Stochastik II

Vorlesungsskript
(Arbeitsversion)

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

ULM
2010

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Theorie der zufälligen Funktionen

1.1 Zufällige Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ ein meßbarer Raum, $\Omega, \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Definition 1.1.1
Ein *zufälliges Element* $X : \Omega \to \mathcal{S}$ ist eine $\mathcal{A}|\mathcal{B}$-meßbare Abbildung (Bezeichnung: $X \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$), d.h.,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Falls X ein zufälliges Element ist, dann ist $X(\omega)$ eine *Realisierung von* X für beliebige $\omega \in \Omega$.

Wir sagen, dass die σ-Algebra $\mathcal{B}$ von Teilmengen von $\mathcal{S}$ durch das Mengensystem $\mathcal{M}$ erzeugt wird ($\mathcal{M}$ enthält ebenso Teilmengen von $\mathcal{S}$ als seine Elemente), wenn

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \supset \mathcal{M} \\ \mathcal{F}\text{-}\sigma\text{-Algebra auf } \mathcal{S}}} \mathcal{F}$$

(Bezeichnung: $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$).

Falls $\mathcal{S}$ ein topologischer oder metrischer Raum ist, dann wählt man oft $\mathcal{M}$ als Klasse aller offenen Mengen von $\mathcal{S}$ und nennt $\sigma(\mathcal{M})$ Borelsche σ-Algebra (Bezeichnung: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{S})$).

Beispiel 1.1.1

1. Falls $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann heißt ein zufälliges Element X eine *Zufallsvariable.*

2. Falls $\mathcal{S} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $m > 1$, dann heißt X *Zufallsvektor*. Zufallsvariablen und Zufallsvektoren betrachtet man oft in den Vorlesungen „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“ und „Stochastik I“.

3. Sei $\mathcal{S}$ die Klasse aller abgeschlossenen Mengen von $\mathbb{R}^m$. Sei

$$\mathcal{M} = \left\{ \{A \in \mathcal{S} : A \cap B \neq \emptyset\}, \quad B - \text{beliebiges Kompaktum aus } \mathbb{R}^m \right\}.$$

Dann ist $X : \Omega \to \mathcal{S}$ eine *zufällige abgeschlossene Menge.*

Als Beispiel betrachten wir n unabhängige gleichverteilte Punkte $Y_1, \ldots, Y_n \in [0,1]^m$ und $R_1, \ldots, R_n > 0$ fast sicher unabhängige Zufallsvariablen, die auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ wie $Y_1, \ldots, Y_n$ definiert sind. Betrachten wir $X = \cup_{i=1}^n B_{R_i}(Y_i)$. Dies ist offensichtlich eine zufällige Menge. Eine beispielhafte Realisierung liefert Abbildung 1.1.

Aufgabe 1.1.1
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ meßbare Räume, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$, wobei $\mathcal{M}$ eine Klasse von Teilmengen von $\mathcal{S}$ ist. Zeigen Sie, dass $X : \Omega \to \mathcal{S}$ genau dann $\mathcal{A}|\mathcal{B}$-meßbar ist, wenn $X^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{M}$.

Definition 1.1.2
Sei T eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ eine Familie von meßbaren Räumen. Eine Familie $X = \{X(t), t \in T\}$ von Zufallselementen $X(t) : \Omega \to \mathcal{S}_t$ definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ und $\mathcal{A}|\mathcal{B}_t$-meßbar für alle $t \in T$ heißt *zufällige Funktion* (assoziiert mit $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$).

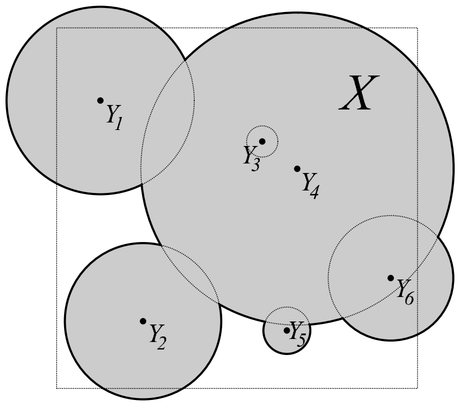

Abbildung 1.1: Beispiel einer zufälligen Menge $X = \cup_{i=1}^{6} B_{R_i}(Y_i)$

Es gilt also $X : \Omega \times T \to (\mathcal{S}_t,\ t \in T)$, d.h. $X(\omega, t) \in \mathcal{S}_t$ für alle $\omega \in \Omega$, $t \in T$ und $X(\cdot, t) \in \mathcal{A}|\mathcal{B}_t$, $t \in T$. Sehr oft wird ω in der Bezeichnung unterlassen und man schreibt $X(t)$ an Stelle von $X(\omega, t)$. In den meisten Fällen hängt auch $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)$ nicht von $t \in T$ ab: $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ für alle $t \in T$.

Spezialfälle zufälliger Funktionen:

1. $T \subseteq \mathbb{Z} : X$ heißt dann *zufällige Folge* oder *stochastischer Prozess in diskreter Zeit*.
   Beispiel: $T = \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

2. $T \subseteq \mathbb{R} : X$ heißt *stochastischer Prozess in stetiger Zeit*.
   Beispiel: $T = \mathbb{R}_+$, $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $\mathbb{R}$.

3. $T \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2 : X$ heißt *zufälliges Feld*.
   Beispiel: $T = \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{R}^d_+$, $\mathbb{R}^d$, $[a, b]^d$.

4. $T \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : X$ heißt *Mengen-indizierter Prozess*.
   Falls $X(t)$ fast sicher nichtnegativ und σ-additiv auf der σ-Algebra T ist, dann wird X *zufälliges Maß* genannt.

Die Tradition, die Indexmenge durch T zu bezeichnen, kommt von der Interpretation von $t \in T$ in den Fällen 1 und 2 als *Zeitparameter*.

Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt $\{X(\omega, t),\ t \in T\}$ eine *Trajektorie* bzw. ein *Pfad* der zufälligen Funktion X.

Wir möchten zeigen, dass die zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ ein zufälliges Element im entsprechenden Funktionsraum ist, welcher mit einer σ-Algebra ausgestattet ist, die jetzt spezifiziert wird.

Sei $\mathcal{S}_T = \prod_{t \in T} \mathcal{S}_t$ das kartesische Produkt von $\mathcal{S}_t$, $t \in T$, d.h., $X \in \mathcal{S}_T$ falls $X(t) \in \mathcal{S}_t$, $t \in T$. Die *elementare Zylindermenge* in $\mathcal{S}_T$ wird definiert als

$$C_T(B_t) = \{X \in \mathcal{S}_t : X(t) \in B_t\},$$

wobei $t \in T$ ein ausgewählter Punkt aus T und $B_t \in \mathcal{B}_t$ eine Teilmenge in $\mathcal{B}_t$ ist. $C_T(B_t)$ enthält also alle Trajektorien X, die durch das „Tor“ B_t gehen, siehe Abbildung 1.2.

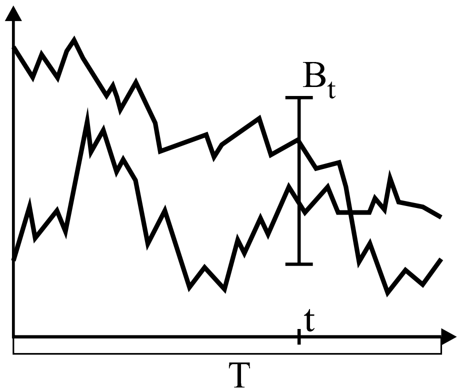

Abbildung 1.2: Trajektorien, die ein „Tor“ B_t passieren.

Definition 1.1.3
Die *zylindrische σ-Algebra* $\mathcal{B}_T$ wird eingeführt als eine σ-Algebra erzeugt in $\mathcal{S}_T$ durch die Familie von allen Elementarzylindern. Man bezeichnet sie durch $\mathcal{B}_T = \otimes_{t\in T}\mathcal{B}_t$. Falls $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ für alle $t \in T$, dann schreibt man $\mathcal{B}^T$ an Stelle von $\mathcal{B}_T$.

Lemma 1.1.1
Die Familie $\{X = X(t),\ t \in T\}$ ist eine zufällige Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ mit Phasenräumen $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ genau dann, wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $\omega \mapsto X(\omega, \cdot)$ $\mathcal{A}|\mathcal{B}_T$-meßbar ist.

Aufgabe 1.1.2
Beweisen Sie Lemma 1.1.1.

Definition 1.1.4
Sei X ein zufälliges Element: $X : \Omega \to \mathcal{S}$, d.h. X sei $\mathcal{A}|\mathcal{B}$-meßbar. Die *Verteilung von X* ist das Wahrscheinlichkeitsmaß P_X auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, so dass $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$.

Lemma 1.1.2
Ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ kann als die Verteilung eines Zufallselementes X betrachtet werden.

