(\tilde{\theta}, a) = \varphi(x_1, \dots, x_n, a).$$

**Definition 3.4.8**

Ein Schätzer  $\hat{\theta}$  heißt *Bayes-Schätzer* des Parameters  $\theta$ , falls

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \arg \min_a \mathbb{E}_*V(\tilde{\theta}, a) \quad (3.4.4)$$

existiert und eindeutig ist.

**Bemerkung 3.4.4**

1. Manchmal gilt  $\hat{\theta} \notin \Theta$ , was mit der Existenz des Minimums von  $\varphi(x_1, \dots, x_n, a)$  auf  $\Theta$  zu tun hat.

2. Der Name „Bayesscher Ansatz“ stammt von dem englischen Mathematiker Thomas Bayes (1702–1761), der die Bayessche Formel

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)} \quad (3.4.5)$$

nur ideenhaft eingeführt hat. Der eigentliche Entdecker der Formel (3.4.5) ist Pierre-Simon Laplace (1749–1827) (Ende des XVIII. Jahrhunderts). Diese Formel wurde bei der Herleitung der *a-posteriori-Verteilung* von  $\tilde{\theta}$  implizit benutzt.

3. Die Vorgehensweise in Definition 3.4.8 ist in konkreten praxisrelevanten Fällen meistens nur numerisch möglich. Es gibt sehr wenige Beispiele für analytische Lösungen des in (3.4.4) gestellten Minimierungsproblems.

**Beispiel 3.4.3 (Quadratische Verlustfunktion):**

Ist  $V(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)^2$ , so ist

$$\arg \min_a (\varphi(x_1, \dots, x_n, a)) = \arg \min_a (\mathbb{E}_*(\tilde{\theta} - a)^2) = \arg \min_a (\mathbb{E}_*\tilde{\theta}^2 - 2a\mathbb{E}_*\tilde{\theta} + a^2) = \mathbb{E}_*\tilde{\theta}$$

und daher der *Bayes-Schätzer*  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  für  $\theta$  durch  $\mathbb{E}_*\tilde{\theta}$  gegeben.

**Beispiel 3.4.4 (Bernoulli-Verteilung):**

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine unabhängig identisch verteilte Stichprobe von  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Weiter sei die a-priori-Verteilung

$$\tilde{p} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta > 0, \text{ mit Zähldichte } q(p) = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \mathbb{I}(p \in [0, 1]),$$

die a-posteriori-Verteilung von  $\tilde{p}$  ist dann gleich

$$q^*(p) = f_{\tilde{p}|X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}(p) = \frac{\mathbb{P}_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \cdot q(p)}{\int_0^1 \mathbb{P}_{p_1}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \cdot q(p_1) dp_1}.$$

Es ist immer möglich die a-posteriori-Verteilung nicht bezüglich des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$ , sondern bezüglich einer Funktion  $g(X_1, \dots, X_n)$ , zu berechnen (*Komplexitätsreduktion*).

Hier ist  $Y = g(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$  die Gesamtanzahl aller Erfolge in  $n$  Experimenten, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher gilt für die a-posteriori-Verteilung bzgl.  $Y$ :

$$\begin{aligned} q^*(p) = f_{\tilde{p}|Y=k}(p) &= \frac{\mathbb{P}_p(Y = k) \cdot q(p)}{\int_0^1 \mathbb{P}_{p_1}(Y = k) q(p_1) dp_1} \\ &\stackrel{Y \sim \text{Bin}(n, p)}{\text{falls } \tilde{p}=p}{=} \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot (B(\alpha, \beta))^{-1} \cdot p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}}{\frac{\binom{n}{k}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \int_0^1 p_1^{k+\alpha-1} (1-p_1)^{n-k+\beta-1} dp_1} \\ &= \frac{p^{k+\alpha-1} (1-p)^{n-k+\beta-1}}{B(k+\alpha, n-k+\beta)}, \quad p \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Daher ist die a-posteriori-Verteilung von  $\tilde{p}$  unter der Bedingung  $Y = k$  durch

$$\text{Beta}(k + \alpha, n - k + \beta)$$

gegeben.

Für den *Bayes-Schätzer* gilt:

$$\begin{aligned} \hat{p}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{E}_* \tilde{p} = \int_0^1 p \cdot q^*(p) dp = \frac{\int_0^1 p^{k+\alpha} (1-p)^{n-k+\beta-1} dp}{B(k+\alpha, n-k+\beta)} \\ &= \frac{B(k+\alpha+1, n-k+\beta)}{B(k+\alpha, n-k+\beta)} = \dots = \frac{k+\alpha}{\alpha+\beta+n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + \alpha}{\alpha+\beta+n} = \frac{\alpha + n\bar{x}_n}{\alpha+\beta+n}. \end{aligned}$$

*Interpretation:*

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \underbrace{\frac{n}{\alpha+\beta+n}}_{=:c_1} \bar{X}_n + \underbrace{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}}_{=:c_2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = c_1 \cdot \bar{X}_n + c_2 \cdot \mathbb{E}_{apr} \tilde{\theta},$$

wobei  $c_1 + c_2 = 1$  ist. Dies heißt, dass die Bayessche Methode einen Mittelweg zwischen dem Schätzer  $\mathbb{E}_{apr} \tilde{\theta}$  (in Abwesenheit der Information über die Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ ) und dem M-Schätzer  $\bar{X}_n$  (in Abwesenheit der a-priori-Information über die Verteilung von  $\tilde{p}$ ) für  $p$  einschlägt.

### 3.4.4 Resampling-Methoden zur Gewinnung von Punktschätzern

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe im parametrischen Modell. Gesucht ist ein Schätzer  $\hat{\theta}$  für den Parameter  $\theta$ . Um diesen Schätzer zu konstruieren, werden bei Resampling-Methoden neue Stichproben  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$  durch das unabhängige Ziehen mit Zurücklegen aus der alten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  generiert und auf ihrer Basis Mittelwerte, Stichprobenvarianzen und andere Schätzer gebildet. Dabei ist die Dimension  $m$  des Parameterraums  $\Theta$  beliebig.

Wir werden im Folgenden die *Resampling*-Methoden

1. *Jackknife* (dt. „Taschenmesser“, weist auf Mittel, die jedem immer zur Hand sein sollten)
2. *Bootstrap* (engl. „self-sufficient“, dt. „mit eigenen Ressourcen“)

betrachten.

1. *Jackknife-Methoden zur Schätzung der Varianz bzw. der Verzerrung von Schätzern:*

Als einführendes Beispiel betrachten wir  $\theta = \mathbb{E}X = \mu$  bzw.  $\theta = \text{Var} X = \sigma^2$  und ihre (erwartungstreue) Schätzer  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$  bzw.  $\hat{\sigma}^2 = S_n^2$ .

Wie wir bereits wissen, gilt

$$\text{Var} \hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{Var} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left( \mu'_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right).$$

Nun ist ein Schätzer für die Varianz von  $\hat{\mu}$  bzw.  $\hat{\sigma}^2$  gesucht. Dazu verwenden wir die Plug-in Methode

$$\widehat{\text{Var}} \hat{\mu} = \frac{S_n^2}{n}, \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left( \hat{\mu}'_4 - \frac{n-3}{n-1} S_n^4 \right),$$

wobei  $\hat{\mu}'_4$  das vierte zentrierte empirische Moment ist.

Im Allgemeinen sind jedoch keine Formeln von  $\text{Var} \hat{\theta}$  bekannt. Hier kommt nun die *Jackknife-Methode* zum Einsatz:

- Sei  $X_{[i]}$  die Stichprobe  $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Falls

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \varphi_n(X_1, \dots, X_n),$$

so bilden wir

$$\hat{\theta}_{[i]} = \varphi_{n-1}(X_{[i]}), \quad \bar{\theta}_{[\cdot]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{[i]}, \quad \widehat{\text{Var}}_{jn}(\hat{\theta}) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \hat{\theta}_{[i]} - \bar{\theta}_{[\cdot]} \right)^2.$$

#### Definition 3.4.9

Der Schätzer  $\bar{\theta}_{[\cdot]}$  bzw.  $\widehat{\text{Var}}_{jn}(\hat{\theta})$  heißt *Jackknife-Schätzer* für den Erwartungswert bzw. die Varianz des Schätzers  $\hat{\theta}$  von  $\theta$ .

#### Beispiel 3.4.5

Sei  $\theta = \mu$ ,  $\hat{\theta} = \hat{\mu} = \bar{X}_n$ , so gilt

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

womit folgt, dass

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{[i]} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} X_j = \frac{1}{n-1} \left( -X_i + \sum_{j=1}^n X_j \right) = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{1}{n-1} X_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \bar{\theta}_{[\cdot]} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{[i]} = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{n \cdot \bar{X}_n}{n-1} - \frac{\bar{X}_n}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} \bar{X}_n = \bar{X}_n. \end{aligned}$$

Daher ist ein *Jackknife-Schätzer* für  $\mu$  gleich  $\bar{X}_n$ .

Konstruieren wir nun einen *Jackknife-Schätzer der Varianz*:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}_{jn}(\hat{\theta}) &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{1}{n-1} X_i - \bar{X}_n \right)^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n-1} (\bar{X}_n - X_i) \right)^2 \\ &= \frac{n-1}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} S_n^2, \end{aligned}$$

wobei dies genau der Plug-in Schätzer der Varianz von  $\hat{\mu}$  ist.

- *Jackknife-Schätzer für die Verzerrung eines Schätzers*

Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$ . Der Bias von  $\hat{\theta}$  ist  $\mathbb{E}_\theta \hat{\theta} - \theta = \text{Bias}(\hat{\theta})$ .

**Definition 3.4.10**

Ein *Jackknife-Schätzer der Verzerrung (Bias)* von  $\hat{\theta}$  ist durch

$$\widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = (n-1)(\bar{\theta}_{[.]} - \hat{\theta})$$

gegeben.

An folgenden Beispielen wird klar, dass der oben beschriebene Vorgang zur Verringerung der Verzerrung beiträgt:

Der *Schätzer*

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\theta}_{[.]} \quad (3.4.6)$$

hat in der Regel einen *kleineren Bias* als  $\hat{\theta}$ . Dabei ist wiederum

$$\hat{\theta}_{[i]} = \varphi_{n-1}(X_{[i]}) \quad \text{und} \quad \bar{\theta}_{[.]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{[i]} \quad \text{mit} \quad \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \varphi_n(X_1, \dots, X_n).$$

**Beispiel 3.4.6**

- a) Ist  $\theta = \mathbb{E}X_i = \mu$ , so ist  $\hat{\theta} = \bar{X}_n$  ein unverzerrter Schätzer für  $\mu$ . Was ist der Bias-korrigierte Schätzer  $\tilde{\mu}$ ? (Dieser sollte schließlich nicht schlechter werden!)

Es gilt  $\bar{\theta}_{[.]} = \bar{X}_n$ , daher ist der Bias-Schätzer von Jackknife  $\widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = (n-1)(\bar{X}_n - \bar{X}_n) = 0$  und somit  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - 0 = \bar{X}_n$ . Wir haben also gesehen, dass die Jackknife-Methode die unverzerrten Schätzer (zumindest in diesem Beispiel) richtig behandelt, indem sie keinen zusätzlichen Bias einbaut.

- b)  $\theta = \sigma^2 = \text{Var}X_i$ ,  $\hat{\theta} = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$  ein verzerrter M-Schätzer der Varianz. Was ist  $\tilde{\theta}$  in diesem Fall?

**Übungsaufgabe 3.4.1**

Zeigen Sie, dass  $\tilde{\theta} = S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2$  ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz ist. Somit wird der Bias von  $\hat{\sigma}^2$  durch die Anwendung der Jackknife-Methode vollständig beseitigt.

*Beweisidee:* Zeigen Sie hierzu zunächst, dass

$$\widehat{\text{Bias}}_{jn}(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

**Bemerkung 3.4.5**

Die Beispiele 3.4.6 a), b), in denen sich der Jackknife-Schätzer analytisch bestimmen ließ, sind eher eine Ausnahme als die Regel. In den meisten Fällen erfolgt die Bias-Reduktion mit Hilfe der Monte-Carlo-Methoden auf Basis der Formel (3.4.6).

2. *Bootstrap-Schätzer:*

Die Bootstrap-Methode besteht in dem Erzeugen einer neuen Stichprobe  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ , die aus einer approximativen Verteilung  $\hat{F}$  der Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  gewonnen wird. Seien  $\mathbb{E}_*$  und  $\text{Var}_*$  die wahrscheinlichkeitstheoretischen Größen, die auf dem Verteilungsgesetz  $\mathbb{P}_*$  der neuen Stichprobe  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$  beruhen. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten,  $\hat{F}$  zu konstruieren:

- i)  $\hat{F}(x) = \hat{F}_n(x)$  die empirische Verteilungsfunktion von  $X_i$ , falls  $X_i$  unabhängig identisch verteilt sind.
- ii)  $\hat{F}$  ist ein parametrischer Schätzer von  $F$ , der parametrischen Verteilungsfunktion von  $X_i$ . Das heißt, falls  $X_i \sim F_\theta$ ,  $i = 1, \dots, n$  für ein  $\theta \in \Theta$  und  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$  ist, so setzen wir  $\hat{F} = F_{\hat{\theta}}$  (Plug-in Methode).

**Definition 3.4.11**

Ein *Bootstrap-Schätzer* für den *Erwartungswert* (bzw. *Bias* oder *Varianz*) von Schätzer  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ist gegeben durch

- a)  $\hat{\mathbb{E}}_{boot}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_* \hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*)$ .
- b)  $\widehat{\text{Bias}}_{boot}(\hat{\theta}) = \hat{\mathbb{E}}_{boot} \hat{\theta} - \hat{\theta}$ .
- c)  $\widehat{\text{Var}}_{boot}(\hat{\theta}) = \text{Var}_*(\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*))$ .

**Beispiel 3.4.7**

Sei  $\theta = \mu = \mathbb{E}X_i$  und  $\hat{F} = \hat{F}_n$  die empirische Verteilungsfunktion. Wie generiert man eine Stichprobe  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , wobei  $X_i^* \sim \hat{F}_n$ ?

$\hat{F}_n$  gewichtet jede Beobachtung  $x_i$  der ursprünglichen Stichprobe mit dem Gewicht  $1/n$ , deshalb genügt es, einen der Einträge  $(x_1, \dots, x_n)$  auszuwählen (mit Wahrscheinlichkeit  $1/n$ , Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“), um  $X_j^*$ ,  $j = 1, \dots, n$  zu generieren.

*Bootstrap-Schätzer* für den Erwartungswert von  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ :

$$\hat{\mathbb{E}}_{boot} \hat{\mu} = \mathbb{E}_* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \right) \stackrel{X_i^* \text{ u.i.v.}}{=} \frac{1}{n} \cdot n \mathbb{E}_*(X_1^*) = \int x d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n.$$

Somit folgt  $\widehat{\text{Bias}}_{boot} \hat{\mu} = 0$ .

$$\widehat{\text{Var}}_{boot}(\hat{\mu}) = \text{Var}_* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* \right) \stackrel{X_i^* \text{ u.i.v.}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \text{Var}_*(X_1^*) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n},$$

ein Plug-in Schätzer für  $\text{Var} \bar{X}_n = \sigma^2/n$ .

*Monte-Carlo-Methoden zur numerischen Berechnung von Bootstrap-Schätzern:*

Was kann man tun, wenn keine expliziten Formeln für z.B.  $\widehat{\text{Var}}_{Boot}(\hat{\theta})$  vorliegen (der Regelfall in der Statistik)?

Generiere  $M$  unabhängige Stichproben  $(X_{i1}^*, \dots, X_{in}^*)$ ,  $i = 1, \dots, M$  nach der Regel i) oder ii) mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation. Dann berechne

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}(X_{i1}^*, \dots, X_{in}^*), \quad i = 1, \dots, M \quad \text{und setze} \quad \hat{\mathbb{E}}_{boot} \hat{\theta} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\theta}_i.$$

Ähnlich gewinnt man approximative Bootstrap-Schätzer für Bias  $\hat{\theta}$  und Var  $\hat{\theta}$ :

$$\widehat{\text{Bias}}_{boot} \hat{\theta} \approx \hat{\mathbb{E}}_{boot} \hat{\theta} - \hat{\theta}, \quad \widehat{\text{Var}}_{boot} \hat{\theta} \approx \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\theta}_i - \hat{\mathbb{E}}_{boot} \hat{\theta})^2.$$

Mehr sogar, man kann die Verteilungsfunktion von  $X_{ij}^*$  durch die empirische Verteilungsfunktion bestimmen:

$$\hat{F}_{boot}(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}(X_{ij}^* \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ferner lassen sich mit Hilfe von oben genannten Methoden *Bootstrap-Konfidenzintervalle* für  $\hat{\theta}$  ableiten:

Dafür lassen sich Quantile  $\hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_1)$  und  $\hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_2)$  der Verteilung von  $\hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*)$  aus der Stichprobe  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$  empirisch bestimmen. Damit gilt

$$\mathbb{P} \left( \hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_1) \leq \hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_n^*) \leq \hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_2) \right) \approx 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \alpha,$$

wobei  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  klein ist. Beachte dabei, dass man hofft, dass  $X_i^*$  sehr ähnlich verteilt ist wie  $X_i$  und somit

$$\mathbb{P} \left( \hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_1) \leq \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \leq \hat{F}_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_2) \right) \approx 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \alpha$$

gilt.

## 3.5 Weitere Güteeigenschaften von Punktschätzern

### 3.5.1 Ungleichung von Cramér-Rao

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit Verteilungsfunktion  $F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$ . Falls  $\hat{\theta}$  erwartungstreu ist, dann misst man die Güte eines anderen erwartungstreuen Schätzers  $\tilde{\theta}$  von  $\theta$  am Wert seiner Varianz. Das bedeutet, falls  $\text{Var}_\theta \tilde{\theta} < \text{Var}_\theta \hat{\theta}$ , dann ist der Schätzer  $\tilde{\theta}$  besser. Wir werden uns nun mit der Frage befassen, ob immer wieder neue, bessere Schätzer  $\tilde{\theta}$  mit immer kleinerer Varianz konstruiert werden können. Die Antwort hierauf ist unter gewissen Voraussetzungen negativ. Die untere Schranke der Varianz  $\text{Var}_\theta \hat{\theta}$  hierzu liefert der Satz von Cramér-Rao.

Sei  $L(x, \theta)$  die Likelihood-Funktion von  $X_i$ , d.h.

$$L(x, \theta) = \begin{cases} \mathbb{P}_\theta(x), & \text{im diskreten Fall,} \\ f_\theta(x), & \text{im stetigen Fall} \end{cases}$$

und  $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n L(x_i, \theta)$  die Likelihood-Funktion von der gesamten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$ . Es gelten die Bedingungen 1) bis 5), die für die asymptotische Normalverteiltheit von ML-Schätzern auf Seite 57 gestellt wurden, wobei die Bedingung 5) für  $k = 1$  gilt.

**Satz 3.5.1 (Ungleichung von Cramér-Rao):**

Sei  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}^2(X_1, \dots, X_n) < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$ .
2. Für alle  $\theta \in \Theta$  existiert

$$\frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta) dx_1 \dots dx_n, & \text{im stetigen Fall,} \\ \sum_{x_1, \dots, x_n} \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta), & \text{im diskr. Fall.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{\left( \frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right)^2}{n \cdot I(\theta)}, \quad \theta \in \Theta,$$

wobei  $I(\theta)$  die Fisher-Information aus (3.4.1) ist.