Beweis Setze $\Omega = \mathcal{S}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathsf{P} = \mu$ und $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$. □

Wann existiert eine zufällige Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften? Eine zufällige Funktion, die aus unabhängigen Zufallselementen besteht, existiert immer. Diese Behauptung ist bekannt.

Theorem 1.1.1 (Lomnicki, Ulam):
Sei $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t, \mu_t)_{t\in T}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Es existiert eine zufällige Folge $X = \{X(t),\ t \in T\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ (assoziiert mit $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$), so dass

1. $X(t),\ t \in T$ unabhängige Zufallselemente sind.

2. $\mathsf{P}_{X(t)} = \mu_t$ auf $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$.

Viele wichtige Zufallsprozesse sind auf Basis von unabhängigen zufälligen Elementen konstruiert; vgl. Beispiele im Abschnitt 1.2.

Definition 1.1.5
Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine zufällige Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ mit Phasenraum $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$. Die *endlich-dimensionalen Verteilungen von* X werden definiert als das Verteilungsgesetz $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ von $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$ auf $(\mathcal{S}_{t_1,\ldots,t_n}, \mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_n})$, für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, wobei $\mathcal{S}_{t_1,\ldots,t_n} = \mathcal{S}_{t_1} \times \ldots \times \mathcal{S}_{t_n}$ und $\mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_n} = \mathcal{B}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{t_n}$, die σ-Algebra in $\mathcal{S}_{t_1,\ldots,t_n}$ ist, die von allen Mengen $B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$, $B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$, $i = 1, \ldots, n$, erzeugt wird, d.h., $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(C) = \mathsf{P}((X(t_1), \ldots, X(t_n))^T \in C)$, $C \in \mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_n}$. Insbesondere für $C = B_1 \times \ldots \times B_n$, $B_k \in \mathcal{B}_{t_k}$:

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \mathsf{P}(X(t_1) \in B_1, \ldots, X(t_n) \in B_n).$$

Aufgabe 1.1.3
Zeigen Sie, dass $X_{t_1,\ldots,t_n} = (X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$ ein $\mathcal{A}|\mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_n}$-meßbares Zufallselement ist.

Definition 1.1.6
Sei $\mathcal{S}_t = \mathbb{R}$ für alle $t \in T$. Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *symmetrisch*, falls alle ihre endlich-dimensionalen Verteilungen symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaße sind, d.h., $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(A) = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(-A)$ für $A \in \mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_n}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$. Dabei bedeutet $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(-A) = \mathsf{P}((-X(t_1), \ldots, -X(t_n))^T \in A)$.

Aufgabe 1.1.4
Zeigen Sie, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen einer zufälligen Funktion X folgende Eigenschaften besitzen: für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $B_k \in \mathcal{S}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$ und eine beliebige Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ von $(1, \ldots, n)$ gilt:

1. *Symmetrie*: $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \mathsf{P}_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(B_{i_1} \times \ldots \times B_{i_n})$
2. *Konsistenz*: $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_{n-1} \times \mathcal{S}_{t_n}) = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(B_1 \times \ldots \times B_{n-1})$

Folgender Satz zeigt, dass diese Eigenschaften hinreichend sind, um die Existenz einer zufälligen Funktion X mit vorgegebenen endlich-dimensionalen Verteilungen zu beweisen.

Theorem 1.1.2 (Kolmogorov):
Sei $\{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n},\ n \in \mathbb{N},\ \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, welche die Bedingungen 1 und 2 von Aufgabe 1.1.4 erfüllen. Dann existiert eine zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ mit endlich-dimensionalen Verteilungen $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$.

Beweis Siehe [13], Abschnitt II.9. □

Dieser Satz gilt auch auf allgemeineren (jedoch nicht beliebigen!) Räumen als $\mathbb{R}^m$, auf sog. *Borel-Räumen*, die in einem gewissen Sinne isomorph zu $([0,1], \mathcal{B}[0,1])$ oder einem Teilraum davon sind.

Definition 1.1.7
Sei $X = \{X(t),\ t \in T\}$ eine zufällige Funktion mit Werten in $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, d.h., $X(t) \in \mathcal{S}$ fast sicher für beliebige $t \in T$. X heißt *meßbar*, falls die Abbildung $X : (\omega, t) \mapsto X(\omega, t) \in \mathcal{S}$, $(\omega, t) \in \Omega \times T$, $\mathcal{A} \otimes C|\mathcal{B}$-meßbar ist.

Somit liefert die Definition 1.1.7 nicht nur die Meßbarkeit von X bzgl. $\omega \in \Omega$: $X(\cdot, t) \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ für alle $t \in T$, sondern $X(\cdot, \cdot) \in \mathcal{A} \otimes C|\mathcal{B}$ als Funktion von (ω, t). Die Meßbarkeit von X ist dann von Bedeutung, wenn $X(\omega, t)$ zu zufälligen Zeitpunkten $\tau : \Omega \to T$ betrachtet wird: $X(\omega, \tau(\omega))$. Dies ist insbesondere in der Martingaltheorie der Fall, wenn τ eine sog. Stoppzeit für X ist. Denn die Verteilung von $X(\omega, \tau(\omega))$ kann stark von der Verteilung von $X(\omega, t)$, $t \in T$, abweichen.

1.2 Elementare Beispiele

Für die explizite Konstruktion kann der Satz von Kolmogorov nur in wenigen Fällen direkt benutzt werden, da bei vielen zufälligen Funktionen ihre endlich-dimensionalen Verteilungen nicht explizit angegeben werden können. In diesen Fällen konstruiert man eine neue zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ als $X(t) = g(t, Y_1, Y_2, \ldots)$, $t \in T$, wobei g eine meßbare Funktion ist und $\{Y_n\}$ eine Folge von Zufallselementen (auch zufälligen Funktionen) ist, deren Existenz bereits sichergestellt wurde. Hier geben wir einige Beispiele dafür.

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine reellwertige zufällige Funktion mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

1. *Weißes Rauschen*:

   Definition 1.2.1
   Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *weißes Rauschen*, falls alle $X(t)$, $t \in T$, unabhängige und identisch verteilte (u.i.v.) Zufallsvariablen sind.

   Weißes Rauschen existiert nach dem Satz 1.1.1. Es wird verwendet um das Rauschen in (elektromagnetischen oder akustischen) Signalen darzustellen. Falls $X(t) \sim \text{Ber}(p)$, $p \in (0,1)$, $t \in T$, so spricht man von *Salt-and-pepper Rauschen*, also vom binären Rauschen, das bei Übertragung von binären Daten in Computer-Netzwerken auftritt. Falls $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, $t \in T$, so wird X *Gauß'sches weißes Rauschen* genannt. Es tritt z.B. in akustischen Signalen auf.

2. *Gauß'sche zufällige Funktion*:

   Definition 1.2.2
   Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *Gauß'sch*, falls alle ihre endlich-dimensionalen Verteilungen Gauß'sch sind, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \subset T$ gilt

   $$X_{t_1,\ldots,t_n} = ((X(t_1), \ldots, X(t_n))^\top \sim \mathcal{N}(\mu_{t_1,\ldots,t_n}, \sum_{t_1,\ldots,t_n}),$$

   wobei der Mittelwert durch $\mu_{t_1,\ldots,t_n} = (\mathsf{E}X(t_1), \ldots, \mathsf{E}X(t_n))^\top$ und die Kovarianzmatrix durch $\sum_{t_1,\ldots,t_n} = ((\mathsf{cov}(X(t_i), X(t_j))_{i,j=1}^n$ gegeben ist.

   Aufgabe 1.2.1
   Zeigen Sie, dass die Verteilung einer Gauß'schen zufälligen Funktion X eindeutig durch ihre Mittelwertfunktion $\mu(t) = \mathsf{E}X(t), t \in T$, bzw. Kovarianzfunktion $C(s,t) = \mathsf{E}[X(s)X(t)]$, $s, t \in T$, bestimmt wird.

   Als Beispiel eines Gauß'schen Prozesses kann der sog. *Wiener-Prozess* (oder *Brown'sche Bewegung*) $X = \{X(t), t \geq 0\}$ dienen, der den Erwartungswert Null ($\mu(t) \equiv 0, t \geq 0$) und die Kovarianzfunktion $C(s,t) = \min\{s,t\}$, $s, t \geq 0$ hat. Normalerweise fordert man zusätzlich, dass die Pfade von X stetige Funktionen sind.

   Die Regularitätseigenschaften der Pfade von zufälligen Funktionen werden wir detaillierter im Abschnitt 1.3 erforschen. Jetzt können wir sagen, dass ein solcher Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 (mit fast sicher stetigen Trajektorien) existiert.

   Aufgabe 1.2.2
   Zeigen Sie, dass Gauß'sches Weißes Rauschen eine Gauß'sche Zufallsfunktion ist.

3. *Lognormal- und χ^2-Funktionen*:
   Die zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ heißt *lognormal*, falls $X(t) = e^{Y(t)}$, wobei $Y = \{Y(t), t \in T\}$ eine Gauß'sche zufällige Funktion ist. X heißt χ^2*-Funktion*, falls $X(t) = \|Y(t)\|^2$, wobei $Y = \{Y(t), t \in T\}$ eine Gauß'sche zufällige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^n$ ist, für die $Y(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{I})$, $t \in T$; hier ist I die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Es gilt dann $X(t) \sim \chi^2_n$, $t \in T$.

4. *Kosinus-Welle*:
   $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ wird definiert durch $X(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi Y + tZ)$, wobei $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$ und Z eine Zufallsvariable ist, die von Y unabhängig ist.

   Aufgabe 1.2.3
   Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Kosinus-Wellen. Bestimmen Sie den schwachen Grenzwert der endlich dimensionalen Verteilungen der zufälligen Funktion $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k(t),\ t \in \mathbb{R}\right\}$ für $n \to \infty$.

5. *Poisson-Prozess*:
   Sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen $Y_n \sim \operatorname{Exp}(\lambda), \lambda > 0$. Der stochastische Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definiert als $X(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} Y_k \leq t\}$ heißt *Poisson-Prozess* mit Intensität $\lambda > 0$. $X(t)$ zählt die Anzahl gewisser Ereignisse bis zum Zeitpunkt $t > 0$, wobei das typische Intervall zwischen zwei solchen Ereignissen eine $\operatorname{Exp}(\lambda)$-Verteilung besitzt. Diese Ereignisse können z.B. eine Schadensmeldung eines Versicherers, das Registrieren eines Elementarteilchens im Geigerzähler, usw. sein. Dann ist $X(t)$ die Schaden- bzw. Teilchenanzahl im Zeitintervall $[0, t]$.

1.3 Regularitätseigenschaften von Trajektorien

Der Satz von Kolmogorov gibt die Existenz der Verteilung einer zufälligen Funktion mit vorgegebenen endlich-dimensionalen Verteilungen an. Jedoch er sagt nichts über die Pfadeigenschaften von X aus. Dies ist auch verständlich, denn alle zufälligen Objekte sind in der Wahrscheinlichkeitstheorie im fast sicheren Sinne (f.s.) definiert, also bis auf eine Menge $A \subset \Omega$ mit $\mathsf{P}(A) = 0$.

Beispiel 1.3.1
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \nu_1)$, wobei ν_1 das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ ist. Definieren wir $\{X = X(t),\ t \in [0,1]\}$ durch $X(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$ und $Y = \{Y(t),\ t \in [0,1]\}$ durch

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & t = U, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $U(\omega) = \omega$, $\omega \in [0,1]$, eine $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariable definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ ist. Da $\mathsf{P}(Y(t) = 0) = 1$, $t \in T$, ist, weil $\mathsf{P}(U = t) = 0$, $t \in T$, ist es klar, dass $X \stackrel{d}{=} Y$. Dennoch besitzen X und Y unterschiedliche Pfadeigenschaften, da X stetige und Y sprunghafte Trajektorien hat, und $\mathsf{P}(X(t) = 0,\ \forall t \in T) = 1$, wobei $\mathsf{P}(Y(t) = 0,\ \forall t \in T) = 0$.

Es kann sein, dass die „Ausnahmemenge“ A (siehe oben) für $X(t)$ für jedes $t \in T$ sehr unterschiedlich ist. Deshalb fordert man, dass alle $X(t)$, $t \in T$, simultan auf einer Teilmenge $\Omega_0 \subseteq \mathcal{N}$ mit $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$ definiert sind. Die so definierte zufällige Funktion $\tilde{X} : \Omega_0 \times T \to \mathbb{R}$ heißt *Modifikation* von $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$. X und $\tilde{X}$ unterscheiden sich auf einer Menge Ω/Ω_0 von Wahrscheinlichkeit Null. Deshalb meinen wir später, wenn wir sagen, dass „Zufällige Funktion X eine Eigenschaft C besitzt“ dass eine Modifikation von X mit dieser Eigenschaft C existiert.

Definition 1.3.1
Die zufälligen Funktionen $X = \{X(t),\ t \in T\}$ und $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ heißen *(stochastisch) äquivalent*, falls

$$B_t = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \neq Y(\omega, t)\} \in A,\ t \in T,$$

und $\mathsf{P}(B_t) = 0,\ t \in T$.

Man sagt auch, dass X und Y Versionen einer und derselben zufälligen Funktion sind. Es ist klar, dass alle Modifikationen (oder Versionen) von X äquivalent zu X sind.

Aufgabe 1.3.1
Beweisen Sie, dass die zufälligen Funktionen X und Y im Beispiel 1.3.1 stochastisch äquivalent sind.

Definition 1.3.2
Die zufälligen Funktionen $X = \{X(t),\ t \in T\}$ und $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ (nicht unbedingt auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert) heißen *äquivalent in Verteilung*, falls $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$ auf $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)$. Bezeichnung: $X \stackrel{d}{=} Y$.

Nach dem Satz 1.1.2 ist es ausreichend für die Äquivalenz in Verteilung von X und Y, wenn sie dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen. Es ist klar, dass die stochastische Äquivalenz die Äquivalenz in Verteilung impliziert, jedoch nicht umgekehrt.

Definition 1.3.3
Die zufälligen Funktionen $X = \{X(t),\ t \in T\}$ und $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ assoziiert mit $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ haben *äquivalente Trajektorien* (oder heißen auch *stochastisch ununterscheidbar*), falls

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \neq Y(\omega, t) \text{ für ein } t \in T\} \in \mathcal{A}$$

und $\mathsf{P}(A) = 0$.

Dieser Begriff bedeutet, das X und Y Pfade haben, die mit Wahrscheinlichkeit 1 übereinstimmen. Falls der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *vollständig* ist (d.h. aus $A \in \mathcal{A} : \mathsf{P}(A) = 0$ folgt für alle $B \subset A$: $B \in \mathcal{A}$ (und dann $\mathsf{P}(B) = 0$)), dann sind ununterscheidbare Prozesse stochastisch äquivalent.

Seien nun T und $\mathcal{S}$ *Banach-Räume* mit den Normen $|\cdot|_T$ bzw. $|\cdot|_{\mathcal{S}}$. Die zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ sei nun auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ definiert mit Werten in $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$.

Definition 1.3.4
Die zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ heißt

a) *stochastisch stetig auf* T, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{\mathsf{P}} X(t)$, für beliebige $t \in T$, d.h.

$$\mathsf{P}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} > \varepsilon) \xrightarrow[s \to t]{} 0,\ \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

b) L^p*-stetig auf* T, $p \geq 1$, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{L^p} X(t)$, $t \in T$, d.h. $\mathsf{E}|X(s) - X(t)|^p \xrightarrow[s \to t]{} 0$. Für $p = 2$ benutzt man die spezielle Bezeichnung „Stetigkeit im quadratischen Mittel“.

c) *f.s. stetig auf* T, falls $X(s) \xrightarrow[s \to t]{f.s.} X(t)$, $t \in T$, d.h., $\mathsf{P}(X(s) \xrightarrow[s \to t]{} X(t)) = 1$, $t \in T$.

d) *stetig*, falls alle Trajektorien von X stetige Funktionen sind.

In Anwendungen interessiert man sich für die Fälle c) und d), obwohl die schwächste Form der Stetigkeit die stochastische Stetigkeit ist.

$$\boxed{L^p\text{-Stetigkeit}} \Longrightarrow \boxed{\text{Stochastische Stetigkeit}} \Longleftarrow \boxed{\text{f.s. Stetigkeit}} \Longleftarrow \boxed{\text{Stetigkeit aller Pfade}}$$

Warum sind Fälle c) und d) wichtig? Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 1.3.2
Sei $T = [0,1]$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ sei ein kanonischer Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}$, d.h. $\Omega = \prod_{t\in[0,1]} \mathbb{R}$. Sei $X = \{X(t),\ t \in [0,1]\}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Nicht alle Ereignisse sind aber Elemente von A, wie z.B. $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) = 0 \text{ für alle } t \in [0,1]\} = \cap_{t\in[0,1]} \{X(\omega, t) = 0\}$, weil dies ein Schnitt von messbaren Ereignissen aus $\mathcal{A}$ in überzählbarer Anzahl ist. Falls allerdings X stetig ist, dann sind auch alle seine Pfade stetige Funktionen und man kann $A = \cap_{t\in D} \{X(\omega, t) = 0\}$ darstellen lassen, wobei D eine dichte abzählbare Teilmenge von $[0,1]$ ist, z.B., $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dann gilt aber $A \in \mathcal{A}$.

Es ist allerdings in vielen Anwendungen (wie z.B. in der Finanzmathematik) nicht realistisch, stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden als Modelle für reale Phänomene zu betrachten. Deshalb wird eine größere Klasse von möglichen Trajektorien von X erlaubt: die sog. *càdlàg-Klasse* (càdlàg = continue à droite, limitée à gonche (fr.)).