**Beweis** Führen wir die Funktion

$$\varphi_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)$$

ein. In Bemerkung 3.4.3 haben wir bewiesen, dass

$$\mathbb{E}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad \text{Var}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) = n \cdot \mathbb{I}(\theta).$$

Wenden wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz auf  $\text{Cov}_\theta(\varphi_\theta(X_1, \dots, X_n), \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$  an:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\theta \left( \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n), \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) &= \mathbb{E}_\theta \left( \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) \cdot \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) - 0 \\ &\leq \sqrt{\text{Var}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n)} \sqrt{\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)} \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{\overbrace{\left( \mathbb{E}_\theta \left( \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n) \cdot \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) \right)^2}^{=:A}}{\text{Var}_\theta \varphi_\theta(X_1, \dots, X_n)} = \frac{A^2}{n \cdot I(\theta)}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$A = \frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n).$$

Wir zeigen die Aussage für den absolut stetigen Fall (im diskreten Fall sind die Integrale durch Summen zu ersetzen):

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x_1, \dots, x_n, \theta) \cdot \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \cdot L(x_1, \dots, x_n, \theta) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta) \cdot \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{Vor. 2)}}{=} \frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

### Folgerung 3.5.1

Falls  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist und die Voraussetzungen des Satzes 3.5.1 erfüllt sind, so gilt

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)}.$$

**Beweis** Wende die Ungleichung von Cramér-Rao an  $\hat{\theta}$  mit

$$\frac{d}{d\theta} \left( \mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right) = \frac{d}{d\theta} \theta = 1$$

an.

□

An folgenden Beispielen werden wir sehen, dass der Schätzer  $\bar{X}_n$  des Erwartungswertes  $\mu$  in der Klasse aller Schätzer für  $\mu$ , die die Voraussetzungen des Satzes 3.5.1 erfüllen, die kleinste Varianz besitzt. Somit ist  $\bar{X}_n$  der beste erwartungstreue Schätzer in dieser Klasse für mindestens zwei parametrische Familien von Verteilungen:

- Normalverteilung und
- Poisson-Verteilung.

### Beispiel 3.5.1

1.  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$  als Schätzer für  $\mu$ . Dabei ist  $\hat{\mu}$  erwartungstreu mit  $\text{Var} \hat{\mu} = \sigma^2/n$ . Zeigen wir, dass die Cramér-Rao-Schranke für die Varianz eines erwartungstreuen Schätzers  $\hat{\theta}$  für  $\mu$  ebenso gleich  $\sigma^2/n$  ist. Prüfen wir zunächst die Voraussetzungen des Satzes 3.5.1:

Zeigen wir, dass

$$0 = \frac{d}{d\mu} \int_{\mathbb{R}} L(x, \mu) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) dx \quad \text{mit} \quad L(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} :$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) = \frac{2(x - \mu)}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{x - \mu}{\sigma^2} \cdot L(x, \mu),$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) dx = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mu}{\sigma^2}\right) = 0.$$

Zeigen wir weiterhin die Gültigkeit der Bedingung 2) des Satzes 3.5.1:

$$\frac{d}{d\mu} \mathbb{E}\bar{X}_n = \frac{d}{d\mu}(\mu) = 1 \stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + \dots + x_n) \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Induktion bzgl.  $n$ :

- Induktionsanfang  $n = 1$ :

$$\int_{\mathbb{R}} x \frac{\partial}{\partial \mu} L(x, \mu) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x(x - \mu)}{\sigma^2} L(x, \mu) dx = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}_\mu X^2 - \mu^2) = \frac{\text{Var}_\mu X}{\sigma^2} = 1.$$

- Induktionshypothese: Für  $n$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + \dots + x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n = n.$$

- Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$ :

$$A = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (x_1 + \dots + x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial \mu} \underbrace{L(x_1, \dots, x_{n+1}, \mu)}_{=L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot L(x_{n+1}, \mu)} dx_1 \dots dx_{n+1} \stackrel{?}{=} n + 1.$$

Dabei gilt für  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (x_1 + \dots + x_n) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot L(x_{n+1}, \mu) + L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) \right) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} x_{n+1} \left( \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. L(x_{n+1}, \mu) + L(x_1, \dots, x_n, \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) \right) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \\ &= n \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1}}_{=1} + \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + \dots + x_n) \cdot L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n \cdot \\ &\quad \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} x_{n+1} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1} \cdot \\ &\quad \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n}_{=0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial \mu} L(x_{n+1}, \mu) dx_{n+1}}_{=\frac{d}{d\mu} \mathbb{E}_\mu X = \frac{d}{d\mu} \mu = 1} \cdot \\ &\quad \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} L(x_1, \dots, x_n, \mu) dx_1 \dots dx_n}_{=1} = n + 1. \end{aligned}$$

Nachdem alle Voraussetzungen erfüllt sind, berechnen wir die Schranke

$$\frac{1}{n \cdot I(\mu)} \quad \text{mit} \quad I(\mu) = \mathbb{E}_\mu \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(X, \mu) \right)^2.$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log L(x, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( -\log \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) = -\frac{2(x - \mu)}{2\sigma^2} \cdot (-1) = \frac{x - \mu}{\sigma^2},$$

woraus folgt, dass

$$I(\mu) = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}_\mu (X - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \cdot \text{Var}_\mu X = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2} \quad \implies \quad n \cdot I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Insgesamt gilt also

$$\text{Var}_\mu \hat{\theta} \geq \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n} = \text{Var}_\mu \bar{X}_n$$

für einen beliebigen erwartungstreuen Schätzer  $\hat{\theta}$  für  $\mu$ , der die Voraussetzungen des Satzes 3.5.1 erfüllt.

2. Das zweite Beispiel sei folgende  $\bar{A}$ ebungsaufgabe:

### Übungsaufgabe 3.5.1

Seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Zeigen Sie, dass die Schranke von Cramér-Rao

$$\frac{1}{n \cdot I(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} = \text{Var}_\lambda \bar{X}_n$$

ist. Dies bedeutet, dass auch hier  $\bar{X}_n$  der beste erwartungstreue Schätzer ist, der die Voraussetzungen des Satzes 3.5.1 erfüllt.

An Hand des nächsten Beispiels wollen wir zeigen, dass die Konstruktion von Schätzern mit einer Varianz, die kleiner als die Cramér-Rao-Schranke ist, möglich ist, falls die Voraussetzungen von Satz 3.5.1 nicht erfüllt sind.

### Beispiel 3.5.2

Seien  $X_i \sim U[0, \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Dann ist die Bedingung „ $\text{supp} f_\theta(x) = [0, \theta]$  unabhängig von  $\theta$ “ verletzt und auch eine weitere Bedingung:

$$0 \neq \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) dx = \int_0^\theta \left( \frac{1}{\theta} \right)' dx = -\frac{1}{\theta^2} \cdot \theta = -\frac{1}{\theta}.$$

Sei  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$ , so würde nach der Ungleichung von Cramér-Rao folgen, dass  $\text{Var}_\theta \hat{\theta} \geq (n \cdot I(\theta))^{-1}$ , wobei

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X, \theta) \right)^2 = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log \left( \frac{1}{\theta} \right) \right)^2 dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta dx \cdot \left( -\frac{1}{\theta} \right)^2 = \frac{1}{\theta^2}.$$

Damit hätten wir

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta} \geq \frac{\theta^2}{n}.$$

Betrachten wir

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}.$$

Zeigen wir, dass

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta \quad \text{und} \quad \text{Var}_\theta \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) < \frac{\theta^2}{n}.$$

Berechnen wir dazu  $\mathbb{E}_\theta X_{(n)}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$F_{X_{(n)}}(x) = F_{X_i}^n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{\theta^n}, & x \in [0, \theta], \\ 1, & x \geq \theta, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{I}(x \in [0, \theta]),$$

$$\mathbb{E}_\theta X_{(n)}^k = \int_0^\theta x^k \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+k-1} dx = \frac{n \cdot \theta^{n+k}}{\theta^n \cdot (n+k)} = \frac{n\theta^k}{n+k}.$$

Damit folgt

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \cdot \mathbb{E}_\theta X_{(n)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n\theta}{n+1} = \theta,$$

das heißt,  $\hat{\theta}$  ist erwartungstreu. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}_\theta \hat{\theta} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \text{Var}_\theta X_{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \cdot \theta^2 \\ &= \frac{\theta^2}{n(n+2)}(n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

und somit

$$\text{Var}_\theta \hat{\theta} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{n}.$$

# 4 Konfidenzintervalle

## 4.1 Einführung

Konfidenz- oder Vertrauensintervalle wurden bereits in Kapitel 3 exemplarisch behandelt (vgl. Folgerung 3.3.2 und Bemerkung 3.3.4). In diesem Kapitel werden wir eine formale Definition eines Konfidenzintervalles angeben, um Vertrauensintervalle in größerer Tiefe studieren zu können. Dabei werden sowohl *Ein-* als auch *Zweistichprobenprobleme* behandelt.

Rufen wir uns die Annahmen eines parametrischen Modells in Erinnerung: es sei eine Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $X_i \sim F_\theta$  gegeben, wobei  $F_\theta$  eine Verteilungsfunktion aus einer parametrischen Familie von Verteilungen  $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}$  ist.

Die Punktschätzer von  $\theta$  liefern jeweils einen Wert für den Parametervektor. Es wäre allerdings auch vorteilhaft, die Genauigkeit solcher Schätzansätze zu nennen, das heißt, einen Bereich anzugeben, in dem  $\theta$  mit hoher Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  liegt. Dabei heißt  $\alpha$  *Irrtumswahrscheinlichkeit*; übliche Werte für  $\alpha$  sind  $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ . Die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ , daß  $\theta$  für  $m = 1$  im vorgegebenen *Konfidenzintervall* liegt, heißt dann *Überdeckungswahrscheinlichkeit* oder *Konfidenzniveau* und soll dann entsprechend hoch ausfallen, z.B.  $0,99; 0,95; 0,9$ .

### Definition 4.1.1

Es sei  $1 - \alpha$  ein Konfidenzniveau und  $\underline{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\overline{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  zwei Stichprobenfunktionen mit der Eigenschaft

$$\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \overline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Falls

1.  $P_\theta \left( \theta \in \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \overline{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right] \right) \geq 1 - \alpha, \quad \theta \in \Theta$
2.  $\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta \left( \theta \in \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \overline{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right] \right) = 1 - \alpha$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \theta \in \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \overline{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right] \right) = 1 - \alpha, \quad \theta \in \Theta$

dann heißt  $I = \left[ \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \overline{\theta}(X_1, \dots, X_n) \right]$  ein

1. *Konfidenzintervall*
2. *minimales Konfidenzintervall*

### 3. asymptotisches Konfidenzintervall

zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ . Dabei heißt  $l_\theta(X_1, \dots, X_n) = \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  die Länge des Konfidenzintervalls. Es ist erwünscht, möglichst kleine Konfidenzintervalle (mit minimaler Länge) bei großem Konfidenzniveau für  $\theta$  zu konstruieren.

Wie bereits bei den Beispielen von Kapitel 3 ersichtlich ist, folgt die Konstruktion eines Konfidenzintervalls einem bestimmten Muster, das wir jetzt genauer studieren werden:

1. Finde eine Statistik  $T(X_1, \dots, X_n, \theta)$ , die
  - vom Parameter  $\theta$  abhängt und
  - eine bekannte (Prüf-) Verteilung  $F$  besitzt (möglicherweise asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$ ).
2. Bestimme die Quantile  $F^{-1}(\alpha_1)$  und  $F^{-1}(1 - \alpha_2)$  von der Verteilung  $F$  für Niveaus  $\alpha_1$  und  $1 - \alpha_2$ , sodaß  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .
3. Löse (falls möglich) die Ungleichung  $F^{-1}(\alpha_1) \leq T(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq F^{-1}(1 - \alpha_2)$  bzgl.  $\theta$  auf. Das entsprechende Ergebnis  $I = [T^{-1}(F^{-1}(\alpha_1)), T^{-1}(F^{-1}(1 - \alpha_2))]$  (im Falle einer monoton in  $\theta$  steigenden Statistik  $T$ ) ist ein Konfidenzintervall für  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_\theta(\theta \in I) &= \mathbb{P}_\theta\left(T_\theta^{-1}(F^{-1}(\alpha_1)) \leq \theta \leq T_\theta^{-1}(F^{-1}(1 - \alpha_2))\right) \\
 &= \mathbb{P}_\theta\left(F^{-1}(\alpha_1) \leq T_\theta(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq F^{-1}(1 - \alpha_2)\right) \\
 &= F(F^{-1}(1 - \alpha_2)) - F(F^{-1}(\alpha_1)) \\
 &= 1 - \alpha_2 - \alpha_1 \\
 &= 1 - \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta.
 \end{aligned}$$

Für asymptotische Konfidenzintervalle soll überall noch  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  geschrieben werden:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(\theta \in I) = \dots = 1 - \alpha$ . Hierbei ist  $T_\theta^{-1}$  die Inverse von  $T(X_1, \dots, X_n, \theta)$  bezüglich  $\theta$ . Grafisch kann dies auf Abb. 4.1 veranschaulicht werden.

#### Definition 4.1.2

1. Falls  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ , dann heißt das Konfidenzintervall  $I = [T^{-1}(F^{-1}(\frac{\alpha}{2})), T^{-1}(F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))]$  *symmetrisch*.
2. Falls  $\alpha_1 = 0$  (bzw.  $\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) = -\infty$ ), dann heißt das Konfidenzintervall  $(-\infty, \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)]$  *einseitig*. Das selbe gilt für  $\alpha_2 = 0$  (bzw.  $\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) = +\infty$ ) und das Vertrauensintervall  $[\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), +\infty)$ .

In der Zukunft werden wir oft, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, symmetrische Konfidenzintervalle konstruieren, obwohl man auch ein allgemeineres, nicht-symmetrisches Intervall leicht angeben kann.

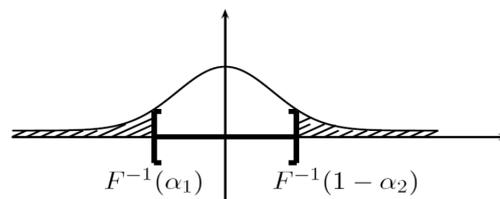


Abb. 4.1: asymptotisches Konfidenzintervall

**Bemerkung 4.1.1**

Man sieht leicht, daß der Algorithmus zur Konstruktion eines Vertrauensbereiches sich sehr dem eines statistischen Tests ähnelt. Im letzten Fall heißt  $T(X_1, \dots, X_n)$  *Teststatistik*. Im Allgemeinen kann man für jedes Konfidenzintervall einen entsprechenden statistischen Test angeben, aber nicht umgekehrt. In der Vorlesung Stochastik III werden wir einige Beispiele dieser Übertragung „Konfidenzintervall  $\mapsto$  Test“ sehen.

**4.2 Ein-Stichproben-Probleme**

In diesem Abschnitt werden wir einige Beispiele von Vertrauensbereichen für Parameter einiger bekannter Verteilungen nach dem oben genannten Schema konstruieren. Dabei werden wir immer mit einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  wie in Abschnitt 4.1 arbeiten.

**4.2.1 Normalverteilung**

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, identisch verteilt, mit  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

**Konfidenzintervalle für den Erwartungswert  $\mu$** 

- **bei bekannter Varianz  $\sigma^2$**  Wenn wir annehmen, daß  $\sigma^2$  bekannt ist, so ermöglicht uns der Satz 3.3.1, 4., ein exaktes Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha$  zu berechnen. Denn es gilt  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  und somit

$$T(X_1, \dots, X_n, \mu) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Es seien  $z_{\alpha_1}$  und  $z_{1-\alpha_2}$  Quantile der  $N(0, 1)$ -Verteilung,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  und  $1 - \alpha$  das vorgegebene Konfidenzniveau.

Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}(z_{\alpha_1} \leq T(X_1, \dots, X_n, \mu) \leq z_{1-\alpha_2}) \\ &= \mathbb{P}\left(z_{\alpha_1} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq z_{1-\alpha_2}\right) \\ &\stackrel{(-z_{\alpha_1} = z_{1-\alpha_1})}{=} \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{z_{1-\alpha_2}\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha_1}\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Somit ist  $[\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)]$  mit  $\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n - z_{1-\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  und  $\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n + z_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ein exaktes Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

Es hat die Länge  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{1-\alpha_2} + z_{1-\alpha_1})$ . Es gilt  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  was bedeutet, daß bei wachsendem Informationsumfang ( $n \rightarrow \infty$ ) die Präzision der Schätzung immer besser wird.

Im Symmetriefall ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ ) gilt  $\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ,  $\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  und  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$ .

Daraus folgt, daß man bei vorgegebener Länge  $\varepsilon > 0$  die Anzahl der Beobachtungen  $n$  bestimmen kann, die dann notwendig sind, um die vorgegebene Präzision zu erreichen:

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \varepsilon \iff n \geq \left(\frac{2\sigma z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \quad (4.2.1)$$

Für  $\alpha_1 = 0$  bzw.  $\alpha_2 = 0$  kann man einseitige Intervalle  $(-\infty, \bar{X}_n + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$  und  $[\bar{X}_n - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$  genauso angeben.

- **bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$ :** siehe Bemerkung 3.3.4.

Dort wurde das Konfidenzintervall  $[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} S_n, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} S_n]$  für  $\mu$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  konstruiert, wobei  $t_{n-1, 1-\alpha/2}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der  $t_{n-1}$ -Verteilung ist.

Wie man sieht, ist die Länge des Konfidenzintervalls zufällig:  $l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{2S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2}$ , somit macht es Sinn, mit erwarteter Länge

$$\mathbb{E} l_\mu(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{\sqrt{n}} \mathbb{E} S_n t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

zu arbeiten, um zum Beispiel die Frage nach der notwendigen Anzahl  $n$  von Beobachtungen bei vorgegebener Genauigkeit  $\varepsilon > 0$  (vergleiche Gleichung (4.2.1)) zu beantworten.

**Konfidenzintervalle für die Varianz  $\sigma^2$** 

- bei bekanntem Erwartungswert  $\mu$ :

Betrachten wir den Schätzer  $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  für  $\sigma^2$ . Aus Satz 3.3.5, 2. folgt  $\frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ . Wir setzen  $T(X_1, \dots, X_n, \sigma^2) = \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2}$  und bekommen

$$\mathbb{P}\left(\chi_{n,\alpha_2}^2 \leq \frac{n\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\alpha_1}^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,1-\alpha_1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,\alpha_2}^2}\right) = 1 - \alpha.$$

Somit ist  $\left[\frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,1-\alpha_1}^2}, \frac{n\tilde{S}_n^2}{\chi_{n,\alpha_2}^2}\right]$  ein Konfidenzintervall für  $\sigma^2$  zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  mit der mittleren Länge  $\mathbb{E}l_{\sigma^2} = n\sigma^2 \left(\frac{1}{\chi_{n,\alpha_2}^2} - \frac{1}{\chi_{n,1-\alpha_1}^2}\right)$ .

- bei unbekanntem Erwartungswert  $\mu$ :

Ähnlich wie oben beschrieben folgt das Konfidenzintervall  $\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1,1-\alpha_1}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1,\alpha_2}^2}\right]$  zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  aus Satz 3.3.5, 1., weil  $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$  für die Stichprobenvarianz  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ . Die erwartete Länge ist  $\mathbb{E}l_{\sigma^2} = (n-1)\sigma^2 \left(\frac{1}{\chi_{n-1,\alpha_2}^2} - \frac{1}{\chi_{n-1,1-\alpha_1}^2}\right)$ .

**4.2.2 Konfidenzintervalle aus stochastischen Ungleichungen**

Eine alternative Methode zur Gewinnung von Konfidenzintervallen besteht in der Anwendung stochastischer Ungleichungen. So kann man zum Beispiel bei einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}X_i = \mu$ ,  $\text{Var} X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$  die Ungleichung von Tschebyschew benutzen, um ein einfaches, aber grobes Konfidenzintervall für  $\mu$  zu konstruieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{Var} \bar{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \alpha \\ &\Rightarrow \text{für } \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \text{ gilt: } 1 - \alpha \leq \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \leq -\bar{X}_n + \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Das Konfidenzintervall  $\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right]$  für  $\mu$  bei bekannter Varianz  $\sigma^2$  ist verteilungsunabhängig, da keinerlei Annahmen über die Verteilung von  $X_i$  gemacht wurden.