Definition 1.3.5
Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ heißt *càdlàg*, wenn alle seine Trajektorien rechtsseitig stetige Funktionen sind, die linksseitige Grenzwerte besitzen.

Jetzt wollen wir die Eigenschaften der oben eingeführten Stetigkeitsbegriffen näher betrachten. Es stellt sich z.B. fest, dass die stochastische Stetigkeit eine Eigenschaft der zweidimensionalen Verteilung $\mathsf{P}_{s,t}$ von X ist, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 1.3.1
Sei $X = \{X(t),\ t \in T\}$ eine zufällige Funktion assoziiert mit $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{S}$ und T Banach-Räume sind. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $X(s) \xrightarrow[s\to t_0]{\mathsf{P}} Y$,

b) $\mathsf{P}_{s,t} \xrightarrow[s,t\to t_0]{d} \mathsf{P}_{(Y,Y)}$,

wobei $t_0 \in T$ und Y ein $\mathcal{B}$-Zufallselement ist. Für die stochastische Stetigkeit von X sollen $t_0 \in T$ beliebig und $Y = X(t_0)$ gewählt werden.

Beweis *a)* $\Rightarrow$ *b)*
$X(s) \xrightarrow[s\to t_0]{\mathsf{P}} Y$ bedeutet $(X(s), X(t))^\top \xrightarrow[s,t\to t_0]{\mathsf{P}} (Y,Y)^\top$. Daraus folgt $\mathsf{P}_{s,t} \xrightarrow{d} \mathsf{P}_{(Y,Y)}$, weil $\xrightarrow{\mathsf{P}}$-Konvergenz strenger als $\xrightarrow{d}$-Konvergenz ist.
b) $\Rightarrow$ *a)*
Für beliebiges $\varepsilon > 0$ betrachten wir eine stetige Funktion $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $g_\varepsilon(0) = 0$, $g_\varepsilon(x) = 1$, $x \notin B_\varepsilon(0)$. Es gilt für alle $s, t \in T$, dass

$$\mathsf{E}g_\varepsilon(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}}) = \mathsf{P}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} > \varepsilon) + \mathsf{E}(g_\varepsilon(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}})\mathsf{E}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} \leq \varepsilon)),$$

daher $\mathsf{P}(|X(s)-X(t)|_{\mathcal{S}}>\varepsilon)\leq \mathsf{E}g_\varepsilon(|X(s)-X(t)|_{\mathcal{S}})=\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{S}} g_\varepsilon(|x-y|_{\mathcal{S}})\mathsf{P}_{s,t}(d(x,y)) \underset{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}}{\longrightarrow}$ $\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{S}} g_\varepsilon(|x-y|_{\mathcal{S}})\mathsf{P}_{(Y,Y)}(d(x,y))=0$, weil $\mathsf{P}_{(Y,Y)}$ auf $\{(x,y)\in\mathcal{S}^2 : x=y\}$ konzentriert ist und $g_\varepsilon(0)=0$. Daher ist $\{X(s)\}_{s\to t_0}$ eine fundamentale Folge (in Wahrscheinlichkeit), weshalb $X(s)\xrightarrow[s\to t_0]{\mathsf{P}} Y$. □

Es kann sein, dass X stochastisch stetig ist, obwohl alle Pfade von X Sprünge haben, d.h. X kann keine f.s. stetige Modifikation besitzen. Die anschauliche Erklärung dessen ist, dass solche X mit Wahrscheinlichkeit Null einen Sprung für konkretes $t\in T$ haben können. Deshalb treten Sprünge der Pfade von X immer an anderen Stellen $t\in T$ auf.

Aufgabe 1.3.2
Zeigen Sie, dass der Poisson-Prozess stochastisch stetig ist, obwohl er keine f.s. stetige Modifikation besitzt.

Aufgabe 1.3.3
Sei T kompakt. Zeigen Sie, dass falls X stochastisch stetig auf T ist, dann ist es auch gleichmäßig stochastisch stetig, d.h., für alle $\varepsilon,\eta>0$ $\exists\delta>0$, so dass für alle $s,t\in T$ mit $|s-t|_T<\delta$ gilt: $\mathsf{P}(|X(s)-X(t)|_{\mathcal{S}}>\varepsilon)<\eta$.

Nun sei $\mathcal{S}=\mathbb{R}$, $\mathsf{E}X^2(t)<\infty$, $t\in T$, $\mathsf{E}X(t)=0$, $t\in T$. Sei $C(s,t)=\mathsf{E}\left[X(s)X(t)\right]$ die Kovarianzfunktion von X.

Lemma 1.3.2
Für alle $t_0\in T$ und eine Zufallsvariable Y mit $\mathsf{E}Y^2<\infty$ sind folgende Behauptungen äquivalent:

a) $X(s)\xrightarrow[s\to t_0]{L^2} Y$

b) $C(s,t)\xrightarrow[s,t\to t_0]{} \mathsf{E}Y^2$

Beweis *a) ⇒ b)*
Die Behauptung folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
|C(s,t)-\mathsf{E}Y^2| &= |\mathsf{E}(X(s)X(t))-\mathsf{E}Y^2)| = |\mathsf{E}\left[(X(s)-Y+Y)(X(t)-Y+Y)\right]-\mathsf{E}Y^2|\\
&\leq \mathsf{E}|(X(s)-Y)(X(t)-Y)|+\mathsf{E}|(X(s)-Y)Y|+\mathsf{E}|(X(t)-Y)Y|\\
&\leq \sqrt{\underbrace{\mathsf{E}(X(s)-Y)^2 \quad \mathsf{E}(X(t)-Y)^2}_{||X(s)-Y||^2_{L^2}\cdot||X(t)-Y||^2_{L^2}}}\\
&\quad + \sqrt{\mathsf{E}Y^2\underbrace{\mathsf{E}(X(s)-Y)^2}_{||X(s)-Y||^2_{L^2}}}+\sqrt{\mathsf{E}Y^2\underbrace{\mathsf{E}(X(t)-Y)^2}_{||X(t)-Y||^2_{L^2}}}\xrightarrow[s,t\to t_0]{} 0
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung a).

b) ⇒ a)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X(s)-X(t))^2 &= \mathsf{E}(X(s))^2-2\mathsf{E}[X(s)X(t)]+\mathsf{E}(X(t))^2\\
&= C(s,s)+C(t,t)-2C(s,t)\xrightarrow[s,t\to t_0]{} 2\mathsf{E}Y^2-2\mathsf{E}Y^2=0.
\end{aligned}$$

Daher ist $\{X(s),\ s\to t_0\}$ eine fundamentale Folge im L^2-Sinne, und es folgt $X(s)\xrightarrow[s\to t_0]{L^2} Y$. □

Eine zufällige Funktion X, die stetig im mittleren quadratischen Sinne ist, kann immer noch unstetige Trajektorien besitzen. In den meisten Fällen, die praktische Relevanz besitzen, hat X jedoch eine f.s. stetige Modifikation. Dies werden wir später in Form eines Satzes präziser machen.

Folgerung 1.3.1
Die zufällige Funktion X, die den Voraussetzungen des Lemmas 1.3.2 genügt, ist stetig auf T im mittleren quadratischen Sinne genau dann, wenn ihre Kovarianzfunktion $C : T^2 \to \mathbb{R}$ stetig auf der Diagonalen $\operatorname{diag} T^2 = \{(s,t) \in T^2 : s = t\}$ ist, d.h., $\lim_{s,t\to t_0} C(s,t) = C(t)$ für alle $t_0 \in T$.

Beweis Wähle $Y = X(t_0)$ in Lemma 1.3.2. □

Bemerkung 1.3.1
Falls X nicht zentriert ist, dann fordert man die Stetigkeit von $\mu(\cdot)$ zusammen mit der Stetigkeit von C auf $\operatorname{diag} T^2$, um die L^2-Stetigkeit von X auf T zu gewährleisten.

Aufgabe 1.3.4
Geben Sie ein Beispiel eines stochastischen Prozesses mit f.s. unstetigen Trajektorien, der L^2-stetig ist.

Nun betrachten wir die Eigenschaft der (f.s.) Stetigkeit etwas näher. Wie vorher erwähnt, können wir lediglich von einer stetigen Modifikation oder Version eines Prozesses sprechen. Die Möglichkeit,eine solche Version zu besitzen, hängt ebenso von den Eigenschaften der zweidimensionalen Verteilungen des Prozesses ab, wie folgender Satz (ursprünglich bewiesen von A. Kolmogorov) zeigt.

Theorem 1.3.1
Sei $X = \{X(t),\ t \in [a,b]\}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, ein reellwertiger stochastischer Prozess X hat eine stetige Version, falls es Konstanten $\alpha, c, \delta > 0$ gibt, so dass

$$\mathsf{E}|X(t+h) - X(t)|^\alpha < c|h|^{1+\delta},\ t \in (a,b), \tag{1.3.1}$$

für ausreichend kleine $|h|$.

Beweis Siehe, z.B. [7], Theorem 2.23. □

Nun wenden wir uns den Prozessen mit càdlàg-Trajektorien zu. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Theorem 1.3.2
Sei $X = \{X(t),\ t \ge 0\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess und D eine abzählbare dichte Teilmenge von $[0,\infty)$. Falls

a) X stochastisch rechtsseitig stetig ist, d.h., $X(t+h) \xrightarrow[h\to+0]{\mathsf{P}} X(t)$, $t \in [0,+\infty)$,

b) die Trajektorien von X für jedes $t \in D$ endliche rechts- und linksseitige Grenzwerte haben, d.h., $\exists \lim_{h\to\pm 0} X(t+h)$, $t \in D$ f.s.,

dann hat X eine Version mit f.s. càdlàg-Pfaden.

Ohne Beweis.

Lemma 1.3.3
Seien $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ und $\{Y = Y(t),\ t \geq 0\}$ zwei Versionen einer zufälligen Funktion, beide definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, mit der Eigenschaft, dass X und Y f.s. rechtsseitig stetige Trajektorien haben. Dann sind X und Y ununterscheidbar.

Beweis Seien Ω_X, Ω_Y „Ausnahmemengen", für die die Trajektorien von X bzw. von Y nicht rechtsseitig stetig sind. Es gilt $\mathsf{P}(\Omega_X) = \mathsf{P}(\Omega_Y) = 0$. Betrachte $A_t = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \neq Y(\omega, t)\}$, $t \in [0, +\infty)$ und $A = \cup_{t \in \mathbb{Q}_+} A_t$, wobei $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$. Da X und Y stochastisch äquivalent sind, gilt $\mathsf{P}(A) = 0$ und deshalb $P(\tilde{A}) = \mathsf{P}(A \cup \Omega_X \cup \Omega_Y) \leq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega_X) + \mathsf{P}(\Omega_Y) = 0$, wobei $\tilde{A} = A \cup \Omega_X \cup \Omega_Y$. Somit gilt $X(\omega, t) = Y(\omega, t)$ für $t \in \mathbb{Q}_+$ und $\omega \in \Omega \setminus \tilde{A}$. Wir beweisen dies nun für alle $t \geq 0$. Für beliebiges $t \geq 0$ existiert eine Folge $\{t_n\} \subset \mathbb{Q}_+$, so dass $t_n \downarrow t$. Da $X(\omega, t_n) = Y(\omega, t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega \setminus \tilde{A}$, gilt $X(\omega, t) = \lim_{n \to \infty} X(\omega, t_n) = \lim_{n \to \infty} Y(\omega, t_n) = Y(\omega, t)$ für $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega \setminus \tilde{A}$. Deshalb sind X und Y ununterscheidbar. □

Folgerung 1.3.2
Falls càdlàg-Prozesse $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ und $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ Versionen einer zufälligen Funktion sind, dann sind sie ununterscheidbar.

1.4 Differenzierbarkeit von Trajektorien

Sei T ein linearer normierter Raum.

Definition 1.4.1
Eine reellwertige zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ ist *differenzierbar auf T in Richtung $h \in T$ stochastisch, im L^p-Sinne,* $p \geq 1$, oder *f.s.*, falls es

$$\lim_{l \to 0} \frac{X(t + hl) - X(t)}{l} = X_h'(t),\ t \in T$$

existiert im entsprechenden Sinne, also stochastisch, im L^p-Raum oder f.s..

Die Lemmata 1.3.2 - 1.3.3 zeigen, dass die stochastische Differenzierbarkeit eine Eigenschaft ist, die durch dreidimensionale Verteilungen von X bestimmt ist (weil die gemeinsame Verteilung von $\frac{X(t+hl)-X(t)}{l}$ und $\frac{X(t+hl')-X(t)}{l'}$ schwach konvergieren soll), wobei die Differenzierbarkeit im mittleren quadratischen Sinne durch die Glattheit der Kovarianzfunktion $C(s,t)$ bestimmt wird.

Aufgabe 1.4.1
Zeigen Sie, dass

1. der Wiener-Prozess nicht stochastisch differenzierbar auf $[0, \infty)$ ist.
2. der Poisson-Prozess stochastisch differenzierbar auf $[0, \infty)$ ist, jedoch nicht im L^p-Mittel, $p \geq 1$.

Lemma 1.4.1
Eine zentrierte zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ (d.h., $\mathsf{E}X(t) \equiv 0,\ t \in T$), ist L^2-differenzierbar in $t \in T$ in Richtung $h \in T$, falls ihre Kovarianzfunktion C zweimal differenzierbar in (t,t) in Richtung h ist, d.h., falls $C''_{hh}(t,t) = \left.\frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s_h \partial t_h}\right|_{s=t}$. $X_h'(t)$ ist L^2-stetig in

$t \in T$, falls $C''_{hh}(s,t) = \frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s_h \partial t_h}$ stetig in $s = t$ ist. Daher ist $C''_{hh}(s,t)$ die Kovarianzfunktion von $X'_h = \{X'_h(t),\ t \in T\}$.

Beweis Nach Lemma 1.3.3 reicht es zu zeigen, dass

$$I = \lim_{l,l' \to 0} \mathsf{E}\left(\frac{X(t+lh) - X(t)}{l} \cdot \frac{X(s+l'h) - X(s)}{l'}\right)$$

existiert für $s = t$. In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ll'}\Big(C(t+lh, s+l'h) - C(t+lh, s) - C(t, s+l'h) + C(t,s)\Big) \\ &= \frac{1}{l}\left(\frac{C(t+lh, s+l'h) - C(t+lh, s)}{l'} - \frac{C(t, s+l'h) - C(t,s)}{l'}\right) \xrightarrow[l,l' \to 0]{} C''_{hh}(s,t)\,. \end{aligned}$$

Alle anderen Aussagen des Lemmas folgen aus dieser Relation. □

Bemerkung 1.4.1
Die Eigenschaften der L^2-Differenzierbarkeit und der f.s. Differenzierbarkeit von zufälligen Funktionen sind definiert im folgenden Sinne: es gibt stochastische Prozesse, die L^2-differenzierbare Pfade haben, obwohl sie f.s. unstetig sind, und umgekehrt sind Prozesse mit f.s. differenzierbaren Pfaden nicht immer L^2-differenzierbar, weil z.B. die erste Ableitung ihrer Kovarianzfunktion nicht stetig ist.

Aufgabe 1.4.2
Geben Sie entsprechende Beispiele an!

1.5 Momente und Kovarianz

Sei $X = \{X(t),\ t \in T\}$ eine zufällige Funktion, die reellwertig ist, und sei T ein beliebiger Indexraum.

Definition 1.5.1
Das *gemischte Moment* $\mu^{(j_1,\ldots,j_n)}(t_1,\ldots,t_n)$ von X der Ordnung $(j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{N}^n$, $t_1,\ldots,t_n \in T$ ist gegeben durch $\mu^{(j_1,\ldots,j_n)}(t_1,\ldots,t_n) = \mathsf{E}\left[X^{j_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot X^{j_n}(t_n)\right]$, vorausgesetzt, dass dieser Erwartungswert existiert und endlich ist. Dann ist es ausreichend vorauszusetzen, dass $\mathsf{E}|X(t)|^j < \infty$ für alle $t \in T$ und $j = j_1 + \ldots + j_n$.

Wichtige Spezialfälle:

1. $\mu(t) = \mu^{(1)}(t) = \mathsf{E}X(t)$, $t \in T$ – *Mittelwertfunktion von* X.

2. $\mu^{(1,1)}(s,t) = \mathsf{E}[X(s)X(t)] = C(s,t)$ – *(nicht-zentrierte) Kovarianzfunktion von* X. Sie ist zu unterscheiden von der *zentrierten Kovarianzfunktion*: $K(s,t) = \mathsf{cov}((X(s), X(t)) = \mu^{(1,1)}(s,t) - \mu(s)\mu(t)$, $s,t \in T$.

Aufgabe 1.5.1
Zeigen Sie, dass die zentrierte Kovarianzfunktion einer reellwertigen zufälligen Funktion X

1. *symmetrisch* ist, d.h., $K(s,t) = K(t,s)$, $s,t \in T$.

2. *positiv semidefinit* ist, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i, t_j) z_i z_j \geq 0.$$

3. $K(t,t) = \mathsf{var}\, X(t)$ erfüllt, $t \in T$.

Die Eigenschaft 2) gilt auch für die nicht-zentrierte Kovarianzfunktion $C(s,t)$.

Die Mittelwertfunktion $\mu(t)$ zeigt einen (nicht zufälligen) Trend dar. Falls sie bekannt ist, kann die zufällige Funktion X zentriert werden, indem man eine zufällige Funktion $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ mit $Y(t) = X(t) - \mu(t)$, $t \in T$ betrachtet.