Präzisere Konfidenzintervalle können bei der Verwendung folgender *Ungleichung von Hoeffding* konstruiert werden:

**Satz 4.2.1 (Ungleichung von Hoeffding):**

Es seien  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E} Y_i = 0$ ,  $a_i \leq Y_i \leq b_i$  fast sicher,  $i = 1, \dots, n$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \geq \varepsilon \right) \leq \exp \left( - \frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

(ohne Beweis).

Nehmen wir z.B. an, daß  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind,  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Wir wollen ein Konfidenzintervall für  $p$  bestimmen.

**Folgerung 4.2.1**

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli( $p$ )-verteilte Zufallsvariablen. Dann gilt  $\mathbb{P} \left( |\bar{X}_n - p| > \varepsilon \right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Beweis** Es gilt

$$\bar{X}_n - p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{(X_i - p)}_{Y_i}, \quad Y_i \in [-p, 1 - p],$$

das heißt  $a_i = -p$ ,  $b_i = 1 - p$ ,  $b_i - a_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathbb{E} Y_i = p - p = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p \left( |\bar{X}_n - p| > \varepsilon \right) &\leq \mathbb{P}_p \left( \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \geq \varepsilon n \right) \\ &= \mathbb{P}_p \left( \sum_{i=1}^n Y_i \geq \varepsilon n \right) + \mathbb{P}_p \left( \sum_{i=1}^n (-Y_i) \geq \varepsilon n \right) \\ &\stackrel{\text{(Satz 4.2.1)}}{\leq} 2e^{-\frac{2\varepsilon^2 n^2}{n}} = 2e^{-2\varepsilon^2 n}, \end{aligned}$$

wobei man den Satz 4.2.1 sowohl für die Folge  $\{Y_i\}$  als auch  $\{-Y_i\}$  anwendet. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.2.1**

Die Form der Ungleichung von Hoeffding ähnelt sehr der von Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz, Satz 3.3.10.

Nun fixieren wir  $\alpha > 0$  und wählen  $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}}$ . Durch Anwendung von Folgerung 4.2.1 mit diesem  $\varepsilon_n$  erhalten wir  $\mathbb{P}_p \left( |\bar{X}_n - p| > \varepsilon_n \right) \leq \alpha$ , somit  $\mathbb{P}_p \left( |\bar{X}_n - p| \leq \varepsilon_n \right) \geq 1 - \alpha$  und darum ist  $\left[ \bar{X}_n - \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}} \right]$  ein Konfidenzintervall für  $p$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

### 4.2.3 Asymptotische Konfidenzintervalle

Die Philosophie der Konstruktion von asymptotischen Konfidenzintervallen ist relativ einfach: Wir erläutern sie am Beispiel eines asymptotisch normalverteilten Schätzers  $\hat{\theta}$  für einen Parameter  $\theta$ .

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen,  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein Schätzer für  $\theta$ , der asymptotisch normalverteilt ist. Dann gilt für erwartungstreue  $\hat{\theta}_n$

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1),$$

wobei  $\hat{\sigma}_n$  ein konsistenter Schätzer der asymptotischen Varianz von  $\hat{\theta}_n$  ist.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta \left( z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\sigma}_n} \leq z_{1-\alpha/2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta \left( \theta \in \left[ \hat{\theta}_n - z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n, \hat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n \right] \right) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Somit ist  $\left[ \hat{\theta}_n - z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n, \hat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n \right]$  ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

Diese Vorgehensweise werden wir jetzt anhand von zwei Beispielen klar machen:

- **Bernoulli-Verteilung:**

Seien  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ -verteilt,  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt  $\theta = p$ ,  $\hat{\theta}_n = \hat{p}_n = \bar{X}_n$ .  $\mathbb{E}_p \hat{p}_n = p$ ,  $\text{Var}_p \hat{p}_n = \frac{p(1-p)}{n}$ . Wir wählen  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}(1 - \bar{X}_n)$  als Plug-In-Schätzer für  $\sigma^2$ . Dann gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz (Satz 7.2.1, WR) und dem Satz von Slutsky (Satz 6.4.2, 3. WR):

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1),$$

das heißt  $p \in \left[ \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right]$  stellt ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $p$  zum Niveau  $1 - \alpha$  dar. Da aber  $p \in [0, 1]$  sein soll, betrachtet man

$$\underline{p}(X_1, \dots, X_n) = \max \left\{ 0, \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right\}$$

und

$$\bar{p}(X_1, \dots, X_n) = \min \left\{ 1, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right\}.$$

**Bemerkung 4.2.2**

Ein anderes asymptotisches Konfidenzintervall für den Parameter  $p$  der Bernoulli-Verteilung bekommt man, wenn man die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left( -z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$  nimmt und die quadratische Ungleichung dann bezüglich  $p$  auflöst.

**Übungsaufgabe 4.2.1**

Lösen Sie die Ungleichung auf!

• **Poissonverteilung:**

Es seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann gilt  $\theta = \lambda$ ,  $\hat{\theta}_n = \hat{\lambda} = \bar{X}_n$ . Da  $\mathbb{E}_\lambda X_i = \text{Var}_\lambda X_i = \lambda$ , kann man den zentralen Grenzwertsatz (Satz 7.2.1, WR) anwenden

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1),$$

Da  $\bar{X}_n$  stark konsistent für  $\lambda$  ist, gilt nach dem Satz von Slutsky (Satz 6.4.2, 4, WR)

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1).$$

Daraus folgt ein asymptotisches Konfidenzintervall

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} \right]$$

für den Parameter  $\lambda$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ .

**Bemerkung 4.2.3** 1. Ähnlich wie in Bemerkung 4.2.2 angegeben, kann man durch Auflösen der quadratischen Ungleichung in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\lambda \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \in [-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] \right) = 1 - \alpha$$

bezüglich  $\lambda$  ein alternatives asymptotisches Konfidenzintervall für  $\lambda$  angeben.

**Übungsaufgabe 4.2.2**

Bitte führen Sie diese Berechnungen durch.

2. Da  $\lambda > 0$  ist, kann man die untere Schranke diesbezüglich korrigieren:

$$\lambda(X_1, \dots, X_n) = \max \left\{ 0, \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} \right\}$$

### 4.3 Zwei-Stichproben-Probleme

In diesem Abschnitt werden Charakteristiken bzw. Parameter von zwei unterschiedlichen Stichproben miteinander verglichen, indem man Konfidenzintervalle für einfache Funktionen dieser Parameter konstruiert.

Betrachten wir zwei Zufallsstichproben  $Y_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$ ,  $Y_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$  von Zufallsvariablen  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ ,  $i = 1, 2$ , die innerhalb der Stichprobe  $Y_i$  jeweils unabhängig und identisch verteilt sind,  $X_{ij} \stackrel{d}{=} X_i$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2$  und die Prototyp-Zufallsvariable  $X_i \sim F_{\theta_i}$ ,  $\theta_i \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Es wird im Allgemeinen nicht gefordert, daß  $Y_1$  und  $Y_2$  unabhängig sind. Falls sie voneinander abhängen, spricht man von *verbundenen Stichproben*  $Y_1$  und  $Y_2$ . Betrachten wir eine Funktion  $g : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$  von den Parametervektoren  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . In diesem Skript werden dabei meistens die Fälle  $m = 1, 2$ ,  $g(\theta_1, \theta_2) = \theta_{1j} - \theta_{2j}$ ,  $g(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_{1j}}{\theta_{2j}}$  untersucht, wobei  $\theta_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{im})$ ,  $i = 1, 2$ .

Unsere Zielstellung wird sein, ein (möglicherweise asymptotisches) Konfidenzintervall für  $g(\theta_1, \theta_2)$  mit Hilfe der Stichprobe  $(Y_1, Y_2)$  zu gewinnen.

Dabei wird die selbe Philosophie wie in Abschnitt 4.1 beschrieben verfolgt. Es wird eine Statistik  $T(Y_1, Y_2, g(\theta_1, \theta_2))$  gesucht, die eine (möglicherweise asymptotische) Prüfverteilung  $F$  besitzt und von  $g(\theta_1, \theta_2)$  explizit abhängt.

Durch das Auflösen der Ungleichung  $F_{\alpha_1}^{-1} \leq T(Y_1, Y_2, g(\theta_1, \theta_2)) \leq F_{1-\alpha_2}^{-1}$  bzgl.  $g(\theta_1, \theta_2)$  bekommt man dann ein (möglicherweise asymptotisches) Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

#### 4.3.1 Normalverteilte Stichproben

Hier wird angenommen, daß  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ .

#### Konfidenzintervall für die Differenz $\mu_1 - \mu_2$ bei bekannten Varianzen $\sigma_1^2$ und $\sigma_2^2$ und unabhängigen Stichproben

Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  voneinander unabhängig und  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  bekannt. Wir betrachten die Parameterfunktion  $g(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 - \mu_2$ . Es seien  $\bar{X}_{in_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ ,  $i = 1, 2$  die Stichprobenmittel der Stichproben  $Y_1$  und  $Y_2$ . Es gilt  $\bar{X}_{in_i} \sim N(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{n_i})$ ,  $i = 1, 2$ . Nach Satz 3.3.3, 4) sind  $\bar{X}_{1n_1}$  und  $\bar{X}_{2n_2}$  unabhängig. Dann ist wegen der Faltungsstabilität der Normalverteilung  $\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ . Nach dem Normieren erhält man die Statistik  $T(Y_1, Y_2, \mu_1 - \mu_2) = \frac{\bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ . Daraus bekommt man das

Konfidenzintervall

$$\left[ \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

für  $\mu_1 - \mu_2$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

### Konfidenzintervall für den Quotienten $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ bei unbekanntem Erwartungswerten $\mu_1$ und $\mu_2$ und unabhängigen Stichproben

Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  voneinander unabhängig. Sei  $g(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ . Wir konstruieren die Statistik  $T(Y_1, Y_2, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$  folgendermaßen: Seien  $S_{in_i}^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{in_i})^2$ ,  $i = 1, 2$  die Stichprobenvarianzen der Stichproben  $Y_1$  und  $Y_2$ . Dann gilt  $\frac{(n_i-1)S_{in_i}^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_{n_i-1}^2$ ,  $i = 1, 2$  nach Satz 3.3.5.

Da die  $S_{in_i}^2$  voneinander unabhängig sind, gilt

$$T \left( Y_1, Y_2, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{\frac{(n_2-1)S_{2n_2}^2}{(n_2-1)\sigma_2^2}}{\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^2}{(n_1-1)\sigma_1^2}} = \frac{S_{2n_2}^2}{S_{1n_1}^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{n_2-1, n_1-1}$$

nach der Definition der  $F$ -Verteilung. Daraus ergibt sich das Konfidenzintervall

$$\left[ \frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2} F_{n_2-1, n_1-1, \alpha}, \frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2} F_{n_2-1, n_1-1, 1-\alpha} \right]$$

für  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  zum Niveau  $1 - \alpha$ .

### Konfidenzintervall für die Differenz $\mu_1 - \mu_2$ der Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben

Dieses Mal seien  $Y_1$  und  $Y_2$  verbunden,  $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$  für ein unbekanntes  $\sigma^2 > 0$ ,  $n_1 = n_2 = n$ . Da  $X_{ij}, j = 1, \dots, n$  unabhängig und identisch verteilt sind, gilt  $Z_j = X_{1j} - X_{2j} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Unser Ziel ist es, ein Konfidenzintervall für  $\mu_1 - \mu_2$  zu bekommen. Wenn wir die Stichprobe  $(Z_1, \dots, Z_n)$  betrachten, und Ergebnisse des Abschnittes 4.2.1, 2. anwenden, so erhalten wir sofort folgendes Konfidenzintervall:

$$\left[ \bar{Z}_n - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{Z}_n + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$$

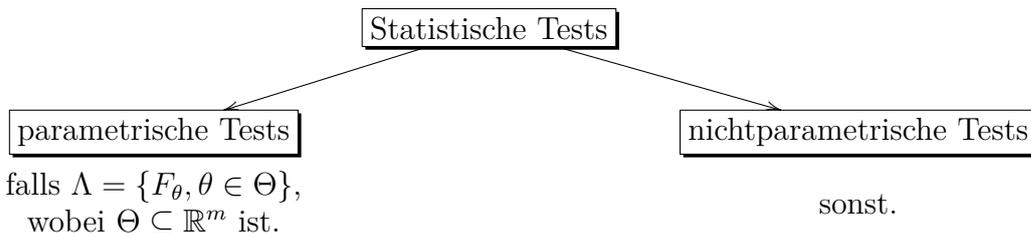
für  $\mu_1 - \mu_2$  zum Niveau  $1 - \frac{\alpha}{2}$ , wobei  $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_{1j} - X_{2j}) = \bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n}$ ,  
 $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Z_j - \bar{Z}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{1j} - X_{2j} - \bar{X}_{1n} + \bar{X}_{2n})^2$

## 5 Tests statistischer Hypothesen

In der Vorlesung Stochastik I haben wir schon Beispiele von statistischen Tests kennengelernt, wie etwa den Kolmogorow-Smirnow-Test (vergleiche Bemerkung 3.3.38, 3), Skript Stochastik I). Jetzt sollen statistische Signifikanztests formal eingeführt und ihre Eigenschaften untersucht werden.

### 5.1 Allgemeine Philosophie des Testens

Es sei eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  gegeben, mit Verteilungsfunktion  $F \in \Lambda$ , wobei  $\Lambda$  eine Klasse von Verteilungsfunktionen ist. Es sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Stichprobe, die als Realisierung von  $(X_1, \dots, X_n)$  interpretiert wird. In der Theorie des statistischen Testens werden Hypothesen über die Beschaffenheit der (unbekannten) Verteilungsfunktion  $F$  gestellt und geprüft. Dabei unterscheidet man



Bei parametrischen Tests prüft man, ob der Parameter  $\theta$  bestimmte Werte annimmt (zum Beispiel  $\theta = 0$ ). Bekannte Beispiele von nichtparametrischen Tests sind Anpassungstests, bei denen man prüft, ob die Verteilungsfunktion  $F$  gleich einer vorgegebenen Funktion  $F_0$  ist.

Formalisieren wir zunächst den Begriff *Hypothese*. Die Menge  $\Lambda$  von zulässigen Verteilungsfunktionen  $F$  wird in zwei disjunkte Teilmengen  $\Lambda_0$  und  $\Lambda_1$  zerlegt,  $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 = \Lambda$ . Die Aussage

„Man testet die *Haupthypothese*  $H_0 : F \in \Lambda_0$  gegen die *Alternative*  $H_1 : F \in \Lambda_1$ ,“

bedeutet, daß man an Hand der konkreten Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  versucht, eine Entscheidung zu fällen, ob die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $X_i$  zu  $\Lambda_0$  oder zu  $\Lambda_1$  gehört. Dies passiert auf Grund einer statistischen *Entscheidungsregel*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1],$$

die eine Statistik mit folgender Interpretation ist:

Der Stichprobenraum  $\mathbb{R}^n$  wird in drei disjunkte Bereiche  $K_0, K_{01}$  und  $K_1$  unterteilt, sodaß  $\mathbb{R}^n = K_0 \cup K_{01} \cup K_1$ , wobei

$$\begin{aligned} K_0 &= \varphi^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\}, \\ K_1 &= \varphi^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 1\}, \\ K_{01} &= \varphi^{-1}((0, 1)) &= \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \varphi(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Dementsprechend wird  $H_0 : F \in \Lambda_0$

- verworfen, falls  $\varphi(x) = 1$ , also  $x \in K_1$ ,
- nicht verworfen, falls  $\varphi(x) = 0$ , also  $x \in K_0$ ;
- falls  $\varphi(x) \in (0, 1)$ , also  $x \in K_{01}$ , wird  $\varphi(x)$  als Bernoulli-Wahrscheinlichkeit interpretiert, und es wird eine Zufallsvariable  $Y \sim \text{Bernoulli}(\varphi(x))$  generiert, für die gilt:

$$Y = \begin{cases} 1 & \implies H_0 \text{ wird verworfen} \\ 0 & \implies H_0 \text{ wird nicht verworfen} \end{cases}$$

Falls  $K_{01} \neq \emptyset$ , wird eine solche Entscheidungsregel *randomisiert* genannt. Bei  $K_{01} = \emptyset$ , also  $\mathbb{R}^n = K_0 \cup K_1$  spricht man dagegen von *nicht-randomisierten* Tests. Dabei heißt  $K_0$  bzw.  $K_1$  *Annahmehereich* bzw. *Ablehnungsbereich (kritischer Bereich)* von  $H_0$ .  $K_{01}$  heißt *Randomisierungsbereich*.

**Bemerkung 5.1.1.** 1. Man sagt absichtlich „ $H_0$  wird nicht verworfen“, statt „ $H_0$  wird akzeptiert“, weil die schließende Statistik generell keine positiven, sondern nur negative Entscheidungen treffen kann. Dies ist generell ein philosophisches Problem der Falsifizierbarkeit von Hypothesen oder wissenschaftlichen Theorien, von denen aber keiner behaupten kann, daß sie der Wahrheit entsprechen (vergleiche die wissenschaftliche Erkenntnistheorie von Karl Popper (1902-1994)).

2. Die randomisierten Tests sind hauptsächlich von theoretischem Interesse (vergleiche Abschnitt 2.3). In der Praxis werden meistens nichtrandomisierte Regeln verwendet, bei denen man aus der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  allein die Entscheidung über  $H_0$  treffen kann. Hier gilt  $\varphi(x) = \mathbb{I}_{K_1}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

In diesem und in folgendem Abschnitt betrachten wir ausschließlich nichtrandomisierte Tests, um in Abschnitt 2.3 zu der allgemeinen Situation zurückzukehren.

### Definition 5.1.1

Man sagt, daß die nicht-randomisierte Testregel  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$  einen (*nicht-randomisierten*) statistischen Test zum Signifikanzniveau  $\alpha$  angibt, falls für  $F \in \Lambda_0$  gilt

$$\mathbb{P}_F(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) = P(H_0 \text{ verwerfen} \mid H_0 \text{ richtig}) \leq \alpha.$$

**Definition 5.1.2** 1. Wenn man  $H_0$  verwirft, obwohl  $H_0$  richtig ist, begeht man den sogenannten *Fehler 1. Art*. Die Wahrscheinlichkeit

$$\alpha_n(F) = \mathbb{P}_F(\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1), \quad F \in \Lambda_0$$

heißt die *Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art* und soll unter dem Niveau  $\alpha$  bleiben.

2. Den *Fehler 2. Art* begeht man, wenn man die falsche Hypothese  $H_0$  nicht verwirft. Dabei ist

$$\beta_n(F) = \mathbb{P}_F(\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0), \quad F \in \Lambda_1$$

die *Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art*.

Eine Zusammenfassung aller Möglichkeiten wird in folgender Tabelle festgehalten:

	$H_0$ richtig	$H_0$ falsch
$H_0$ verwerfen	Fehler 1. Art, Wahrscheinlichkeit $\alpha_n(F) \leq \alpha$	richtige Entscheidung
$H_0$ nicht verwerfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art mit Wahrscheinlichkeit $\beta_n(F)$

Dabei sollen  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  möglichst klein sein, was gegenläufige Tendenzen darstellt, weil beim Kleinwerden von  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art notwendigerweise wächst.

**Definition 5.1.3** 1. Die Funktion

$$G_n(F) = \mathbb{P}_F(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1), \quad F \in \Lambda$$

heißt *Gütefunktion* eines Tests  $\varphi$ .