Die Kovarianzfunktion $K(s,t)$ bzw. $C(s,t)$ enthält Informationen über die Abhängigkeitsstruktur von X. Manchmal wird statt K bzw. C die Korrelationsfunktion $R(s,t) = \frac{K(s,t)}{\sqrt{K(s,s)K(t,t)}}$ verwendet, für alle $s,t \in T$: $K(s,s) = \mathsf{var}\, X(s) > 0$, $K(t,t) = \mathsf{var}\, X(t) > 0$. Durch die Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt $|R(s,t)| \leq 1$, $s,t \in T$. Die Menge aller gemischten Momente legt die Verteilung einer zufälligen Funktion im Allgemeinen nicht (eindeutig) fest.

Aufgabe 1.5.2
Geben Sie Beispiele von verschiedenen zufälligen Funktionen $X = \{X(t),\ t \in T\}$ und $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$, für die gilt $\mathsf{E}X(t) = \mathsf{E}Y(t)$, $t \in T$ und $\mathsf{E}(X(s)X(t)) = \mathsf{E}(Y(s)Y(t))$, $s,t \in T$.

Aufgabe 1.5.3
Sei $\mu : T \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $K : T \times T \to \mathbb{R}$ eine positiv semidefinite symmetrische Funktion. Zeigen Sie, dass eine zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ existiert mit $\mathsf{E}X(t) = \mu(t)$, $\mathsf{cov}(X(s), X(t)) = C(s,t)$, $s,t \in T$.

Sei nun $X = \{X(t),\ t \in T\}$ eine reellwertige zufällige Funktion mit $\mathsf{E}\, |X(t)|^k < \infty$, $t \in T$, für ein $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1.5.2
Der *mittlere Zuwachs der Ordnung* k von X ist gegeben durch $\gamma_k(s,t) = \mathsf{E}(X(s) - X(t))^k$, $s,t \in T$.

Besondere Aufmerksamkeit gilt der Funktion $\gamma(s,t) = \frac{1}{2}\gamma_2(s,t) = \frac{1}{2}\mathsf{E}(X(s) - X(t))^2$, $s,t \in T$, die *Variogramm von* X genannt wird. Das Variogramm wird in Geostatistik oft an Stelle der Kovarianzfunktion benutzt. Oft wird dafür die Bedingung $\mathsf{E}X^2(t) < \infty$, $t \in T$ nicht gestellt, sondern es wird vorausgesetzt, dass $\gamma(s,t) < \infty$ für alle $s,t \in T$.

Aufgabe 1.5.4
Zeigen Sie, dass es zufällige Funktion ohne endlichen 2. Momenten mit $\gamma(s,t) < \infty$, $s,t \in T$ gibt.

Aufgabe 1.5.5
Zeigen Sie, dass für eine zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ mit Mittelwertfunktion μ und Kovarianzfunktion K gilt:

$$\gamma(s,t) = \frac{K(s,s) + K(t,t)}{2} - K(s,t) + \frac{1}{2}(\mu(s) - \mu(t))^2, \quad s,t \in T.$$

Falls die zufällige Funktion X *komplexwertig* ist, d.h., $X : \Omega \times T \to \mathbb{C}$, mit $\mathsf{E}\, |X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$, dann wird die Kovarianzfunktion von X als $K(s,t) = \mathsf{E}(X(s) - \mathsf{E}X(s))\overline{(X(t) - \mathsf{E}X(t))}$,

$s, t \in T$, eingeführt, wobei $\overline{z}$ das Komplex-konjugierte von $z \in \mathbb{C}$ ist. Es gilt dann $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, $s, t \in T$, und K ist positiv semidefinit, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt $\sum_{i,j=1}^n K(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$.

1.6 Stationarität und Unabhängigkeit

Sei T eine Teilmenge vom linearen Vektorraum mit Operationen $+, -$ über den Raum $\mathbb{R}$.

Definition 1.6.1
Die zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ heißt *stationär* (im engen Sinne), falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $h, t_1, \ldots, t_n \in T$ mit $t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$ gilt:

$$\mathsf{P}_{(X(t_1),\ldots,X(t_n))} = \mathsf{P}_{(X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h))},$$

d.h., alle endlich-dimensionalen Verteilungen von X sind invariant gegenüber Verschiebungen in T.

Definition 1.6.2
Eine (komplexwertige) zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ heißt *stationär 2. Ordnung* (oder *im weiten Sinne*), falls $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$, und $\mu(t) \equiv \mathsf{E}X(t) \equiv \mu$, $t \in T$, $K(s,t) = \mathsf{cov}(X(s), X(t)) = K(s+h, t+h)$ für alle $h, s, t \in T : s+h, t+h \in T$.

Falls X stationär 2. Ordnung ist, ist es günstig eine Funktion $K(t) := K(0,t)$, $t \in T$, einzuführen, wobei $0 \in T$ ist.

Stationarität im engen Sinne und 2. Ordnung folgen nicht aus einander. Es ist jedoch klar, dass, wenn eine komplexwertige zufällige Funktion stationär im engen Sinne ist und endliche 2. Momente besitzt, dann ist sie auch stationär 2. Ordnung.

Definition 1.6.3
Eine reellwertige zufällige Funktion $X = \{X(t),\ t \in T\}$ ist *intrinsisch stationär 2. Ordnung*, falls $\gamma_k(s,t)$, $s, t \in T$ existieren für $k \leq 2$, und es gilt für alle $s, t, h \in T$, $s+h, t+h \in T$, dass $\gamma_1(s,t) = 0$, $\gamma_2(s,t) = \gamma_2(s+h, t+h)$.

Die intrinsische Stationarität 2. Ordnung ist für reellwertige zufällige Funktionen etwas allgemeiner als Stationarität 2. Ordnung, da die Existenz von $\mathsf{E}|X(t)|^2$, $t \in T$, nicht gefordert wird.

Es gibt aber auch das Analogon der Stationarität der Zuwächse von X im engen Sinne.

Definition 1.6.4
Sei $X = \{X(t),\ t \in T\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, $T \subset \mathbb{R}$. Man sagt, dass X

1. *stationäre Zuwächse* besitzt, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $h, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, mit $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t_i + h \in T$, $i = 0, \ldots, n$ die Verteilung von $(X(t_1+h) - X(t_0+h), \ldots, X(t_n+h) - X(t_{n-1}+h))^\top$ nicht von h abhängt.

2. *unabhängige Zuwächse* besitzt, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ mit $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ die Zufallsvariablen $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ paarweise unabhängig.

Seien $(\mathcal{S}_1, \mathcal{B}_1)$ und $(\mathcal{S}_2, \mathcal{B}_2)$ meßbare Räume. Generell sagt man, dass zwei zufällige Elemente $X : \Omega \to \mathcal{S}_1$ und $X : \Omega \to \mathcal{S}_2$ auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *unabhängig* sind, wenn $\mathsf{P}(X \in A_1, Y \in A_2) = \mathsf{P}(X \in A_1)\mathsf{P}(Y \in A_2)$ für alle $A_1 \in \mathcal{B}_1$, $A_2 \in \mathcal{B}_2$.

Diese Definition läßt sich übertragen auf die Unabhängigkeit von zufälligen Funktionen X und Y mit dem Phasenraum $(\mathcal{S}_T, \mathcal{B}_T)$, da sie als zufällige Elemente angesehen werden können, mit $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_T$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_T$ (vgl. Lemma 1.1.1). Dasselbe gilt für die Unabhängigkeit eines zufälligen Elementes (bzw. einer zufälligen Funktion) X und einer Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \in \mathcal{A}$: dies ist der Fall, wenn $\mathsf{P}(\{X \in A\} \cap G) = \mathsf{P}(X \in A)\mathsf{P}(G)$, für alle $A \in \mathcal{B}_1$, $G \in \mathcal{G}$ (bzw. $A \in \mathcal{B}_T$, $G \in \mathcal{G}$).

1.7 Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Eigenschaften und Existenz der Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen eingehen.

Sei $\{\varphi_{s,t},\ s,t \geq 0\}$ eine Familie von charakteristischen Funktionen der Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_{s,t},\ s,t \geq 0$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, d.h., für $z \in \mathbb{R}$, $s,t \geq 0$ gilt $\varphi_{s,t}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q_{s,t}(dx)$.

Theorem 1.7.1
Es existiert ein stochastischer Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ mit unabhängigen Zuwächsen mit der Eigenschaft, dass für alle $s,t \geq 0$ die charakteristische Funktion von $X(t) - X(s)$ gleich $\varphi_{s,t}$ ist, genau dann, wenn

$$\varphi_{s,t} = \varphi_{s,u}\varphi_{u,t} \tag{1.7.1}$$

für alle $0 \leq s < u < t < \infty$. Dabei kann die Verteilung von $X(0)$ beliebig gewählt werden.

Beweis Die Notwendigkeit der Bedingung 1.7.1 ist klar, weil für alle $s \in (0,\infty) : s < u < t$ gilt: $X(t) - X(s) = \underbrace{X(t) - X(u)}_{Y_1} + \underbrace{X(u) - X(s)}_{Y_2}$ und $X(t) - X(u)$ und $X(u) - X(s)$ sind paarweise unabhängig. Dann gilt $\varphi_{s,t} = \varphi_{Y_1+Y_2} = \varphi_{Y_1}\varphi_{Y_2} = \varphi_{s,u}\varphi_{u,t}$.
Nun beweisen wir die Suffizienz.
Falls die Existenz eines Prozesses X mit unabhängigen Zuwächsen und Eigenschaft $\varphi_{X(t)-X(s)} = \varphi_{s,t}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ bereits bewiesen wäre, könnte man die charakteristischen Funktionen aller seiner endlich-dimensionalen Verteilungen wie folgt durch $\{\varphi_{s,t}\}$ angeben.
Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ und $Y = (X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}))^\top$. Aus der Unabhängigkeit der Zuwächse folgt

$$\varphi_Y(\underbrace{z_0, z_1, \ldots, z_n}_{z}) = \mathsf{E}e^{i\langle z,Y\rangle} = \varphi_{X(t_0)}(z_0)\varphi_{t_0,t_1}(z_1)\ldots\varphi_{t_{n-1},t_n}(z_n),\ z \in \mathbb{R}^{n+1},$$

wobei die Verteilung von $X(t_0)$ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q_0 auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Für $X_{t_0,\ldots,t_n} = (X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n))^\top$ gilt allerdings $X_{t_0,\ldots,t_n} = AY$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\varphi_{X_{t_0,\ldots,t_n}}(z) = \varphi_{AY}(z) = \mathsf{E}e^{i\langle z,AY\rangle} = \mathsf{E}e^{i\left\langle A^\top z,Y\right\rangle} = \varphi_Y(A^\top z)$. Deshalb hat die endlich-dimensionale Verteilung von $X_{t_0,\ldots,t_n}$ die charakteristische Funktion $\varphi_{X_{t_0,\ldots,t_n}}(z) =$

$\varphi_{Q_0}(l_0)\varphi_{t_0,t_1}(l_1)\ldots\varphi_{t_{n-1},t_n}(l_n)$, wobei $l = (l_1, l_1, \ldots, l_n)^\top = A^\top z$, also

$$\begin{cases} l_0 &= z_0 + \ldots + z_n \\ l_1 &= z_1 + \ldots + z_n \\ &\vdots \\ l_n &= z_n \end{cases}$$

Dabei gilt $\varphi_{X(t_0)} = \varphi_{Q_0}$ und $\varphi_{X_{t_1,\ldots,t_n}}(z_1, \ldots, z_n) = \varphi_{X_{t_0,\ldots,t_n}}(0, z_1, \ldots, z_n)$ für alle $z_i \in \mathbb{R}$.
Nun beweisen wir die Existenz eines solchen Prozesses X.
Dabei konstruieren wir die Familie der charakteristischen Funktionen

$$\{\varphi_{t_0}, \varphi_{t_0,t_1,\ldots,t_n}, \varphi_{t_1,\ldots,t_n}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty,\ n \in \mathbb{N}\}$$

aus φ_{Q_0} und $\{\varphi_{s,t},\ 0 \leq s < t\}$ wie oben, also

$$\varphi_{t_0} = \varphi_{Q_0},\ \ \varphi_{t_1,\ldots,t_n}(0, z_1, \ldots, z_n) = \varphi_{t_0,t_1,\ldots,t_n}(0, z_1, \ldots, z_n),\ \ z_i \in \mathbb{R},$$

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_n}(z) = \varphi_{t_0}(z_1 + \ldots + z_n)\varphi_{t_0,t_1}(z_1 + \ldots + z_n)\ldots\varphi_{t_{n-1},t_n}(z_n).$$

Nun sollten wir prüfen, dass die Wahrscheinlichkeitsmaße, denen diese charakteristische Funktionen entsprechen, die Bedingungen des Theorems 1.1.2 erfüllen. Dies werden wir in äquivalenter Form tun, denn nach Aufgabe ... des Übungsblattes ... sind die Bedingungen der Symmetrie und der Konsistenz im Theorem 1.1.2 äquivalent zu:

a) $\varphi_{t_{i_0},\ldots,t_{i_n}}(z_{i_0}, \ldots, z_{i_n}) = \varphi_{t_0,\ldots,t_n}(z_0, \ldots, z_n)$ für eine beliebige Permutation $(0, 1, \ldots, n) \mapsto (i_0, i_1, \ldots, i_n)$,

b) $\varphi_{t_0,\ldots,t_{m-1},t_{m+1},\ldots,t_n}(z_0, \ldots, z_{m-1}, z_{m+1}, \ldots, z_n) = \varphi_{t_0,\ldots,t_n}(z_0, \ldots, 0, \ldots, z_n)$, für alle $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, $m \in \{1, \ldots, n\}$.

Die erste Bedingung a) ist offensichtlich. Es gilt b), weil

$$\varphi_{t_{m-1},t_m}(0 + z_{m+1} + \ldots + z_n)\varphi_{t_m,t_{m+1}}(z_{m+1} + \ldots + z_n) = \varphi_{t_{m-1},t_{m+1}}(z_{m+1}, \ldots, z_n)$$

für alle $m \in \{1, \ldots, n\}$. Damit ist die Existenz von X bewiesen. □

Beispiel 1.7.1 1. Falls $T = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann hat $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{N}_0\}$ unabhängige Zuwächse genau dann, wenn $X(n) \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^n Y_i$, wobei $\{Y_i\}$ unabhängige Zufallsvariablen sind und $Y_n \stackrel{d}{=} X(n) - X(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Ein solcher Prozess X heißt *zufällige Irrfahrt*. Er kann auch für Y_i mit Werten in $\mathbb{R}^m$ definiert werden.

2. Der Poisson-Prozess mit Intensität λ hat unabhängige Zuwächse, wie wir es später zeigen werden.

3. Der Wiener-Prozess besitzt unabhängige Zuwächse.

Aufgabe 1.7.1
Beweisen Sie es!

Aufgabe 1.7.2
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine beliebige (deterministische) Funktion. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ mit $Y(t) = X(t) + g(t)$, $t \geq 0$, ebenso unabhängige Zuwächse besitzt.

1.8 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 1.8.1
Beweisen Sie folgende Behauptung: Die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \geq 1$, $t = (t_1, \ldots, t_n)^\top \in T^n$ erfüllt die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov genau dann, wenn für alle $n \geq 2$ und für alle $s = (s_1, \ldots, s_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}}((s_1, \ldots, s_n)^\top) = \varphi_{\mathsf{P}_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}}((s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})^\top)$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$.

b) $\varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}}((s_1, \ldots, s_{n-1})^\top) = \varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}}((s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)^\top)$.

Bemerkung: $\varphi(\cdot)$ bezeichnet die charakteristische Funktion des jeweiligen Maßes. $\mathcal{S}_n$ bezeichnet die Gruppe aller Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 1.8.2
Zeigen Sie die Existenz einer zufälligen Funktion, deren endlich-dimensionale Verteilungen multivariat normalverteilt sind, und geben Sie die messbaren Räume $(E_{t_1,\ldots,t_n}, \mathcal{E}_{t_1,\ldots,t_n})$ explizit an.

Aufgabe 1.8.3
Geben Sie ein Beispiel für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$, welche nicht die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov erfüllt.

Aufgabe 1.8.4
Seien $X = \{X(t),\, t \in T\}$ und $Y = \{Y(t),\, t \in T\}$ zwei stochastische Prozesse, die auf dem selben vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ definiert sind und Werte in einem messbaren Raum $(\mathsf{S}, \mathcal{B})$ annehmen.

a) Beweisen Sie: X und Y sind stochastisch äquivalent $\Longrightarrow \mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$.

b) Geben Sie ein Beispiel zweier Prozesse X und Y an, für die gilt: $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$, aber X und Y sind nicht stochastisch äquivalent.

c) Beweisen Sie: X und Y sind stochastisch ununterscheidbar $\Longrightarrow$ X und Y sind stochastisch äquivalent.

d) Beweisen Sie im Falle der Abzählbarkeit von T: X und Y sind stochastisch äquivalent $\Longrightarrow$ X und Y sind stochastisch ununterscheidbar.

e) Geben Sie im Falle der Überzählbarkeit von T ein Beispiel zweier Prozesse X und Y an, für die gilt: X und Y sind stochastisch äquivalent, aber nicht stochastisch ununterscheidbar.