2. Die Einschränkung von  $G_n$  auf  $\Lambda_1$  heißt *Stärke, Schärfe* oder *Macht* (englisch *power*) des Tests  $\varphi$ .

Es gilt

$$\begin{cases} G_n(F) = \alpha_n(F) \leq \alpha, & F \in \Lambda_0 \\ G_n(F) = 1 - \beta_n(F), & F \in \Lambda_1 \end{cases}$$

### Beispiel 5.1.1

**Parametrische Tests.** Wie sieht ein parametrischer Test aus? Der Parameterraum  $\Theta$  wird als  $\Theta_0 \cup \Theta_1$  dargestellt, wobei  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ . Es gilt  $\Lambda_0 = \{F_\theta : \theta \in \Theta_0\}$ ,  $\Lambda_1 = \{F_\theta : \theta \in \Theta_1\}$ .  $P_F$  wird zu  $P_\theta$ ,  $\alpha_n$ ,  $G_n$  und  $\beta_n$  werden statt auf  $\Lambda$  auf  $\Theta$  definiert.

Welche Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  kommen oft bei parametrischen Tests vor? Zur Einfachheit betrachten wir den Spezialfall  $\Theta = \mathbb{R}$ .

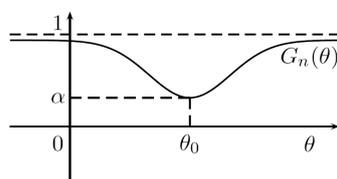
1.  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$

2.  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta < \theta_0$
3.  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$
4.  $H_0 : \theta \in [a, b]$  vs.  $H_1 : \theta \notin [a, b]$

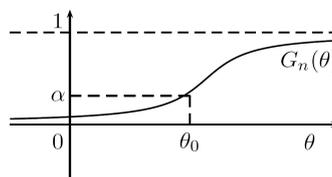
Im Fall (1) heißt der parametrische Test *zweiseitig*, in den Fällen (2) und (3) *einseitig* (*rechts-* bzw. *linksseitig*). In Fall (4) spricht man von der *Intervallhypothese*  $H_0$ .

Bei einem zweiseitigen bzw. einseitigen Test kann die Gütefunktion wie in Abbildung 5.1 (a) bzw. 5.1 (b) aussehen,

Abb. 5.1: Gütefunktion



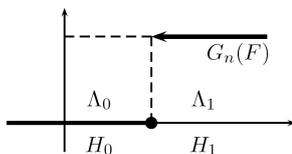
(a) eines zweiseitigen Tests



(b) eines einseitigen Tests

Bei einem allgemeinen (nicht notwendigerweise parametrischen) Modell kann man die ideale Gütefunktion wie in Abbildung 5.2 schematisch darstellen.

Abb. 5.2: Schematische Darstellung der idealen Gütefunktion



- Man sieht aus Definition 5.1.2, dem Fehler 1. und 2. Art und der Ablehnungsregel, daß die Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  nicht symmetrisch behandelt werden, denn nur die

Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art wird kontrolliert. Dies ist der Grund dafür, daß Statistiker die eigentlich interessierende Hypothese nicht als  $H_0$ , sondern als  $H_1$  formulieren, damit, wenn man sich für  $H_1$  entscheidet, man mit Sicherheit sagen kann, daß die Wahrscheinlichkeit der Fehlentscheidung unter dem Niveau  $\alpha$  liegt.

- Wie wird ein statistischer, nicht randomisierter Test praktisch konstruiert? Die Konstruktion der Ablehnungsregel  $\varphi$  ähnelt sich sehr der von Konfidenzintervallen:
  1. Finde eine Teststatistik  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die unter  $H_0$  eine (möglicherweise asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$ ) bestimmte Prüfverteilung hat.
  2. Definiere  $B_0 = [t_{\alpha_1}, t_{1-\alpha_2}]$ , wobei  $t_{\alpha_1}$  und  $t_{1-\alpha_2}$  Quantile der Prüfverteilung von  $T$  sind,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in [0, 1]$ .
  3. Falls  $T(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R} \setminus B_0 = B_1$ , setze  $\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1$ .  $H_0$  wird verworfen. Ansonsten setze  $\varphi(X_1, \dots, X_n) = 0$ .
- Falls die Verteilung von  $T$  nur asymptotisch bestimmt werden kann, so heißt  $\varphi$  *asymptotischer Test*.
- Sehr oft aber ist auch die asymptotische Verteilung von  $T$  nicht bekannt. Dann verwendet man sogenannte *Monte-Carlo Tests*, in denen dann Quantile  $t_\alpha$  näherungsweise aus sehr vielen Monte-Carlo-Simulationen von  $T$  (unter  $H_0$ ) bestimmt werden: Falls  $t^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  die Werte von  $T$  in  $m$  unabhängigen Simulationsvorgängen sind, das heißt  $t^i = T(x_1^i, \dots, x_n^i)$ ,  $x_j^i$  sind unabhängige Realisierungen von  $X_j \sim F \in \Lambda_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, m$  dann bildet man ihre Ordnungsstatistiken  $t^{(1)}, \dots, t^{(m)}$  und setzt  $t_\alpha \approx t^{(\lfloor \alpha \cdot m \rfloor)}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , wobei  $t^{(0)} = -\infty$ .

**Bemerkung 5.1.2.** Man sieht deutlich, daß aus einem beliebigen Konfidenzintervall

$$I_\theta = \left[ I_1^\theta(X_1, \dots, X_n), I_2^\theta(X_1, \dots, X_n) \right]$$

zum Niveau  $1 - \alpha$  für einen Parameter  $\theta \in \mathbb{R}$  ein Test für  $\theta$  konstruierbar ist. Die Hypothese  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  wird mit folgender Entscheidungsregel getestet:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } \theta_0 \notin \left[ I_1^{\theta_0}(X_1, \dots, X_n), I_2^{\theta_0}(X_1, \dots, X_n) \right].$$

Das Signifikanzniveau des Tests ist  $\alpha$ .

### Beispiel 5.1.2

Normalverteilung, Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz. Es seien

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

mit bekannter Varianz  $\sigma^2$ . Ein Konfidenzintervall für  $\mu$  ist

$$I^\mu = \left[ I_1^\mu(X_1, \dots, X_n), I_2^\mu(X_1, \dots, X_n) \right] = \left[ \bar{X}_n - \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

(vergleiche Stochastik I, 4.2.1)  $H_0$  wird verworfen, falls  $|\mu_0 - \bar{X}_n| > \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ . In der Testsprache bedeutet es, dass

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{I}((x_1, \dots, x_n) \in K_1),$$

wobei

$$K_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mu_0 - \bar{x}_n| > \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right\}$$

der Ablehnungsbereich ist. Für die Teststatistik  $T(X_1, \dots, X_n)$  gilt:

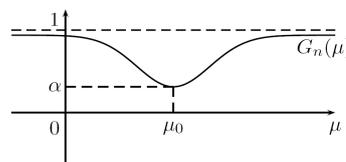
$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1) \mid \text{unter } H_0,$$

$$\alpha_n(\mu) = \alpha.$$

Berechnen wir nun die Gütefunktion (vergleiche Abbildung 5.3).

$$\begin{aligned} G_n(\mu) &= \mathbb{P}_\mu \left( |\mu_0 - \bar{X}_n| > \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \mathbb{P}_\mu \left( \left| \bar{X}_n - \mu_0 \right| \leq \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_\mu \left( \left| \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_\mu \left( -z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \\ &= 1 - \Phi \left( z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) + \Phi \left( -z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \\ &= \Phi \left( -z_{1-\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) + \Phi \left( -z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right). \end{aligned}$$

Abb. 5.3: Gütefunktion für den zweiseitigen Test des Erwartungswertes einer Normalverteilung bei bekannter Varianz



Die „Ja-Nein“-Entscheidung des Testens wird oft als zu grob empfunden. Deswegen versucht man, ein feineres Maß der Verträglichkeit der Daten mit den Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  zu bestimmen. Dies ist der sogenannte  $p$ -Wert, der von den meisten Statistik-Softwarepaketen ausgegeben wird.

**Definition 5.1.4**

Es sei  $(x_1, \dots, x_n)$  die konkrete Stichprobe von Daten, die als Realisierung von  $(X_1, \dots, X_n)$  interpretiert wird und  $T(X_1, \dots, X_n)$  die Teststatistik, mit deren Hilfe die Entscheidungsregel  $\varphi$  konstruiert wurde. Der  $p$ -Wert des statistischen Tests  $\varphi$  ist das kleinste Signifikanzniveau, zu dem der Wert  $t = T(x_1, \dots, x_n)$  zur Verwerfung der Hypothese  $H_0$  führt.

Im Beispiel eines einseitigen Tests mit  $H_0 : \theta = \theta_0$  mit dem Ablehnungsbereich  $B_1 = (t, \infty)$  sagt man grob, daß

$$p = \text{„}\mathbb{P}(T(X_1, \dots, X_n) \geq t \mid H_0)\text{“},$$

wobei die Anführungszeichen bedeuten, daß dies keine klassische, sondern eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist, die später präzise angegeben wird.

Bei der Verwendung des  $p$ -Wertes verändert sich die Ablehnungsregel: die Hypothese  $H_0 : \theta = \theta_0$  wird zum Signifikanzniveau  $\alpha$  abgelehnt, falls  $\alpha \geq p$ . Früher hat man die Signifikanz der Testentscheidung (Ablehnung von  $H_0$ ) an Hand folgender Tabelle festgesetzt:

$p$ -Wert	Interpretation
$p \leq 0,001$	sehr stark signifikant
$0,001 < p \leq 0,01$	stark signifikant
$0,01 < p \leq 0,05$	schwach signifikant
$0,05 < p$	nicht signifikant

Da aber heute der  $p$ -Wert an sich verwendet werden kann, kann der Anwender der Tests bei vorgegebenem  $p$ -Wert selbst entscheiden, zu welchem Niveau er seine Tests durchführen will.

**Bemerkung 5.1.3.** 1. Das Signifikanzniveau darf nicht in Abhängigkeit von  $p$  festgelegt werden. Dies würde die allgemeine Testphilosophie zerstören!

2. Der  $p$ -Wert ist keine Wahrscheinlichkeit, sondern eine Zufallsvariable, denn er hängt von  $(X_1, \dots, X_n)$  ab. Der Ausdruck  $p = \mathbb{P}(T(X_1, \dots, X_n) \geq t \mid H_0)$ , der in Definition 5.1.4 für den  $p$ -Wert eines einseitigen Tests mit Teststatistik  $T$  gegeben wurde, soll demnach als Überschreitungswahrscheinlichkeit interpretiert werden, daß bei Wiederholung des Zufallsexperiments unter  $H_0 : \theta = \theta_0$  der Wert  $t = T(x_1, \dots, x_n)$  oder extremere Werte in Richtung der Hypothese  $H_1$  betrachtet werden:

$$p = \mathbb{P}(T(X'_1, \dots, X'_n) \geq T(x_1, \dots, x_n) \mid H_0),$$

wobei  $(X'_1, \dots, X'_n) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_n)$ . Falls wir von einer konkreten Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$  zur Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  übergehen, erhalten wir

$$p = p(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}(T(X'_1, \dots, X'_n) \geq T(X_1, \dots, X_n) \mid H_0)$$

3. Für andere Hypothesen  $H_1$  wird der  $p$ -Wert auch eine andere Form haben. Zum Beispiel für

a) einen symmetrischen zweiseitigen Test ist

$$B_0 = [-t_{1-\alpha/2}, t_{1-\alpha/2}]$$

der Akzeptanzbereich für  $H_0$ .

$$\Rightarrow p = P(|T(X'_1, \dots, X'_n)| \geq t | H_0), t = |T(X_1, \dots, X_n)|$$

b) einen rechtsseitigen Test mit  $B_0 = [t_\alpha, \infty]$  gilt

$$p = P(T(X'_1, \dots, X'_n) \leq t | H_0), t = T(X_1, \dots, X_n)$$

c) Das Verhalten des  $p$ -Wertes kann folgendermaßen untersucht werden:

**Lemma 5.1.1**

Falls die Verteilungsfunktion  $F$  von  $X_i$  stetig und streng monoton steigend ist (die Verteilung von  $T$  ist absolut stetig mit zum Beispiel stetiger Dichte), dann ist  $p \sim U[0, 1]$ .

**Beweis** Wir zeigen es am speziellen Beispiel des rechtsseitigen Tests.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(p \leq \alpha | H_0) &= \mathbb{P}(\overline{F}_T(T(X_1, \dots, X_n)) \leq \alpha | H_0) \\ &= \mathbb{P}(F_T(T(X_1, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha | H_0) \\ &= \mathbb{P}(U \geq 1 - \alpha) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0, 1], \end{aligned}$$

da  $F_T(T(X_1, \dots, X_n)) \stackrel{d}{=} U \sim U[0, 1]$  und  $F_T$  absolut stetig ist.  $\square$

**Übung 5.1.1.** Zeigen Sie, daß für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  mit absolut stetiger Verteilung und streng monoton steigender Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt:

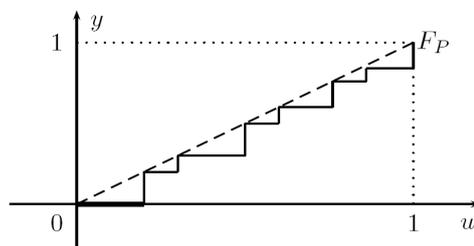
$$F_X(X) \sim U[0, 1]$$

Falls die Verteilung von  $T$  diskret ist, mit dem Wertebereich  $\{t_1, \dots, t_n\}$ ,  $t_i < t_j$  für  $i < j$ , so ist auch die Verteilung von  $p$  diskret, somit gilt nicht  $p \sim U[0, 1]$ . In diesem Fall ist  $F_T(x)$  eine Treppenfunktion, die die Gerade  $y = u$  in den Punkten  $u = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(T(X_1, \dots, X_n) = t_i)$ ,  $k = 1, \dots, n$  berührt (vgl. Abbildung 5.4).

**Definition 5.1.5** 1. Falls die Macht  $G_n(\cdot)$  eines Tests  $\varphi$  zum Niveau  $\alpha$  die Ungleichung

$$G_n(F) \geq \alpha, \quad F \in \Lambda_1$$

erfüllt, dann heißt der Test *unverfälscht*.

Abb. 5.4: Verteilung von  $p$  für diskrete  $T$ 

2. Es seien  $\varphi$  und  $\varphi^*$  zwei Tests zum Niveau  $\alpha$  mit Gütefunktionen  $G_n(\cdot)$  und  $G_n^*(\cdot)$ . Man sagt, daß der Test  $\varphi$  *besser* als  $\varphi^*$  ist, falls er eine größere Macht besitzt:

$$G_n(F) \geq G_n^*(F) \quad \forall F \in \Lambda_1$$

3. Der Test  $\varphi$  heißt konsistent, falls  $G_n(F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  für alle  $F \in \Lambda_1$ .

**Bemerkung 5.1.4.** 1. Die einseitigen Tests haben oft eine größere Macht als ihre zweiseitigen Versionen.

### Beispiel 5.1.3

Betrachten wir zum Beispiel den Gauß-Test des Erwartungswertes der Normalverteilung bei bekannter Varianz. Beim zweiseitigen Test

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

erhalten wir die Gütefunktion

$$G_n(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} + \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} - \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right).$$

Beim einseitigen Test  $\varphi^*$  der Hypothesen

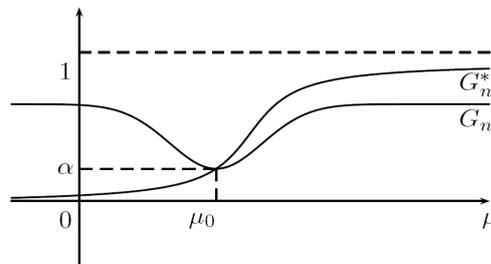
$$H_0^* : \mu \leq \mu_0 \text{ vs. } H_1^* : \mu > \mu_0$$

ist seine Gütefunktion gleich

$$G_n^*(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right)$$

Beide Tests sind offensichtlich konsistent, denn  $G_n(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,  $G_n^*(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Dabei ist  $\varphi^*$  besser als  $\varphi$ . Beide Tests sind unverfälscht (vergleiche Abbildung 5.5).

Abb. 5.5: Gütefunktionen eines ein- bzw. zweiseitigen Tests der Erwartungswertes einer Normalverteilung



2. Beim Testen einer Intervallhypothese  $H_0 : \theta \in [a, b]$  vs.  $H_1 : \theta \notin [a, b]$  zum Niveau  $\alpha$  kann man wie folgt vorgehen: Teste

a)  $H_0^a : \theta \geq a$  vs.  $H_1^a : \theta < a$  zum Niveau  $\alpha/2$ .

b)  $H_0^b : \theta \leq b$  vs.  $H_1^b : \theta > b$  zum Niveau  $\alpha/2$ .

$H_0$  wird nicht abgelehnt, falls  $H_0^a$  und  $H_0^b$  nicht abgelehnt werden. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art ist hier  $\leq \alpha$ . Die Macht dieses Tests ist im Allgemeinen schlecht.

3. Je mehr Parameter für den Aufbau der Teststatistik  $T$  geschätzt werden müssen, desto kleiner wird in der Regel die Macht.

## 5.2 Nichtrandomisierte Tests

### 5.2.1 Parametrische Signifikanztests

In diesem Abschnitt geben wir Beispiele einiger Tests, die meistens aus den entsprechenden Konfidenzintervallen für die Parameter von Verteilungen entstehen. Deshalb werden wir sie nur kurz behandeln.

1. Tests für die Parameter der Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$

a) Test von  $\mu$  bei unbekannter Varianz

- Hypothesen:  $H_0 : \mu = \mu_0$  vs.  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .

- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \sim t_{n-1} \quad | H_0$$

- Entscheidungsregel:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } |T(X_1, \dots, X_n)| > t_{n-1, 1-\alpha/2}.$$

b) **Test von  $\sigma^2$  bei unbekanntem  $\mu$**

- Hypothesen:  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  vs.  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .
- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad | H_0,$$

$$\text{wobei } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- Entscheidungsregel:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1, \text{ falls } T(X_1, \dots, X_n) \notin [\chi_{n-1, \alpha/2}^2, \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2].$$

**Übung 5.2.1.** *i. Finden Sie  $G_n(\cdot)$  für die einseitige Version der obigen Tests.*

*ii. Zeigen Sie, daß diese einseitigen Tests unverfälscht sind, die zweiseitigen aber nicht.*

## 2. Asymptotische Tests

Bei asymptotischen Tests ist die Verteilung der Teststatistik nur näherungsweise (für große  $n$ ) bekannt. Ebenso asymptotisch wird das Konfidenzniveau  $\alpha$  erreicht. Ihre Konstruktion basiert meistens auf Verwendung der Grenzwertsätze.

Die allgemeine Vorgehensweise wird im sogenannten *Wald-Test* (genannt nach dem Statistiker Abraham Wald (1902-1980)) fixiert:

- Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe,  $X_i$  seien unabhängig und identisch verteilt für  $i = 1, \dots, n$ , mit  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ .
- Wir testen  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Es sei  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ein erwartungstreuer, asymptotisch normalverteilter Schätzer für  $\theta$ .

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1) \quad | H_0,$$

wobei  $\hat{\sigma}_n^2$  ein konsistenter Schätzer für die Varianz von  $\hat{\theta}_n$  sei.

Die Teststatistik ist

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta_0}{\hat{\sigma}_n}.$$

- Die Entscheidungsregel lautet:  $H_0$  wird abgelehnt, wenn  $|T(X_1, \dots, X_n)| > z_{1-\alpha/2}$ , wobei  $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ . Diese Entscheidungsregel soll nur bei großen  $n$  verwendet werden. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art ist asymptotisch gleich  $\alpha$ , denn  $\mathbb{P}(|T(X_1, \dots, X_n)| > z_{1-\alpha/2} \mid H_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$  wegen der asymptotischen Normalverteilung von  $T$ .

Die Gütefunktion des Tests ist asymptotisch gleich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\theta) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha/2} + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma}\right),$$

wobei  $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \sigma^2$ .

Spezialfälle des Wald-Tests sind asymptotische Tests der Erwartungswerte bei einer Poisson- oder Bernoulliverteilten Stichprobe.

### Beispiel 5.2.1 a) Bernoulliverteilung

Es seien  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

- Hypothesen:  $H_0 : p = p_0$  vs.  $H_1 : p \neq p_0$ .
- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}, & \text{falls } \bar{X}_n \neq 0, 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$ .

### b) Poissonverteilung

Es seien  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

- Hypothesen:  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$
- Teststatistik:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda_0}{\sqrt{\bar{X}_n}}, & \text{falls } \bar{X}_n > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, 1)$

## 5.3 Randomisierte Tests

In diesem Abschnitt werden wir klassische Ergebnisse von Neyman-Pearson über die besten Tests präsentieren. Dabei werden randomisierte Tests eine wichtige Rolle spielen.

### 5.3.1 Grundlagen

Gegeben sei eine Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit konkreter Ausprägung  $(x_1, \dots, x_n)$ . Sei unser Stichprobenraum  $(B, \mathcal{B})$  entweder  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$  oder  $(\mathbb{N}_0^n, \mathcal{B}_{\mathbb{N}_0^n})$ , je nachdem, ob die Stichprobenvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  absolut stetig oder diskret verteilt sind.

Hier wird zur Einfachheit im Falle einer diskret verteilten Zufallsvariable  $X_i$  ihr diskreter Wertebereich mit  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  gleichgesetzt. Der Wertebereich sei mit einem Maß  $\mu$  versehen, wobei

$$\mu = \begin{cases} \text{Lebesgue-Maß auf } \mathbb{R}, & \text{falls } X_i \text{ als stetig verteilt} \\ \text{Zählmaß auf } \mathbb{N}_0, & \text{falls } X_i \text{ diskret verteilt.} \end{cases}$$

Dementsprechend gilt

$$\int g(x)\mu(dx) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g(x)dx, & \text{im absolut stetigen Fall,} \\ \sum_{x \in \mathbb{N}_0} g(x), & \text{im diskreten Fall.} \end{cases}$$

Es sei zusätzlich  $X_i \sim F_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, n$  (parametrisches Modell). Für  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ ,  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$  formulieren wir die Hypothesen  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , die mit Hilfe eines randomisierten Tests

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_1, \\ \gamma \in (0, 1), & x \in K_{01} \\ 0, & x \in K_0 \end{cases} \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

getestet werden.

Im Falle  $x \in K_{01}$  wird mit Hilfe einer Zufallsvariable  $Y \sim \text{Bernoulli}(\varphi(x))$  entschieden, ob  $H_0$  verworfen wird ( $Y = 1$ ) oder nicht ( $Y = 0$ ).

**Definition 5.3.1** 1. Die *Gütefunktion* eines randomisierten Tests  $\varphi$  sei

$$G_n(\theta) = G_n(\varphi, \theta) = \mathbb{E}_\theta \varphi(X_1, \dots, X_n), \theta \in \Theta.$$

2. Der Test  $\varphi$  hat das *Signifikanzniveau*  $\alpha \in [0, 1]$ , falls  $G_n(\varphi, \theta) \leq \alpha$ ,  $\forall \theta \in \Theta_0$  ist. Die Zahl

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} G_n(\varphi, \theta)$$

wird *Umfang* des Tests  $\varphi$  genannt. Offensichtlich ist der Umfang eines Niveau- $\alpha$ -Tests kleiner gleich  $\alpha$ .

3. Sei  $\Psi(\alpha)$  die Menge aller Tests zum Niveau  $\alpha$ . Der Test  $\varphi_1 \in \Psi(\alpha)$  ist (*gleichmäßig*) *besser* als Test  $\varphi_2 \in \Psi(\alpha)$ , falls  $G_n(\varphi_1, \theta) \geq G_n(\varphi_2, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta_1$ , also falls  $\varphi_1$  eine größere Macht besitzt.

4. Ein Test  $\varphi^* \in \Psi(\alpha)$  ist (gleichmäßig) bester Test in  $\Psi(\alpha)$ , falls

$$G_n(\varphi^*, \theta) \geq G_n(\varphi, \theta), \text{ für alle Tests } \varphi \in \Psi(\alpha), \theta \in \Theta_1.$$

**Bemerkung 5.3.1.** 1. Definition 5.3.1 1) ist eine offensichtliche Verallgemeinerung der Definition 5.1.3 der Gütefunktion eines nicht-randomisierten Tests  $\varphi$ . Nämlich, für  $\varphi(x) = \mathbb{I}(x \in K_1)$  gilt:

$$\begin{aligned} G_n(\varphi, \theta) &= \mathbb{E}_\theta \varphi(X_1, \dots, X_n) \\ &= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in K_1) \\ &= \mathbb{P}_\theta(H_0 \text{ ablehnen}), \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

2. Ein bester Test  $\varphi^*$  in  $\Psi(\alpha)$  existiert nicht immer, sondern nur unter gewissen Voraussetzungen an  $\mathbb{P}_\theta, \Theta_0, \Theta_1$  und  $\Psi(\alpha)$ .

### 5.3.2 Neyman-Pearson-Tests bei einfachen Hypothesen

In diesem Abschnitt betrachten wir einfache Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (5.3.1)$$

wobei  $\theta_0, \theta_1 \in \Theta, \theta_1 \neq \theta_0$ .

Dementsprechend sind  $\Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}$ . Wir setzen voraus, daß  $F_{\theta_i}$  eine Dichte  $g_i(x)$  bezüglich  $\mu$  besitzt,  $i = 0, 1$ . Führen wir einige abkürzende Bezeichnungen  $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_{\theta_0}, \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_{\theta_1}, \mathbb{E}_0 = \mathbb{E}_{\theta_0}, \mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_{\theta_1}$  ein. Sei  $f_i(x) = \prod_{j=1}^n g_i(x_j), x = (x_1, \dots, x_n), i = 0, 1$  die Dichte der Stichprobe unter  $H_0$  bzw.  $H_1$ .

#### Definition 5.3.2

Ein *Neyman-Pearson-Test* (NP-Test) der einfachen Hypothesen in (5.3.1) ist gegeben durch die Regel

$$\varphi(x) = \varphi_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x) > K f_0(x), \\ \gamma, & \text{falls } f_1(x) = K f_0(x), \\ 0, & \text{falls } f_1(x) < K f_0(x) \end{cases} \quad (5.3.2)$$

für Konstanten  $K > 0$  und  $\gamma \in [0, 1]$ .

**Bemerkung 5.3.2.** 1. Manchmal werden  $K = K(x)$  und  $\gamma = \gamma(x)$  als Funktionen von  $x$  und nicht als Konstanten betrachtet.

2. Der Ablehnungsbereich des Neyman-Pearson-Tests  $\varphi_K$  ist

$$K_1 = \{x \in B : f_1(x) > K f_0(x)\}.$$

3. Der Umfang des Neyman-Pearson-Tests  $\varphi_K$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) &= \mathbb{P}_0(f_1(X_1, \dots, X_n) > K f_0(X_1, \dots, X_n)) \\ &\quad + \gamma \mathbb{P}_0(f_1(X_1, \dots, X_n) = K f_0(X_1, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

4. Die Definition 5.3.2 kann man äquivalent folgendermaßen geben: Wir definieren eine Teststatistik

$$T(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_0(x)}, & x \in B : f_0(x) > 0, \\ \infty, & x \in B : f_0(x) = 0. \end{cases}$$

Dann wird der neue Test

$$\tilde{\varphi}_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > K, \\ \gamma, & \text{falls } T(x) = K, \\ 0, & \text{falls } T(x) < K \end{cases}$$

eingeführt, der für  $P_0$ - und  $P_1$ -fast alle  $x \in B$  äquivalent zu  $\varphi_K$  ist. In der Tat gilt  $\varphi_K(x) = \tilde{\varphi}_K(x) \forall x \in B \setminus C$ , wobei  $C = \{x \in B : f_0(x) = f_1(x) = 0\}$  das  $\mathbb{P}_0$ - bzw.  $\mathbb{P}_1$ -Maß Null besitzt.

In der neuen Formulierung ist der Umfang von  $\varphi$  bzw.  $\tilde{\varphi}_K$  gleich

$$\mathbb{E}_0 \tilde{\varphi}_K = \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) + \gamma \cdot \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) = K).$$

### Satz 5.3.1

#### Optimalitätssatz

Es sei  $\varphi_K$  ein Neyman-Pearson-Test für ein  $K > 0$  und  $\gamma \in [0, 1]$ . Dann ist  $\varphi_K$  der beste Test zum Niveau  $\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi_K$  seines Umfangs.

**Beweis** Sei  $\varphi \in \Psi(\alpha)$ , also  $\mathbb{E}_0(\varphi(X_1, \dots, X_n)) \leq \alpha$ . Um zu zeigen, daß  $\varphi_K$  besser als  $\varphi$  ist, genügt es bei einfachen Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  zu zeigen, daß  $\mathbb{E}_1 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) \geq \mathbb{E}_1 \varphi(X_1, \dots, X_n)$ . Wir führen dazu die folgenden Mengen ein:

$$\begin{aligned} M^+ &= \{x \in B : \varphi_K(x) > \varphi(x)\} \\ M^- &= \{x \in B : \varphi_K(x) < \varphi(x)\} \\ M^= &= \{x \in B : \varphi_K(x) = \varphi(x)\} \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich  $x \in M^+ \Rightarrow \varphi_K(x) > 0 \Rightarrow f_1(x) \geq K f_0(x)$ ,

$$x \in M^- \Rightarrow \varphi_K(x) < 1 \Rightarrow f_1(x) \leq K f_0(x) \text{ und } B = M^+ \cup M^- \cup M^=.$$

Als Folgerung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1(\varphi_K(X_1, \dots, X_n) - \varphi(X_1, \dots, X_n)) &= \int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\
&= \left( \int_{M^+} + \int_{M^-} + \int_{M^=} \right) (\varphi_K(x) - \varphi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\
&\geq \int_{M^+} (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K f_0(x) \mu(dx) \\
&\quad + \int_{M^-} (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K f_0(x) \mu(dx) \\
&= \int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K f_0(x) \mu(dx) \\
&= K [\mathbb{E}_0 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) - \mathbb{E}_0 \varphi(X_1, \dots, X_n)] \\
&\geq K(\alpha - \alpha) = 0,
\end{aligned}$$

weil beide Tests das Niveau  $\alpha$  haben. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 5.3.3.** 1. Da im Beweis  $\gamma$  nicht vorkommt, wird derselbe Beweis im Falle von  $\gamma(x) \neq \text{const}$  gelten.

2. Aus dem Beweis folgt die Gültigkeit der Ungleichung

$$\int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) (f_1(x) - K f_0(x)) \mu(dx) \geq 0$$

im Falle des konstanten  $K$ , bzw.

$$\mathbb{E}_1(\varphi_K(X_1, \dots, X_n) - \varphi(X_1, \dots, X_n)) \geq \int_B (\varphi_K(x) - \varphi(x)) K(x) f_0(x) \mu(dx)$$

im allgemeinen Fall.

### Satz 5.3.2

#### (Fundamentallemma von Neyman-Pearson)

1. Zu einem beliebigen  $\alpha \in (0, 1)$  gibt es einen Neyman-Pearson-Test  $\varphi_K$  mit Umfang  $\alpha$ , der dann nach Satz 5.3.1 der beste Niveau- $\alpha$ -Test ist.
2. Ist  $\varphi$  ebenfalls bester Test zum Niveau  $\alpha$ , so gilt  $\varphi(x) = \varphi_K(x)$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in K_0 \cup K_1 = \{x \in B : f_1(x) \neq K f_0(x)\}$  und  $\varphi_K$  aus Teil 1).

**Beweis** 1. Für  $\varphi_K(x)$  gilt

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in K_1 = \{x : f_1(x) > K \cdot f_0(x)\}, \\ \gamma, & \text{falls } x \in K_{01} = \{x : f_1(x) = K \cdot f_0(x)\}, \\ 0, & \text{falls } x \in K_0 = \{x : f_1(x) < K \cdot f_0(x)\}. \end{cases}$$

Der Umfang von  $\varphi_K$  ist

$$\mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) + \gamma \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) = K) = \alpha, \quad (5.3.3)$$

wobei

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{f_0(x_1, \dots, x_n)}, & \text{falls } f_0(x_1, \dots, x_n) > 0, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun suchen wir ein  $K > 0$  und ein  $\gamma \in [0, 1]$ , sodaß Gleichung (5.3.3) stimmt. Es sei  $\tilde{F}_0(x) = \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  die Verteilungsfunktion von  $T$ . Da  $T \geq 0$  ist, gilt  $\tilde{F}_0(x) = 0$ , falls  $x < 0$ . Außerdem ist  $\mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) < \infty) = 1$ , das heißt  $\tilde{F}_0^{-1}(\alpha) \in [0, \infty)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Die Gleichung (5.3.3) kann dann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$1 - \tilde{F}_0(K) + \gamma (\tilde{F}_0(K) - \tilde{F}_0(K-)) = \alpha, \quad (5.3.4)$$

wobei  $\tilde{F}_0(K-) = \lim_{x \rightarrow K-0} \tilde{F}_0(x)$ .

Sei  $K = \tilde{F}_0^{-1}(1 - \alpha)$ , dann gilt:

- a) Falls  $K$  ein Stetigkeitspunkt von  $\tilde{F}_0$  ist, ist Gleichung (5.3.4) erfüllt für alle  $\gamma \in [0, 1]$ , zum Beispiel  $\gamma = 0$ .
- b) Falls  $K$  kein Stetigkeitspunkt von  $\tilde{F}_0$  ist, dann ist  $\tilde{F}_0(K) - \tilde{F}_0(K-) > 0$ , woraus folgt

$$\gamma = \frac{\alpha - 1 + \tilde{F}_0(K)}{\tilde{F}_0(K) - \tilde{F}_0(K-)}$$

$\Rightarrow$  es gibt einen Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha$ .

2. Wir definieren  $M^\neq = \{x \in B : \varphi(x) \neq \varphi_K(x)\}$ . Es muss gezeigt werden, daß

$$\mu((K_0 \cup K_1) \cap M^\neq) = 0.$$

Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 \varphi(X_1, \dots, X_n) - \mathbb{E}_1 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) &= 0 && (\varphi \text{ und } \varphi_K \text{ sind beste Tests}) \\ \mathbb{E}_0 \varphi(X_1, \dots, X_n) - \mathbb{E}_0 \varphi_K(X_1, \dots, X_n) &\leq 0 && (\varphi \text{ und } \varphi_K \text{ sind } \alpha\text{-Tests} \\ &&& \text{mit Umfang von } \varphi_K = \alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_B (\varphi - \varphi_K) \cdot (f_1 - K \cdot f_0) \mu(dx) \geq 0.$$

In Bemerkung 5.3.3 wurde bewiesen, daß

$$\begin{aligned} \int_B (\varphi - \varphi_K)(f_1 - K \cdot f_0) d\mu &\leq 0 \\ \Rightarrow \int_B (\varphi - \varphi_K)(f_1 - K \cdot f_0) d\mu &= 0 = \int_{M^\# \cap (K_0 \cup K_1)} (\varphi - \varphi_K)(f_1 - K f_0) d\mu. \end{aligned}$$

Es gilt  $\mu(M^\# \cap (K_0 \cup K_1)) = 0$ , falls der Integrand  $(\varphi_K - \varphi)(f_1 - K f_0) > 0$  auf  $M^\#$  ist. Wir zeigen, daß

$$(\varphi_K - \varphi)(f_1 - K f_0) > 0 \text{ für } x \in M^\# \quad (5.3.5)$$

ist. Es gilt

$$\begin{aligned} f_1 - K f_0 > 0 &\Rightarrow \varphi_K - \varphi > 0, \\ f_1 - K f_0 < 0 &\Rightarrow \varphi_K - \varphi < 0, \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} f_1(x) > K f_0(x) &\Rightarrow \varphi_K(x) = 1 \\ &\text{und mit } \varphi(x) < 1 \Rightarrow \varphi_K(x) - \varphi(x) > 0 \text{ auf } M^\#. \\ f_1(x) < K f_0(x) &\Rightarrow \varphi_K(x) = 0 \\ &\text{und mit } \varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi_K(x) - \varphi(x) < 0 \text{ auf } M^\#. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gültigkeit der Ungleichung (5.3.5) und somit

$$\mu\left((K_0 \cup K_1) \cap M^\#\right) = 0.$$

□

**Bemerkung 5.3.4.** Falls  $\varphi$  und  $\varphi_K$  beste  $\alpha$ -Neyman-Pearson-Tests sind, dann sind sie  $P_0$ - bzw.  $P_1$ -fast sicher gleich.

**Beispiel 5.3.1 (Neyman-Pearson-Test für den Parameter der Poissonverteilung):**

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe mit  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , wobei  $X_i$  unabhängig und identisch verteilt sind für  $i = 1, \dots, n$ . Wir testen die Hypothesen  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1 : \lambda = \lambda_1$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} g_i(x) &= e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad i = 0, 1, \\ f_i(x) &= f_i(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n g_i(x_j) = \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x_j}}{x_j!} = e^{-n\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i^{\sum_{j=1}^n x_j}}{(x_1! \cdots x_n!)} \end{aligned}$$

für  $i = 0, 1$ . Die Neyman-Pearson-Teststatistik ist

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot (\lambda_1 / \lambda_0)^{\sum_{j=1}^n x_j}, & \text{falls } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Neyman-Pearson-Entscheidungsregel lautet

$$\varphi_K(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x_1, \dots, x_n) > K, \\ \gamma, & \text{falls } T(x_1, \dots, x_n) = K, \\ 0, & \text{falls } T(x_1, \dots, x_n) < K. \end{cases}$$

Wir wählen  $K > 0$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , sodaß  $\varphi_K$  den Umfang  $\alpha$  hat. Dazu lösen wir

$$\alpha = \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) + \gamma \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) = K)$$

bezüglich  $\gamma$  und  $K$  auf.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) > K) &= \mathbb{P}_0(\log T(X_1, \dots, X_n) > \log K) \\ &= \mathbb{P}_0\left(-n(\lambda_1 - \lambda_0) + \sum_{j=1}^n X_j \cdot \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > \log K\right) = \mathbb{P}_0\left(\sum_{j=1}^n X_j > A\right) \end{aligned}$$

$$\text{wobei } A := \left\lceil \frac{\log K + n \cdot (\lambda_1 - \lambda_0)}{\log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right\rceil,$$

falls zum Beispiel  $\lambda_1 > \lambda_0$ . Im Falle  $\lambda_1 < \lambda_0$  ändert sich das  $>$  auf  $<$  in der Wahrscheinlichkeit.

Wegen der Faltungsstabilität der Poissonverteilung ist unter  $H_0$

$$\sum_{j=1}^n X_j \sim \text{Poisson}(n\lambda_0),$$

also wählen wir  $K$  als minimale, nichtnegative Zahl, für die gilt:  $\mathbb{P}_0\left(\sum_{j=1}^n X_j > A\right) \leq \alpha$ , und setzen

$$\gamma = \frac{\alpha - \mathbb{P}_0(\sum_{j=1}^n X_j > A)}{\mathbb{P}_0(\sum_{j=1}^n X_j = A)},$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0\left(\sum_{j=1}^n X_j > A\right) &= 1 - \sum_{j=0}^A e^{-\lambda_0 n} \frac{(\lambda_0 n)^j}{j!}, \\ \mathbb{P}_0\left(\sum_{j=1}^n X_j = A\right) &= e^{-\lambda_0 n} \frac{(\lambda_0 n)^A}{A!}. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Parameter  $K$  und  $\gamma$  gefunden und damit einen Neyman-Pearson-Test  $\varphi_K$  konstruiert.

### 5.3.3 Einseitige Neyman-Pearson-Tests

Bisher betrachteten wir Neyman-Pearson-Tests für einfache Hypothesen der Form  $H_i : \theta = \theta_i$ ,  $i = 0, 1$ . In diesem Abschnitt wollen wir einseitige Neyman-Pearson-Tests einführen, für Hypothesen der Form  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$ .

Zunächst konstruieren wir einen Test für diese Hypothesen: Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe,  $X_i$  seien unabhängig und identisch verteilt mit

$$X_i \sim F_\theta \in \Lambda = \{F_\theta : \theta \in \Theta\},$$

wobei  $\Theta \subset \mathbb{R}$  offen ist und  $\Lambda$  eindeutig parametrisiert, das heißt

$$\theta \neq \theta' \Rightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}.$$

Ferner besitze  $F_\theta$  eine Dichte  $g_\theta$  bezüglich des Lebesgue-Maßes (bzw. Zählmaßes) auf  $\mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{N}_0$ ). Dann ist

$$f_\theta(x) = \prod_{j=1}^n g_\theta(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

eine Dichte von  $(X_1, \dots, X_n)$  bezüglich  $\mu$  auf  $B$ .

#### Definition 5.3.3

Eine Verteilung auf  $B$  mit Dichte  $f_\theta$  gehört zur Klasse von *Verteilungen mit monotonen Dichtekoeffizienten* in  $T$ , falls es für alle  $\theta < \theta'$  eine Funktion  $h : \mathbb{R} \times \Theta^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ , die monoton wachsend in  $t \in \mathbb{R}$  ist und eine Statistik  $T : B \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, mit der Eigenschaft

$$\frac{f_{\theta'}(x)}{f_\theta(x)} = h(T(x), \theta, \theta'),$$

wobei

$$h(T(x), \theta, \theta') = \infty \quad \text{für alle } x \in B : f_\theta(x) = 0, f_{\theta'}(x) > 0.$$

Der Fall  $f_\theta(x) = f_{\theta'}(x) = 0$  tritt mit  $\mathbb{P}_\theta$ - bzw.  $\mathbb{P}_{\theta'}$ -Wahrscheinlichkeit 0 auf.

#### Definition 5.3.4

Es sei  $Q_\theta$  eine Verteilung auf  $(B, \mathcal{B})$  mit der Dichte  $f_\theta$  bzgl.  $\mu$ .  $Q_\theta$  gehört zur *einparametrischen Exponentialklasse* ( $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  offen), falls die Dichte folgende Form hat:

$$f_\theta(x) = \exp \{c(\theta) \cdot T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in B,$$

wobei  $c(\theta)$  eine monoton steigende Funktion ist, und  $\text{Var}_\theta T(X_1, \dots, X_n) > 0$ ,  $\theta \in \Theta$ .

#### Lemma 5.3.1

Verteilungen aus der einparametrischen Exponentialfamilie besitzen einen monotonen Dichtekoeffizienten.

**Beweis** Es sei  $Q_\theta$  aus der einparametrischen Exponentialfamilie mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \exp \{c(\theta) \cdot T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x).$$

Für  $\theta < \theta'$  ist dann

$$\frac{f_{\theta'}(x)}{f_\theta(x)} = \exp \{(c(\theta') - c(\theta)) \cdot T(x) + a(\theta') - a(\theta)\}$$

monoton bezüglich  $T$ , weil  $c(\theta') - c(\theta) > 0$  wegen der Monotonie von  $c(\theta)$ . Also besitzt  $f_\theta$  einen monotonen Dichtekoeffizienten.  $\square$

### Beispiel 5.3.2 1. Normalverteilte Stichprobenvariablen

Es seien  $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, mit unbekanntem Parameter  $\mu$  und bekannter Varianz  $\sigma_0^2$  (Hier wird  $\mu$  für die Bezeichnung des Erwartungswertes von  $X_i$  und nicht des Maßes auf  $\mathbb{R}^n$  verwendet. (wie früher)). Die Dichte des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ist gleich

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &= \prod_{i=1}^n g_\mu(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + \mu^2 n \right) \right\} \\ &= \exp \left( \underbrace{\frac{\mu}{\sigma_0^2}}_{c(\mu)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{T(x)} - \underbrace{\frac{\mu^2 n}{2\sigma_0^2}}_{a(\mu)} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} \exp \left( -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma_0^2} \right)}_{l(x)}. \end{aligned}$$

Also gehört  $N(\mu, \sigma_0^2)$  zur einparametrischen Exponentialklasse mit  $c(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_0^2}$  und  $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ .

### 2. Binomialverteilte Stichprobenvariablen

Es seien  $X_i \sim \text{Bin}(k, p)$  unabhängig und identisch verteilt,  $i = 1, \dots, n$ . Der Parameter  $p$  sei unbekannt. Die Zähldichte des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$

ist

$$\begin{aligned}
 f_p(x) &= \mathbb{P}_p(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) \\
 &= \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \frac{(1-p)^{nk}}{(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} \\
 &= \exp \left\{ \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}_{T(x)} \cdot \underbrace{\log \left( \frac{p}{1-p} \right)}_{c(p)} + \underbrace{nk \cdot \log(1-p)}_{a(p)} \right\} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i}}_{l(x)},
 \end{aligned}$$

also gehört  $\text{Bin}(n, p)$  zur einparametrischen Exponentialklasse mit

$$c(p) = \log \left( \frac{p}{1-p} \right)$$

und

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

**Lemma 5.3.2**

Falls  $\varphi_K$  der Neyman-Pearson-Test der Hypothesen  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta = \theta_1$  ist, dann gilt:

$$\mu(\underbrace{\{x \in B : f_1(x) \neq K f_0(x)\}}_{K_0 \cup K_1}) > 0.$$

**Beweis** Wegen  $\theta_0 \neq \theta_1$  und der eindeutigen Parametrisierung gilt  $f_0 \neq f_1$  auf einer Menge mit  $\mu$ -Maß  $> 0$ .

Nun sei  $\mu(K_0 \cup K_1) = 0$ . Daraus folgt, daß  $f_1(x) = K \cdot f_0(x)$   $\mu$ -fast sicher. Das heißt

$$1 = \int_B f_1(x) dx = K \cdot \int_B f_0(x) dx,$$

woraus folgt, daß  $K = 1$  und  $f_1(x) = f_0(x)$   $\mu$ -fast sicher, was aber ein Widerspruch zur eindeutigen Parametrisierung ist.  $\square$

Im Folgenden sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $X_i \sim$  Dichte  $g_\theta$ ,  $i = 1, \dots, n$  und

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Dichte } f_\theta(x) = \prod_{i=1}^n g_\theta(x_i)$$

aus der Klasse der Verteilungen mit monotonen Dichtekoeffizienten und einer Statistik  $T(X_1, \dots, X_n)$ .

Wir betrachten die Hypothesen  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$  und den Neyman-Pearson-Test:

$$\varphi_{K^*}^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > K^*, \\ \gamma^*, & \text{falls } T(x) = K^*, \\ 0, & \text{falls } T(x) < K^* \end{cases} \quad (5.3.6)$$

für  $K^* \in \mathbb{R}$  und  $\gamma^* \in [0, 1]$ . Die Gütefunktion von  $\varphi_{K^*}^*$  bei  $\theta_0$  ist

$$G_n(\theta_0) = \mathbb{E}_0 \varphi_{K^*}^* = \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) > K^*) + \gamma^* \cdot \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) = K^*)$$

**Satz 5.3.3** 1. Falls  $\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi_{K^*}^* > 0$ , dann ist der soeben definierte Neyman-Pearson-Test ein bester Test der einseitigen Hypothesen  $H_0$  vs.  $H_1$  zum Niveau  $\alpha$ .

2. Zu jedem Konfidenzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  gibt es ein  $K^* \in \mathbb{R}$  und  $\gamma^* \in [0, 1]$ , sodaß  $\varphi_{K^*}^*$  ein bester Test zum Umfang  $\alpha$  ist.
3. Die Gütefunktion  $G_n(\theta)$  von  $\varphi_{K^*}^*(\theta)$  ist monoton wachsend in  $\theta$ . Falls  $0 < G_n(\theta) < 1$ , dann ist sie sogar streng monoton wachsend.

**Beweis** 1. Wähle  $\theta_1 > \theta_0$  und betrachte die einfachen Hypothesen  $H'_0 : \theta = \theta_0$  und  $H'_1 : \theta = \theta_1$ . Sei

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} 1, & f_1(x) > K f_0(x), \\ \gamma, & f_1(x) = K f_0(x), \\ 0, & f_1(x) < K f_0(x) \end{cases}$$

der Neyman-Pearson-Test für  $H'_0, H'_1$  mit  $K > 0$ . Da  $f_\theta$  den monotonen Dichtekoeffizienten mit Statistik  $T$  besitzt,

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = h(T(x), \theta_0, \theta_1),$$

existiert ein  $K > 0$ , so dass

$$\left\{ x : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > K \right\} \subset \left\{ T(x) > K^* \right\} \quad \text{mit } K = h(K^*, \theta_0, \theta_1).$$

$\varphi_K$  ist ein bester Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi_K = \mathbb{E}_0 \varphi_{K^*}^*$ . Aus  $\alpha > 0$  folgt  $K < \infty$ , denn aus  $K = \infty$  würde folgen

$$\begin{aligned} 0 < \alpha = \mathbb{E}_0 \varphi_K &\leq \mathbb{P}_0 \left( \frac{f_1(X_1, \dots, X_n)}{f_0(X_1, \dots, X_n)} \geq K^* \right) \leq \mathbb{P}_0 \left( \frac{f_1(X_1, \dots, X_n)}{f_0(X_1, \dots, X_n)} = \infty \right) \\ &= \mathbb{P}_0(f_1(X_1, \dots, X_n) > 0, f_0(X_1, \dots, X_n) = 0) \\ &= \int_B \mathbb{I}(f_1(x) > 0, f_0(x) = 0) \cdot f_0(x) \mu(dx) = 0. \end{aligned}$$

Für den Test  $\varphi_{K^*}^*$  aus (5.3.6) gilt dann

$$\varphi_{K^*}^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x)/f_0(x) > K, \\ \gamma^*(x), & \text{falls } f_1(x)/f_0(x) = K, \\ 0, & \text{falls } f_1(x)/f_0(x) < K, \end{cases}$$

wobei  $\gamma^*(x) \in \{\gamma^*, 0, 1\}$ . Daraus folgt, daß  $\varphi_{K^*}^*$  ein bester Neyman-Pearson-Test ist für  $H_0'$  vs.  $H_1'$  (vergleiche Bemerkung 5.3.2, 1.) und Bemerkung 5.3.3) für beliebige  $\theta_1 > \theta_0$ . Deshalb ist  $\varphi_{K^*}^*$  ein bester Neyman-Pearson-Test für  $H_0'' : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1'' : \theta > \theta_0$  ist.

Die selbe Behauptung erhalten wir aus dem Teil 3. des Satzes für  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$ , weil dann  $G_n(\theta) \leq G_n(\theta_0) = \alpha$  für alle  $\theta < \theta_0$ .

2. Siehe Beweis zu Satz 5.3.2, 1.).
3. Wir müssen zeigen, daß  $G_n(\theta)$  monoton ist. Dazu wählen wir  $\theta_1 < \theta_2$  und zeigen, daß  $\alpha_1 = G_n(\theta_1) \leq G_n(\theta_2)$ . Wir betrachten die neuen, einfachen Hypothesen  $H_0'' : \theta = \theta_1$  vs.  $H_1'' : \theta = \theta_2$ . Der Test  $\varphi_{K^*}^*$  kann genauso wie in 1. als Neyman-Pearson-Test dargestellt werden (für die Hypothesen  $H_0''$  und  $H_1''$ ), der ein bester Test zum Niveau  $\alpha_1$  ist. Betrachten wir einen weiteren konstanten Test  $\varphi(x) = \alpha_1$ . Dann ist  $\alpha_1 = \mathbb{E}_{\theta_2} \varphi \leq \mathbb{E}_{\theta_2} \varphi_{K^*}^* = G_n(\theta_2)$ . Daraus folgt, daß  $G_n(\theta_1) \leq G_n(\theta_2)$ .  
Nun zeigen wir, daß für  $G_n(\theta) \in (0, 1)$  gilt:  $G_n(\theta_1) < G_n(\theta_2)$ . Wir nehmen an, daß  $\alpha_1 = G_n(\theta_1) = G_n(\theta_2)$  und  $\theta_1 < \theta_2$  für  $\alpha \in (0, 1)$ . Es folgt, daß  $\varphi(x) = \alpha_1$  auch ein bester Test für  $H_0''$  und  $H_1''$  ist. Aus Satz 5.3.2, 2.) folgt

$$\mu(\underbrace{\{x \in B : \varphi(x) \neq \varphi_{K^*}^*(x)\}}_{=\alpha_1}) = 0 \text{ auf } K_0 \cup K_1 = \{f_1(x) \neq K f_0(x)\},$$

was ein Widerspruch zur Bauart des Tests  $\varphi_{K^*}^*$  ist, der auf  $K_0 \cup K_1$  nicht gleich  $\alpha_1 \in (0, 1)$  sein kann. □

**Bemerkung 5.3.5.** 1. Der Satz 5.3.3 ist genauso auf Neyman-Pearson-Tests der einseitigen Hypothesen

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta < \theta_0$$

anwendbar, mit dem entsprechenden Unterschied

$$\theta \mapsto -\theta$$

$$T \mapsto -T$$

Somit existiert der beste  $\alpha$ -Test auch in diesem Fall.

2. Man kann zeigen, daß die Gütefunktion  $G_n(\varphi_{K^*}^*, \theta)$  des besten Neyman-Pearson-Tests auf  $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0)$  folgende Minimalitätseigenschaft besitzt:

$$G_n(\varphi_{K^*}^*, \theta) \leq G_n(\varphi, \theta) \quad \forall \varphi \in \Psi(\alpha), \theta \leq \theta_0$$

**Beispiel 5.3.3**

Wir betrachten eine normalverteilte Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$ , wobei  $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$  und  $\sigma_0^2$  sei bekannt. Es werden die Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu > \mu_0,$$

getestet. Aus Beispiel 5.1.2 kennen wir die Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0},$$

wobei unter  $H_0$  gilt:  $T(X_1, \dots, X_n) \sim N(0, 1)$ .  $H_0$  wird verworfen, falls

$$T(X_1, \dots, X_n) > z_{1-\alpha}, \quad \text{wobei } \alpha \in (0, 1).$$

Wir zeigen jetzt, daß dieser Test der beste Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha$  ist. Aus Beispiel 5.3.2 ist bekannt, daß die Dichte  $f_n$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  aus der einparametrischen Exponentialklasse ist, mit

$$\tilde{T}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Dann gehört  $f_\mu$  von  $(x_1, \dots, x_n)$  zur einparametrischen Exponentialklasse auch bezüglich der Statistik

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0}$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &= \exp \left( \underbrace{\frac{\mu}{\sigma_0^2}}_{\tilde{c}(\mu)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{\tilde{T}} - \underbrace{\frac{\mu^2 n}{2\sigma_0^2}}_{\tilde{a}(\mu)} \right) \cdot l(x) \\ &= \exp \left( \underbrace{\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma_0}}_{c(\mu)} \cdot \underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma_0}}_T + \underbrace{\frac{\mu^2 n}{2\sigma_0^2}}_{a(\mu)} \right) \cdot l(x). \end{aligned}$$

Die Statistik  $T$  kann also in der Konstruktion des Neyman-Pearson-Tests (Gleichung (5.3.6)) verwendet werden:

$$\varphi_{K^*}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > z_{1-\alpha}, \\ 0, & \text{falls } T(x) = z_{1-\alpha}, \\ 0, & \text{falls } T(x) < z_{1-\alpha} \end{cases}$$

(mit  $K^* = z_{1-\alpha}$  und  $\gamma^* = 0$ ). Nach Satz 5.3.3 ist dieser Test der beste Neyman-Pearson-Test zum Niveau  $\alpha$  für unsere Hypothesen:

$$\begin{aligned} G_n(\varphi_{K^*}, \mu_0) &= \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) > z_{1-\alpha}) + 0 \cdot \mathbb{P}_0(T(X_1, \dots, X_n) \leq z_{1-\alpha}) \\ &= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

### 5.3.4 Unverfälschte zweiseitige Tests

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^n g_\theta(x_i).$$

Es wird ein zweiseitiger Test der Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

betrachtet. Für alle  $\alpha \in (0, 1)$  kann es jedoch keinen besten Neyman-Pearson-Test  $\varphi$  zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  vs.  $H_1$  geben. Denn, nehmen wir an,  $\varphi$  wäre der beste Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  vs.  $H_1$ , dann wäre  $\varphi$  der beste Test für die Hypothesen

1.  $H'_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H'_1 : \theta > \theta_0$
2.  $H''_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H''_1 : \theta < \theta_0$ .

Dann ist nach Satz 5.3.3, 3. die Gütefunktion

1.  $G_n(\varphi, \theta) < \alpha$  auf  $\theta < \theta_0$ , bzw.
2.  $G_n(\varphi, \theta) > \alpha$  auf  $\theta < \theta_0$ ,

was ein Widerspruch ist!

Darum werden wir die Klasse aller möglichen Tests auf unverfälschte Niveau- $\alpha$ -Tests (Definition 5.1.5) eingrenzen. Der Niveau- $\alpha$ -Test  $\varphi$  ist unverfälscht genau dann, wenn

$$\begin{aligned} G_n(\varphi, \theta) &\leq \alpha \text{ für } \theta \in \Theta_0 \\ G_n(\varphi, \theta) &\geq \alpha \text{ für } \theta \in \Theta_1 \end{aligned}$$

**Beispiel 5.3.4** 1.  $\varphi(x) \equiv \alpha$  ist unverfälscht.

2. Der zweiseitige Gauß-Test ist unverfälscht, vergleiche Beispiel 5.1.2:  $G_n(\varphi, \mu) \geq \alpha$  für alle  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Im Folgenden seien  $X_i$  unabhängig und identisch verteilt. Die Dichte  $f_\theta$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  gehöre zur einparametrischen Exponentialklasse:

$$f_\theta(x) = \exp \{c(\theta) \cdot T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x), \quad (5.3.7)$$

wobei  $c(\theta)$  und  $a(\theta)$  stetig differenzierbar auf  $\Theta$  sein sollen, mit

$$c'(\theta) > 0 \quad \text{und} \quad \text{Var}_\theta T(X_1, \dots, X_n) > 0$$

für alle  $\theta \in \Theta$ . Sei  $f_\Phi(x)$  stetig in  $(x, \Theta)$  auf  $B \times \Theta$ .

**Übungsaufgabe 5.3.1**

Zeigen Sie, daß folgende Relation gilt:

$$a'(\theta) = -c'(\theta)\mathbb{E}_\theta T(X_1, \dots, X_n).$$

**Lemma 5.3.3**

Es sei  $\varphi$  ein unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  für

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Dann gilt:

1.  $\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi(X_1, \dots, X_n) = G_n(\varphi, \theta_0)$
2.  $\mathbb{E}_0 [T(X_1, \dots, X_n)\varphi(X_1, \dots, X_n)] = \alpha \cdot \mathbb{E}_0 T(X_1, \dots, X_n)$

**Beweis** 1. Die Gütefunktion von  $\varphi$  ist

$$G_n(\varphi, \theta) = \int_B \varphi(x) f_\theta(x) \mu(dx)$$

Da  $f_\theta$  aus der einparametrischen Exponentialklasse ist, ist  $G_n(\varphi, \theta)$  differenzierbar (unter dem Integral) bezüglich  $\theta$ . Wegen der Unverfälschtheit von  $\varphi$  gilt

$$G_n(\varphi, \theta_0) \leq \alpha, \quad G_n(\varphi, \theta) \geq \alpha, \quad \theta \neq \theta_0$$

und daraus folgt  $G_n(\varphi, \theta_0) = \alpha$  und  $\theta_0$  ist ein Minimumpunkt von  $G_n$ . Somit ist 1) bewiesen.

2. Da  $\theta_0$  der Minimumpunkt von  $G_n$  ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= G'_n(\varphi, \theta_0) = \int_B \varphi(x) (c'(\theta_0)T(x) + a'(\theta_0)) f_0(x) \mu(dx) \\ &= c'(\theta_0) \cdot \mathbb{E}_0 [\varphi(X_1, \dots, X_n)T(X_1, \dots, X_n)] + a'(\theta_0) \cdot G_n(\varphi, \theta_0) \\ &= c'(\theta_0) \cdot \mathbb{E}_0 [\varphi(X_1, \dots, X_n)T(X_1, \dots, X_n)] + \alpha a'(\theta_0) \\ &\stackrel{\text{(Übung 5.3.1)}}{=} c'(\theta_0) (\mathbb{E}_0 (\varphi \cdot T) - \alpha \mathbb{E}_0 T) \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\mathbb{E}_0 (\varphi T) = \alpha \mathbb{E}_0 T$  und damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir definieren jetzt die modifizierten Neyman-Pearson-Tests für einfache Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1' : \theta = \theta_1, \quad \theta_1 \neq \theta_0.$$

Für  $\lambda, K \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma : B \rightarrow [0, 1]$  definieren wir

$$\varphi_{K,\lambda}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x) > (K + \lambda T(x))f_0(x), \\ \gamma(x), & \text{falls } f_1(x) = (K + \lambda T(x))f_0(x), \\ 0, & \text{falls } f_1(x) < (K + \lambda T(x))f_0(x), \end{cases} \quad (5.3.8)$$

wobei  $T(x)$  die Statistik aus der Darstellung (5.3.7) ist.

Es sei  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  die Klasse aller Tests, die Aussagen 1) und 2) des Lemmas 5.3.3 erfüllen. Aus Lemma 5.3.3 folgt dann, daß die Menge der unverfälschten Tests zum Niveau  $\alpha$  eine Teilmenge von  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  ist.

**Satz 5.3.4**

Der modifizierte Neyman-Pearson-Test  $\varphi_{K,\lambda}$  ist der beste  $\alpha$ -Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  für Hypothesen  $H_0$  vs.  $H_1'$  zum Niveau  $\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi_{K,\lambda}$ , falls  $\varphi_{K,\lambda} \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ .

**Beweis** Es ist zu zeigen, daß  $\mathbb{E}_1 \varphi_{K,\lambda} \geq \mathbb{E}_1 \varphi$  für alle  $\varphi \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ , bzw.  $\mathbb{E}_1 (\varphi_{K,\lambda} - \varphi) \geq 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 (\varphi_{K,\lambda} - \varphi) &= \int_B (\varphi_{K,\lambda}(x) - \varphi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\ &\stackrel{\text{(Bem. 5.3.3, 2.)}}{\geq} \int_B (\varphi_{K,\lambda}(x) - \varphi(x)) (K + \lambda T(x)) f_0(x) \mu(dx) \\ &= K \left( \underbrace{\mathbb{E}_0 \varphi_{K,\lambda}}_{=\alpha} - \underbrace{\mathbb{E}_0 \varphi}_{=\alpha} \right) + \lambda \left( \underbrace{\mathbb{E}_0 (\varphi_{K,\lambda} \cdot T)}_{=\alpha \mathbb{E}_0 T} - \underbrace{\mathbb{E}_0 (\varphi \cdot T)}_{=\alpha \mathbb{E}_0 T} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

weil  $\varphi, \varphi_{K,\lambda} \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ . □

Wir definieren folgende Entscheidungsregel, die später zum Testen der zweiseitigen Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

verwendet wird:

$$\varphi_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) \notin [c_1, c_2], \\ \gamma_1, & \text{falls } T(x) = c_1, \\ \gamma_2, & \text{falls } T(x) = c_2, \\ 0, & \text{falls } T(x) \in (c_1, c_2), \end{cases} \quad (5.3.9)$$

für  $c_1 \leq c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$  und die Statistik  $T(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$ , die in der Dichte (5.3.7) vorkommt. Zeigen wir, daß  $\varphi_c$  sich als modifizierter Neyman-Pearson-Test schreiben lässt.

Für die Dichte

$$f_\theta(x) = \exp\{c(\theta)T(x) + a(\theta)\} \cdot l(x)$$

wird (wie immer) vorausgesetzt, daß  $l(x) > 0$ ,  $c'(\theta) > 0$  und  $a'(\theta)$  existiert für  $\theta \in \Theta$ .

**Lemma 5.3.4**

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte  $f_\theta(x)$ ,  $x \in B$ , die zur einparametrischen Exponentialfamilie gehört. Sei  $T(x)$  die dazugehörige Statistik, die im Exponenten der Dichte  $f_\theta$  vorkommt.

Für beliebige reelle Zahlen  $c_1 \leq c_2$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$  und Parameterwerte  $\theta_0, \theta_1 \in \Theta : \theta_0 \neq \theta_1$  läßt sich der Test  $\varphi_c$  aus (5.3.9) als modifizierter Neyman-Pearson-Test  $\varphi_{K,\lambda}$  aus (5.3.8) mit gegebenen  $K, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(x) \in [0, 1]$  schreiben.

**Beweis** Falls wir die Bezeichnung

$$f_{\theta_i}(x) = f_i(x), \quad i = 0, 1$$

verwenden, dann gilt

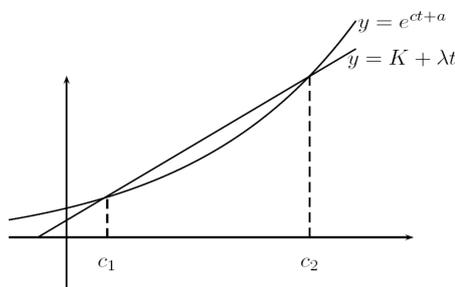
$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \exp \left\{ \underbrace{(c(\theta_1) - c(\theta_0))}_{c} T(x) + \underbrace{a(\theta_1) - a(\theta_0)}_a \right\},$$

und somit

$$\{x \in B : f_1(x) > (K + \lambda T(x)) f_0(x)\} = \{x \in B : \exp(cT(x) + a) > K + \lambda T(x)\}.$$

Finden wir solche  $K$  und  $\lambda$  aus  $\mathbb{R}$ , für die die Gerade  $K + \lambda t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  die konvexe Kurve  $\exp\{ct + a\}$  genau an den Stellen  $c_1$  und  $c_2$  schneidet (falls  $c_1 \neq c_2$ ) bzw. an der Stelle  $t = c_1$  berührt (falls  $c_1 = c_2$ ). Dies ist immer möglich, siehe Abbildung 5.6.

Abb. 5.6:



Ferner setzen wir  $\gamma(x) = \gamma_i$  für  $\{x \in B : T(x) = c_i\}$ . Insgesamt gilt dann

$$\{x : \exp(cT(x) + a) > K + \lambda T(x)\} = \{x : T(x) \notin [c_1, c_2]\}$$

und

$$\{x : \exp(cT(x) + a) < K + \lambda T(x)\} = \{x : T(x) \in (c_1, c_2)\}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

**Bemerkung 5.3.6.** 1. Die Umkehrung des Lemmas stimmt nicht, denn bei vorgegebenen Kurven  $y = K + \lambda t$  und  $y = \exp\{ct + a\}$  muss es die Schnittpunkte  $c_1$  und  $c_2$  nicht unbedingt geben. So kann die Gerade vollständig unter der Kurve  $y = \exp\{ct + a\}$  liegen.

2. Der Test  $\varphi_c$  macht von den Werten  $\theta_0$  und  $\theta_1$  nicht explizit Gebrauch. Dies unterscheidet ihn vom Test  $\varphi_{K,\lambda}$ , für den die Dichten  $f_0$  und  $f_1$  gebraucht werden.

Jetzt sind wir bereit, den Hauptsatz über zweiseitige Tests zum Prüfen der Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

zu formulieren und zu beweisen.

### Satz 5.3.5

(Hauptsatz über zweiseitige Tests)

Unter den Voraussetzungen des Lemmas 5.3.4 sei  $\varphi_c$  ein Test aus (5.3.9), für den  $\varphi_c \in \tilde{\Psi}(\alpha)$  gilt. Dann ist  $\varphi_c$  bester unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  (und dadurch bester Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$ ) der Hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

**Beweis** Wählen wir ein beliebiges  $\theta_1 \in \Theta$ ,  $\theta_1 \neq \theta_0$ . Nach Lemma 5.3.4 ist  $\varphi_c$  ein modifizierter Neyman-Pearson-Test  $\varphi_{K,\lambda}$  für eine spezielle Wahl von  $K$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\varphi_{K,\lambda}$  ist aber nach Satz 5.3.4 bester Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  für  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1' : \theta = \theta_1$ . Da  $\varphi_c$  nicht von  $\theta_1$  abhängt, ist es bester Test in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  für  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Da unverfälschte Niveau- $\alpha$ -Tests in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  liegen, müssen wir nur zeigen, daß  $\varphi_c$  unverfälscht ist. Da  $\varphi_c$  der beste Test ist, ist er nicht schlechter als der konstante unverfälschte Test  $\varphi = \alpha$ , das heißt

$$G_n(\varphi_c, \theta) \geq G_n(\varphi, \theta) = \alpha, \quad \theta \neq \theta_0.$$

Somit ist auch  $\varphi_c$  unverfälscht. Der Beweis ist beendet. □

**Bemerkung 5.3.7.** Wir haben gezeigt, daß  $\varphi_c$  der beste Test seines Umfangs ist. Es wäre jedoch noch zu zeigen, daß für beliebiges  $\alpha \in (0, 1)$  Konstanten  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  gefunden werden, für die  $\mathbb{E}_0 \varphi_c = \alpha$  gilt. Da der Beweis schwierig ist, wird er hier ausgelassen. Im folgenden Beispiel jedoch wird es klar, wie die Parameter  $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$  zu wählen sind.

### Beispiel 5.3.5 (Zweiseitiger Gauß-Test):

Im Beispiel 5.1.2 haben wir folgenden Test des Erwartungswertes einer normalverteilten Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  mit unabhängigen und identisch verteilten  $X_i$  und  $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$  bei bekannten Varianzen  $\sigma_0^2$  betrachtet. Getestet werden die Hypothesen

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Der Test  $\varphi(x)$  lautet

$$\varphi(x) = \mathbb{I}\left(x \in \mathbb{R}^n : |T(x)| > z_{1-\alpha/2}\right),$$

wobei

$$T(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0}.$$

Zeigen wir, daß  $\varphi$  der beste Test zum Niveau  $\alpha$  in  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  (und somit bester unverfälschter Test) ist. Nach Satz 5.3.5 müssen wir lediglich prüfen, daß  $\varphi$  als  $\varphi_c$  mit (5.3.9) dargestellt werden kann, weil die  $n$ -dimensionale Normalverteilung mit Dichte  $f_\mu$  (siehe Beispiel 5.3.3) zu der einparametrischen Exponentialfamilie mit Statistik

$$T(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma_0}$$

gehört. Setzen wir  $c_1 = z_{1-\alpha/2}$ ,  $c_2 = -z_{1-\alpha/2}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Damit ist

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |T(x)| > z_{1-\alpha/2}, \\ 0, & \text{falls } |T(x)| \leq z_{1-\alpha/2}. \end{cases}$$

und die Behauptung ist bewiesen, weil aus der in Beispiel 5.1.2 ermittelten Gütefunktion  $G_n(\varphi, \theta)$  von  $\varphi$  ersichtlich ist, daß  $\varphi$  ein unverfälschter Test zum Niveau  $\alpha$  ist (und somit  $\varphi \in \tilde{\Psi}(\alpha)$ ).

**Bemerkung 5.3.8.** *Bisher haben wir immer vorausgesetzt, daß nur ein Parameter der Verteilung der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  unbekannt ist, um die Theorie des Abschnittes 1.3 über die besten (Neyman-Pearson-) Tests im Fall der einparametrischen Exponentialfamilie aufstellen zu können. Um jedoch den Fall weiterer unbekannter Parameter betrachten zu können (wie im Beispiel der zweiseitigen Tests des Erwartungswertes der normalverteilten Stichprobe bei unbekannter Varianz (der sog.  $t$ -Test, vergleiche Abschnitt 1.2.1, 1 (a)), bedarf es einer tiefergehenderen Theorie, die aus Zeitgründen in dieser Vorlesung nicht behandelt wird. Der interessierte Leser findet das Material dann im Buch [?] .*

## 5.4 Anpassungstests

Sei eine Stichprobe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen  $(X_1, \dots, X_n)$  gegeben mit  $X_i \sim F$  (Verteilungsfunktion) für  $i = 1, \dots, n$ . Bei den Anpassungstests wird die Hypothese

$$H_0 : F = F_0 \text{ vs. } H_1 : F \neq F_0$$

überprüft, wobei  $F_0$  eine vorgegebene Verteilungsfunktion ist.

Einen Test aus dieser Klasse haben wir bereits in der Vorlesung Stochastik I kennengelernt: den Kolmogorow-Smirnov-Test (vergleiche Bemerkung 3.3.8. 3), Vorlesungsskript Stochastik I).

Jetzt werden weitere nichtparametrische Anpassungstests eingeführt. Der erste ist der  $\chi^2$ -Anpassungstest von K. Pearson.

### 5.4.1 $\chi^2$ -Anpassungstest

Der Test von Kolmogorov-Smirnov basiert auf dem Abstand

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} | \hat{F}_n(x) - F_0(x) |$$

zwischen der empirischen Verteilungsfunktion der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  und der Verteilungsfunktion  $F_0$ . In der Praxis jedoch erscheint dieser Test zu feinfühlig, denn er ist zu sensibel gegenüber Unregelmäßigkeiten in den Stichproben und verwirft  $H_0$  zu oft. Einen Ausweg aus dieser Situation stellt die Vergrößerung der Haupthypothese  $H_0$  dar, auf welcher der folgende  $\chi^2$ -Anpassungstest beruht.

Man zerlegt den Wertebereich der Stichprobenvariablen  $X_i$  in  $r$  Klassen  $(a_j, b_j]$ ,  $j = 1, \dots, r$  mit der Eigenschaft

$$-\infty \leq a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots = a_r < b_r \leq \infty.$$

Anstelle von  $X_i, i = 1, \dots, n$  betrachten wir die sogenannten *Klassenstärken*  $Z_j, j = 1, \dots, r$ , wobei

$$Z_j = \#\{i : a_j < X_i \leq b_j, 1 \leq i \leq n\}.$$

#### Lemma 5.4.1

Der Zufallsvektor  $Z = (Z_1, \dots, Z_r)^\top$  ist *multinomialverteilt* mit Parametervektor

$$p = (p_1, \dots, p_{r-1})^\top \in [0, 1]^{r-1},$$

wobei

$$p_j = \mathbb{P}(a_j < X_1 \leq b_j) = F(b_j) - F(a_j), \quad j = 1, \dots, r-1, \quad p_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} p_j.$$

Schreibweise:

$$Z \sim M_{r-1}(n, p)$$

**Beweis** Es ist zu zeigen, daß für alle Zahlen  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$  mit  $k_1 + \dots + k_r = n$  gilt:

$$\mathbb{P}(Z_i = k_i, i = 1, \dots, r) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}. \quad (5.4.1)$$

Da  $X_i$  unabhängig und identisch verteilt sind, gilt

$$\mathbb{P}(X_j \in (a_{i_j}, b_{i_j}], j = 1, \dots, n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(a_{i_j} < X_1 \leq b_{i_j}) = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r},$$

falls die Folge von Intervallen  $(a_{i_j}, b_{i_j}]_{j=1, \dots, n}$  das Intervall  $(a_i, b_i]$   $k_i$  Mal enthält,  $i = 1, \dots, r$ . Die Formel (5.4.1) ergibt sich aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit als Summe über die Permutationen von Folgen  $(a_{i_j}, b_{i_j}]_{j=1, \dots, n}$  dieser Art.  $\square$

Im Sinne des Lemmas 5.4.1 werden neue Hypothesen über die Beschaffenheit von  $F$  geprüft.

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs. } H_1 : p \neq p_0,$$

wobei  $p = (p_1, \dots, p_{r-1})^\top$  der Parametervektor der Multinomialverteilung von  $Z$  ist, und  $p_0 = (p_{01}, \dots, p_{0,r-1})^\top \in (0, 1)^{r-1}$  mit  $\sum_{i=1}^{r-1} p_{0i} < 1$ . In diesem Fall ist

$$\Lambda_0 = \{F \in \Lambda : F(b_j) - F(a_j) = p_{0j}, \quad j = 1, \dots, r-1\},$$

$\Lambda_1 = \Lambda \setminus \Lambda_0$ , wobei  $\Lambda$  die Menge aller Verteilungsfunktionen ist. Um  $H_0$  vs.  $H_1$  zu testen, führen wir die *Pearson-Teststatistik*

$$T_n(x) = \sum_{j=1}^r \frac{(z_j - np_{0j})^2}{np_{0j}}$$

ein, wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Stichprobe der Daten ist und  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  ihre Klassenstärken sind.

Unter  $H_0$  gilt

$$\mathbb{E} Z_j = np_{0j}, \quad j = 1, \dots, r,$$

somit soll  $H_0$  abgelehnt werden, falls  $T_n(X)$  ungewöhnlich große Werte annimmt.

Im nächsten Satz zeigen wir, daß  $T(X_1, \dots, X_n)$  asymptotisch (für  $n \rightarrow \infty$ )  $\chi_{r-1}^2$ -verteilt ist, was zu folgendem Anpassungstest ( $\chi^2$ -Anpassungstest) führt:

$$H_0 \text{ wird verworfen, falls } T_n(x_1, \dots, x_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2.$$

Dieser Test ist nach seinem Entdecker *Karl Pearson* (1857-1936) benannt worden.

### Satz 5.4.1

Unter  $H_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p_0} \left( T_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2 \right) = \alpha, \quad \alpha \in (0, 1),$$

das heißt, der  $\chi^2$ -Pearson-Test ist ein asymptotischer Test zum Niveau  $\alpha$ .

**Beweis** Führen wir die Bezeichnung  $Z_{nj} = Z_j(X_1, \dots, X_n)$  der Klassenstärken ein, die aus der Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  entstehen. Nach Lemma 5.4.1 ist

$$Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{nr}) \sim M_{r-1}(n, p_0) \text{ unter } H_0.$$

Insbesondere soll  $\mathbb{E} Z_{nj} = np_{0j}$  und

$$\text{Cov}(Z_{ni}, Z_{nj}) = \begin{cases} np_{0j}(1 - p_{0j}), & i = j, \\ -np_{0i}p_{0j}, & i \neq j \end{cases}$$

für alle  $i, j = 1, \dots, r$  gelten. Da

$$Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(a_j < X_i \leq b_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

ist  $Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{n,r-1})$  eine Summe von  $n$  unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren  $Y_i \in \mathbb{R}^{r-1}$  mit Koordinaten  $Y_{ij} = \mathbb{I}(a_j < X_i \leq b_j)$ ,  $j = 1, \dots, r-1$ . Daher gilt nach dem multivariaten Grenzwertsatz (der in Lemma 5.4.2 bewiesen wird), daß

$$Z'_n = \frac{Z_n - \mathbb{E} Z_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mathbb{E} Y_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, K),$$

mit  $N(0, K)$  eine  $(r-1)$ -dimensionale multivariate Normalverteilung (vergleiche Vorlesungsskript WR, Beispiel 3.4.1. 3.) mit Erwartungswertvektor Null und Kovarianzmatrix  $K = (\sigma_{ij}^2)$ , wobei

$$\sigma_{ij}^2 = \begin{cases} -p_{0i}p_{0j}, & i \neq j, \\ p_{0i}(1 - p_{0j}), & i = j \end{cases}$$

für  $i, j = 1, \dots, r-1$  ist. Diese Matrix  $K$  ist invertierbar mit  $K^{-1} = A = (a_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p_{0r}}, & i \neq j, \\ \frac{1}{p_{0i}} + \frac{1}{p_{0r}}, & i = j. \end{cases}$$

Außerdem ist  $K$  (als Kovarianzmatrix) symmetrisch und positiv definit. Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß es eine invertierbare  $(r-1) \times (r-1)$ -Matrix  $A^{1/2}$  gibt, mit der Eigenschaft  $A = A^{1/2}(A^{1/2})^\top$ . Daraus folgt,

$$K = A^{-1} = ((A^{1/2})^\top)^{-1} \cdot (A^{1/2})^{-1}.$$

Wenn wir  $(A^{1/2})^\top$  auf  $Z'_n$  anwenden, so bekommen wir

$$(A^{1/2})^\top \cdot Z'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (A^{1/2})^\top \cdot Y,$$

wobei

$$(A^{1/2})^\top \cdot Y \sim N\left(0, (A^{1/2})^\top \cdot K \cdot A^{1/2}\right) = N(0, \mathcal{I}_{r-1})$$

nach der Eigenschaft der multivariaten Normalverteilung, die im Kapitel 2, Satz ?? behandelt wird. Des Weiteren wurde hier der Stetigkeitssatz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt, daß

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \implies \varphi(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \varphi(Y)$$

für beliebige Zufallsvektoren  $\{Y_n\}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$  und stetige Abbildungen  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diesen Satz haben wir in WR für Zufallsvariablen bewiesen (Satz 6.4.3, Vorlesungsskript WR). Die erneute Anwendung des Stetigkeitssatzes ergibt

$$\left| (A^{1/2})^\top Z'_n \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} |Y|^2 = R \sim \chi_{r-1}^2.$$

Zeigen wir, daß

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \left| (A^{1/2})^\top Z'_n \right|^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| (A^{1/2})^\top Z'_n \right|^2 &= ((A^{1/2})^\top Z'_n)^\top ((A^{1/2})^\top Z'_n) = Z_n'^\top \cdot \underbrace{A^{1/2} \cdot (A^{1/2})^\top}_A Z'_n = Z_n'^\top A Z'_n \\ &= n \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{p_{0j}} \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right)^2 + \frac{n}{p_{0r}} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \left( \frac{Z_{ni}}{n} - p_{0i} \right) \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} + \frac{n}{p_{0r}} \left( \sum_{j=1}^{r-1} \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} + \frac{n}{p_{0r}} \left( \frac{Z_{nr}}{n} - p_{0r} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} = T_n(X_1, \dots, X_n), \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-1} Z_{nj} &= n - Z_{nr}, \\ \sum_{j=1}^{r-1} p_{0j} &= 1 - p_{0r}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.4.2 (Multivariater zentraler Grenzwertsatz):**

Sei  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren, mit  $\mathbb{E} Y_1 = \mu$  und Kovarianzmatrix  $K$ . Dann gilt

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y \sim N(0, K). \quad (5.4.2)$$

**Beweis** Sei  $Y_j = (Y_{j1}, \dots, Y_{jm})^\top$ . Nach dem Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen ist die Konvergenz (5.4.2) äquivalent zu

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(t) \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad (5.4.3)$$

wobei

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} e^{itS_n} = \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^m t_j \frac{Y_{1j} + \dots + Y_{nj} - n\mu_j}{\sqrt{n}} \right\}$$

die charakteristische Funktion vom Zufallsvektor

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sqrt{n}}$$

und

$$\varphi(t) = e^{-t^\top K t / 2}$$

die charakteristische Funktion der  $N(0, K)$ -Verteilung ist. Die Funktion  $\varphi_n(t)$  kann in der Form

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^m t_j (Y_{ij} - \mu_j)}{\sqrt{n}} \right\}, \quad t = (t_1, \dots, t_m)^\top \in \mathbb{R}^m$$

umgeschrieben werden, wobei für die Zufallsvariable

$$L_i := \sum_{j=1}^m t_j (Y_{ij} - \mu_j)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} L_i &= 0, \\ \text{Var } L_i &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k,j=1}^m t_j (Y_{ij} - \mu_j) (Y_{ik} - \mu_k) t_k \right] = t^\top K t, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Falls  $t^\top K t = 0$ , dann gilt  $L_i = 0$  fast sicher, für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Hieraus folgt  $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 1$ , also gilt die Konvergenz 5.4.2.

Falls jedoch  $t^\top K t > 0$ , dann kann  $\varphi_n(t)$  als charakteristische Funktion der Zufallsvariablen

$$\sum_{i=1}^n L_i / \sqrt{n}$$

an Stelle 1, und  $\varphi(t)$  als charakteristische Funktion der eindimensionalen Normalverteilung  $N(0, t^\top K t)$  an Stelle 1 interpretiert werden. Aus dem zentralen Grenzwertsatz für eindimensionale Zufallsvariablen (vergleiche Satz 7.2.1, Vorlesungsskript WR) gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} L \sim N(0, t^\top K t)$$

und somit

$$\varphi_n(t) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n L_i/\sqrt{n}\right)(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_L(1) = \varphi(t).$$

Somit ist die Konvergenz (5.4.2) bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 5.4.1.** 1. Die im letzten Beweis verwendete Methode der Reduktion einer mehrdimensionalen Konvergenz auf den eindimensionalen Fall mit Hilfe von Linearkombinationen von Zufallsvariablen trägt den Namen von Cramér-Wold.

2. Der  $\chi^2$ -Pearson-Test ist asymptotisch, also für große Stichprobenumfänge, anzuwenden. Aber welches  $n$  ist groß genug? Als „Faustregel“ gilt:  $np_{0j}$  soll größer gleich  $a$  sein,  $a \in (2, \infty)$ . Für eine größere Klassenanzahl  $r \geq 10$  kann sogar  $a = 1$  verwendet werden. Wir zeigen jetzt, daß der  $\chi^2$ -Anpassungstest konsistent ist.

### Lemma 5.4.3

Der  $\chi^2$ -Pearson-Test ist konsistent, das heißt

$$\forall p \in [0, 1]^{r-1}, p \neq p_0 \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left( T_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2 \right) = 1$$

**Beweis** Unter  $H_1$  gilt

$$Z_{nj}/n = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}(a_j < X_i \leq b_j)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \underbrace{\mathbb{E} \mathbb{I}(a_j < X_1 \leq b_j)}_{=p_j}$$

nach dem starken Gesetz der großen Zahlen. Wir wählen  $j$  so, daß  $p_j \neq p_{0j}$ . Es gilt

$$T_n(X_1, \dots, X_n) \geq \frac{(Z_{nj} - np_{0j})^2}{np_{0j}} \geq \underbrace{n \left( \frac{Z_{nj}}{n} - p_{0j} \right)^2}_{\sim n(p_j - p_{0j})^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \infty.$$

Somit ist auch

$$\mathbb{P}_p \left( T_n(X_1, \dots, X_n) > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

$\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] BICKEL, P. ; DOKSUM, K.: *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. London : Prentice Hall, 2001. – 2nd ed., Vol. 1
- [2] BOROVKOV, A. A.: *Mathematical Statistics*. Gordon & Breach, 1998
- [3] BURKSCHAT, M. ; CRAMER, E. ; KAMPS, U.: *Beschreibende Statistik, Grundlegende Methoden*. Berlin : Springer, 2004
- [4] CASELLA, G. ; BERGER, R. L.: *Statistical Inference*. Duxbury : Pacific Grove (CA), 2002
- [5] CRAMER, E. ; CRAMER, K. ; KAMPS, U. ; ZUCKSCHWERDT: *Beschreibende Statistik, Interaktive Grafiken*. Berlin : Springer, 2004
- [6] CRAMER, E. ; KAMPS, U.: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Berlin : Springer, 2007
- [7] DALGAARD, P.: *Introductory Statistics with R*. Berlin : Springer, 2002
- [8] FAHRMEIR, L. ; K, R.
- [9] *Regression. Modelle, Methoden und Anwendungen*. Berlin : Springer, 2007
- [10] GEORGI, H. O.: *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Berlin : de Gruyter, 2002
- [11] HARTUNG, J. ; ELPERT, B. ; KL??SENER, K. H.: *Statistik*. München : R. Oldenbourg Verlag, 1993. – 9. Auflage
- [12] HEYDE, C. C. ; SENETA, E.: *Statisticians of the Centuries*. Berlin : Springer, 2001
- [13] IRLE, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Grundlagen - Resultate - Anwendungen*. Teubner, 2001
- [14] KAZMIR, L. J.: *Wirtschaftsstatistik*. McGraw-Hill, 1996
- [15] KOCH, K. R.: *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Berlin : Springer, 1999
- [16] KRAUSE, A. ; OLSON, M.: *The Basics of S-PLUS*. Berlin : Springer, 2002. – Third Ed.

- [17] KRENGEL, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Braunschweig : Vieweg, 2002. – 6. Auflage
- [18] LEHMANN, E. L.: *Elements of Large-Sample Theory*. New York : Springer, 1999
- [19] LEHN, J. ; WEGMANN, H.: *Einführung in die Statistik*. Stuttgart : Teubner, 2000. – 3. Auflage
- [20] MAINDONALD, J. ; BRAUN, J.: *Data Analysis and Graphics Using R*. Cambridge University Press, 2003
- [21] OVERBECK-LARISCH, M. ; DOLEJSKY, W.: *Stochastik mit Mathematica*. Braunschweig : Vieweg, 1998
- [22] PRUSCHA, H.: *Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik*. Stuttgart : Teubner, 1996
- [23] PRUSCHA, H.: *Vorlesungen über Mathematische Statistik*. Stuttgart : Teubner, 2000
- [24] SACHS, L.: *Angewandte Statistik*. Springer, 1992
- [25] SACHS, L. ; HEDDERICH, J.: *Angewandte Statistik, Methodensammlung mit R*. Berlin : Springer, 2006
- [26] SPIEGEL, M. R. ; STEPHENS, L. J.: *Statistik*. McGraw-Hill, 1999
- [27] STAHEL, W. A.: *Statistische Datenanalyse*. Vieweg, 1999
- [28] VENABLES, W. ; RIPLEY, D.: *Modern applied statistics with S-PLUS*. Springer, 1999. – 3rd ed
- [29] WASSERMAN, L.: *All of Statistics. A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, 2004

# Index

- a-posteriori-Verteilung, 59
- a-priori-Verteilung, 59
- Ablehnungsbereich, 82
- absolute Häufigkeit, 5
- Abweichung, mittlere quadratische, 13
- Annahmehbereich, 82
- arithmetisches Mittel, 9
- asymptotisch erwartungstreu, 40
- asymptotisch normalverteilt, 42
- Ausgangsvariable, 26
  
- Bandbreite, 20
- Bayes-Schätzer, 59
- Bayesche Formel, 59
- Bernoulli-Verteilung
  - asymptotisches Konfidenzintervall, 77
- besserer Schätzer, 42
- besten erwartungstreuer Schätzer, 42
- Bestimmtheitsmaß, 30
- Bias, 40
- bimodal, 7
- Binomialverteilung, 101
- Bootstrap
  - Konfidenzintervall, 65
  - Schätzer, 64
- Bootstrap-Schätzer
  - Monte-Carlo-Methoden, 64
- Box-Plot, 11
  - modifizierter, 12
- Bravais-Pearson-Koeffizient, 23
- Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient, 22
  
- $\chi^2$ -Verteilung, 37
- Cramér-Rao, Ungleichung von, 66
  
- Daten-Stichproben, 1
  
- Datenbereinigung, 1
- Datenerhebung, 1
- Dichteschätzung, 18
  - gleichmäßiger Abstand  $D_n$ , 49
  
- Einfache lineare Regression, 26
- Einflussfaktor, 26
- einparametrische Exponentialklasse, 100
- empirische(r)
  - Kovarianz, 22
  - Median, 11
  - Standardabweichung, 13
  - Varianz, 13
  - Variationskoeffizient, 13, 14
  - Verteilungsfunktion, 7
- Entscheidungsregel, 81
- Erlangverteilung, 37
- erwartungstreu, 40
- Erwartungstreue, 14
- Explorative Datenanalyse, 1
  
- Fehler 1. Art, 51
- Fehler 1. und 2. Art, 83
- Fisher
  - Fisher-Information, 57
  - Fisher-Snedecor-Verteilung, F-Verteilung, 39
  - Wölbungsmaß von Fisher, 15
  
- Gütefunktion, 83
- Gammaverteilung
  - Faltungstabilität, 37
  - Momenterzeugende und charakteristische Funktion, 36
- geometrisches Mittel, 9, 10
- Gesamtstreuung, 30

getrimmtes Mittel, 9  
 Gliwko-Cantelli, Satz von, 50  
 Grundgesamtheit, 1

Häufigkeit  
   absolute, 5  
   relative, 5

harmonisches Mittel, 10  
 Hauptsatz über zweiseitige Tests, 110  
 Histogramm, 5  
   eindimensionales Histogramm, 5  
 Hoeffding-Ungleichung, 76  
 Hypothese, 81  
   Alternative, 81  
   Haupthypothese, 81

identifizierbar, 34  
 Invarianzeigenschaften, 24  
 Irrtumswahrscheinlichkeit, 71

Jackknife-Schätzer für die/den  
   Erwartungswert, 62  
   Varianz, 62  
   Verzerrung (Bias), 63

Karl Popper, 82  
 Kerndichteschätzer  
   eindimensionaler Kerndichteschätzer, 20

Klassenstärke, 112  
 Kolmogorow, Satz von, 51  
 Kolmogorow-Abstand  $D_n$ , 49  
 Kolmogorow-Verteilung, 51  
 Konfidenzintervall, 45, 71  
   asymptotisches, 72, 77  
   für die Bernoulli-Verteilung, 77  
   für die Poissonverteilung, 78  
   Bootstrap, 65  
   Lange, 72  
   minimales, 71

Konfidenzniveau, 71  
 konsistenter Schätzer, 41  
 Korrelationskoeffizient, 22  
   Spearman, 23

Kovarianz, empirische, 22  
 kritischer Bereich, *siehe* Ablehnungsbe-  
   reich  
 Kurtosis, 15

Lagemaß, 9  
 Likelihood-Funktion, 54  
 linksschief, 7  
 linkssteil, 7

maximale Streuung, 13  
 Maximum-Likelihood-Schätzer, 54  
   schwache Konsistenz, 56

Median, 9, 12  
   empirischer, 11

Mittel  
   arithmetisches, 9  
   geometrisches, 9, 10  
   getrimmtes, 9  
   harmonisches, 9, 10

Mittelwert, 9, 12  
 mittlere quadratische Abweichung, 13  
 mittlerer quadratischer Fehler, 41  
 Modalität, 7  
 Modellierung von Daten, 2  
 Modellvalidierung, 2  
 modifizierter Box-Plot, 12  
 Modus, 9, 12  
 Momentenmethode, 52  
 Momentenschätzer, 52  
 multimodal, 7  
 Multinomialverteilung, 112

Neyman-Pearson  
   Fundamentallemma, 96  
   Optimalitätssatz, 95

Normalverteilung  
   Konfidenzintervall  
     für eine Stichprobe, 73  
     für zwei Stichproben, 79  
   Signifikanztests, 90

Ordnungsstatistik, 4, 9, 10  
 $p$ -Wert, 87

Parameterraum, 34  
 Parametervektor, 34  
 Pearson-Teststatistik, 113  
 Plug-in-Methode, 52  
 Poissonverteilung, 92  
     asymptotisches Konfidenzintervall, 78  
     Neyman-Pearson-Test, 98  
 Polynomiale Regression, 26  
 Punktschätzer, 34  
  
 Quantil, 9, 10  
 Quantilplot, 16  
 Quartil, 9, 11  
  
 Randomisierungsbereich, 82  
 Rangkorrelationskoeffizient, 23  
 Realisierung, 3, 5  
 rechtsschief, 7  
 rechtssteil, 7  
 Regressand, 26  
 Regression, 26  
     einfache lineare, 26  
     polynomiale, 26  
 Regressionsgerade, 27  
 Regressionsgerade, Eigenschaften von, 30  
 Regressionskoeffizient, 27  
 Regressionskonstante, 27  
 Regressionsvarianz, 27  
 Regressor, 26  
 relative Häufigkeit, 5  
 Resampling-Methode, 61  
 Residualplot, 32  
 Residuen, 28  
  
 Säulendiagramm, 6  
 Satz  
      $\chi^2$ -Verteilung, Spezialfall, 37  
     Dichte der  $t$ -Verteilung, 39  
     Eigenschaften der empirischen Momente, 42  
     Gliwenko-Cantelli, 50  
     Invarianzeigenschaften, 24  
     Kolmogorow, 51  
     Momenterzeugende und charakteristische Funktion der Gammaverteilung, 36  
     Schwache Konsistenz von ML-Schätzern, 56  
     Ungleichung von Cramér-Rao, 66  
 Schätzer, 40  
     besserer, 42  
     bester erwartungstreuer, 42  
     konsistenter, 41  
     Vergleich von, 42  
 Schiefe, 9, 15  
 Schließende Datenanalyse, 2  
 Spannweite, 13  
 Spearmans Korrelationskoeffizient, 23  
 Stabdiagramm, 6  
 Standardabweichung, 14  
 Statistische Merkmale, 2  
 Stichproben, 3  
 Stichprobenfunktion, 4  
 Stichprobenmittel, 4, 9  
 Stichprobenvarianz, 4, 13  
 Streudiagramm, 32  
 sum of squared residuals, 30  
 sum of squares explained, 30  
 sum of squares total, 30  
 Symmetriekoeffizient, 15  
 symmetrisch, 7  
  
 $t$ -Verteilung, 39  
 Test  
     Anpassungstest, 111  
     asymptotischer, 85, 91  
     besserer, 93  
     bester, 94  
      $\chi^2$ -Anpassungstest, 112  
     Kolmogorov-Smirnov, 112  
     Macht, 83  
     Monte-Carlo-Test, 85  
     Neyman-Pearson-Test, 94  
         Ablehnungsbereich, 94  
         einseitiger, 100  
         modifizierter, 107  
         Parameter der Poissonverteilung, 98

- Umfang, 94
- NP-Test, *siehe* Neyman-Pearson-Test
- Parameter der Normalverteilung, 90
- parametrischer, 83
  - einseitiger, 84
  - linksseitiger, 84
  - rechtsseitiger, 84
  - zweiseitiger, 84
- parametrischer Signifikanztest, 90
- power, *siehe* Macht
- randomisierter, 82, 92
- Schärfe, 83
- Stärke, 83
- Umfang, 93
- unverfälschter, 88
- Wald-Test, 91
- Teststatistik, 73
- Transformationsregel, 13
- unimodal, 7, 56
- unverzerrt, 40
- Varianz, empirische, 13
- Verlustfunktion, 59
- Verteilung mit monotonem Dichtekoeffizienten, 100
- Verteilungsfunktion, empirische, 7
- Vertrauensintervall, 45
- Verzerrung, 40
- Visualisierung, 1
- Wölbung, 9
- Wölbungsmaß von Fisher, 15
- Zielgröße, 26
- Zufallsstichprobe, 3