Aufgabe 1.8.5
Sei $W = \{W(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ ein Wiener-Prozess. Welche der folgenden Prozesse sind ebenfalls Wiener-Prozesse?

a) $W_1 = \{W_1(t) := -W(t),\, t \in \mathbb{R}\}$,

b) $W_2 = \{W_2(t) := \sqrt{t}W(1),\, t \in \mathbb{R}\}$,

c) $W_3 = \{W_3(t) := W(2t) - W(t),\, t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.8.6
Es sei der stochastische Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0,1]\}$ gegeben, welcher aus identischen und unabhängig verteilten Zufallsvariablen mit einer Dichte $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, besteht. Zeigen Sie, dass ein solcher Prozess nicht stochastisch stetig in $t \in [0,1]$ sein kann.

Aufgabe 1.8.7
Geben Sie ein Beispiel eines stochastischen Prozesses $X = \{X(t),\, t \in T\}$ an, welcher stochastisch stetig auf T ist, aber nicht fast sicher stetig auf T, und beweisen Sie, warum dies so ist.

Aufgabe 1.8.8
Im Zusammenhang mit der Stetigkeit von stochastischen Prozessen spielt das sogenannte *Kriterium von Kolmogorov* eine zentrale Rolle (siehe auch Satz 1.3.1 im Skript): Sei $X = \{X(t),\, t \in [a,b]\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess. Falls Konstanten $\alpha, \varepsilon > 0$ und $C := C(\alpha, \varepsilon) > 0$ existieren, so dass

$$\mathsf{E}|X(t+h) - X(t)|^{\alpha} \leq C|h|^{1+\varepsilon} \tag{1.8.1}$$

für ausreichend kleines h, dann besitzt der Prozess X eine stetige Modifikation. Zeigen Sie:

a) Falls man in Bedingung (1.8.1) die Variable $\varepsilon = 0$ fixiert, dann reicht diese Bedingung im Allgemeinen nicht zur Existenz einer stetigen Modifikation aus. *Tipp: Betrachten Sie den Poisson-Prozess.*

b) Der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \in [0,\infty)\}$ besitzt eine stetige Modifikation. *Tipp: Betrachten Sie den Fall $\alpha = 4$.*

Aufgabe 1.8.9
Zeigen Sie, dass der Wiener-Prozesses W an keiner Stelle $t \in [0,\infty)$ stochastisch differenzierbar ist.

Aufgabe 1.8.10
Zeigen Sie, dass die Kovarianzfunktion $C(s,t)$ eines komplexwertigen stochastischen Prozesses $X = \{X(t),\, t \in T\}$

a) symmetrisch ist, d.h. $C(s,t) = \overline{C(t,s)}$, $s,t \in T$,

b) die Identität $C(t,t) = \mathsf{var}\, X(t)$, $t \in T$, erfüllt,

c) *positiv semidefinit* ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C(t_i, t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

Aufgabe 1.8.11
Zeigen Sie, dass es eine zufällige Funktion $X = \{X(t),\, t \in T\}$ gibt, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllt:

- Das zweite Moment $\mathsf{E}X^2$ existiert nicht.
- Das Variogramm $\gamma(s,t)$ ist endlich für alle $s,t \in T$.

Aufgabe 1.8.12
Geben Sie ein Beispiel für einen stochastischen Prozess $X = \{X(t),\, t \in T\}$ an, dessen Pfade gleichzeitig L^2-differenzierbar, aber nicht fast sicher differenzierbar sind, und beweisen Sie, warum dies so ist.

Aufgabe 1.8.13
Geben Sie ein Beispiel für einen stochastischen Prozess $X = \{X(t),\, t \in T\}$ an, dessen Pfade gleichzeitig fast sicher differenzierbar, aber nicht L^1-differenzierbar sind, und beweisen Sie, warum dies so ist.

Aufgabe 1.8.14
Beweisen Sie, dass der Wiener-Prozess unabhängige Zuwächse besitzt.

Aufgabe 1.8.15
Beweisen Sie: Ein (reellwertiger) stochastischer Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0,\infty)\}$ mit unabhängigen Zuwächsen hat bereits dann stationäre Zuwächse, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen $X(t+h) - X(h)$ unabhängig von h ist.

2 Zählprozesse

Hier werden einige Beispiele von stochastischen Prozessen betrachtet, die das Zählen von Ereignissen modellieren und daher stückweise konstante Pfade besitzen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine nichtfallende Folge von f.s. nicht-negativen Zufallsvariablen, d.h. $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$.

Definition 2.0.1
Der stochastische Prozess $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ wird *Zählprozess* genannt, falls

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t),$$

wobei $\mathbb{1}(A)$ die Indikatorfunktion eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$ ist.

$N(t)$ zählt die Ereignisse, die zu Zeitpunkten S_n bis zur Zeit t eintreten. S_n können z.B. Zeitpunkte des Eintretens

1. des n-ten Elementarteilchens im Geigerzähler sein, oder
2. eines Schadens in der Sachschadenversicherung, oder
3. eines Datenpakets beim Server in einem Computernetzwerk, usw.

Einen Spezialfall der Zählprozesse bilden die sog. *Erneuerungsprozesse*.

2.1 Erneuerungsprozesse

Definition 2.1.1
Sei $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. nicht-negativen Zufallsvariablen mit $\mathsf{P}(T_1 > 0) > 0$. Ein Zählprozess $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ mit $N(0) = 0$ f.s., $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, $n \in \mathbb{N}$, wird *Erneuerungsprozess* genannt. Dabei heißt S_n der *n-te Erneuerungszeitpunkt*, $n \in \mathbb{N}$.

Den Namen „Erneuerungsprozess“ leitet man von folgender Interpretation ab. Die „Zwischenankunftszeiten“ T_n werden als Lebensdauer eines technischen Ersatzteils bzw. Mechanismus in einem System interpretiert, somit sind S_n die Zeitpunkte des n-ten Versagens des Systems. Das defekte Teil wird sofort durch ein neues baugleiches Teil ersetzt (wie z.B. beim Auswechseln einer kaputten Glühbirne). Somit ist $N(t)$ die Anzahl der Reparaturen (die sog. „Erneuerungen“) des Systems bis zur Zeit t.

Bemerkung 2.1.1

1. Man setzt $N(t) = \infty$, falls $S_n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Oft wird vorausgesetzt, dass nur $T_2, T_3, \ldots$ identisch verteilt sind mit $\mathsf{E}T_n < \infty$. Die Verteilung von T_1 ist dann beliebig wählbar. Ein solcher Prozess $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ wird *verzögerter Erneuerungsprozess* (mit Verzögerung T_1) genannt.
3. Manchmal wird die Forderung $T_n \geq 0$ weggelassen.

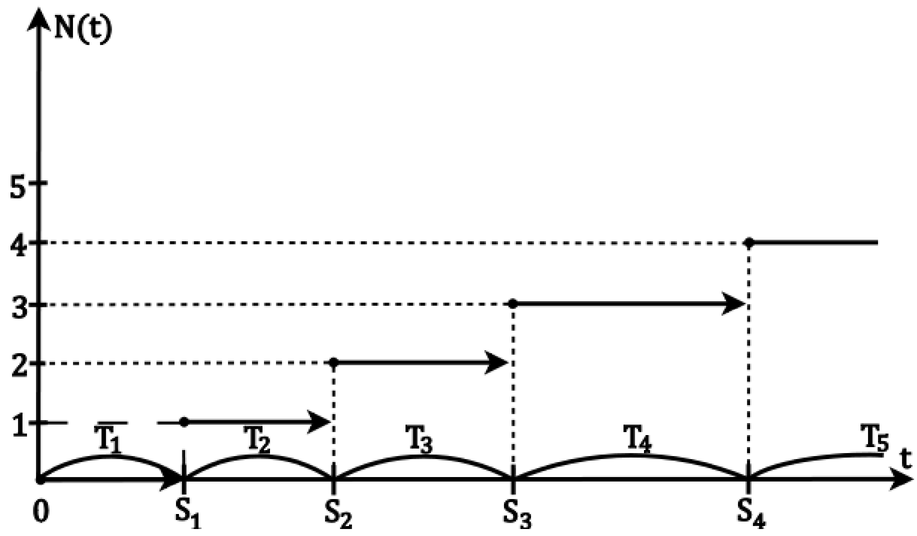

Abbildung 2.1: Konstruktion und Trajektorien eines Erneuerungsprozesses

4. Es ist klar, dass $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $S_0 = 0$ f.s., $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $n \in \mathbb{N}$ eine *zufällige Irrfahrt* ist.

5. Wenn man voraussetzt, dass das n-te Auswechseln des defekten Teils im System eine Zeit T'_n dauert, so wird durch $\tilde{T}_n = T_n + T'_n$, $n \in \mathbb{N}$ ein anderer Erneuerungsprozess gegeben, der von seiner stochastischen Beschaffenheit sich nicht von dem in der Definition 2.1.1 gegebenen Prozess unterscheidet.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung wird vorausgesetzt, dass $\mu = \mathsf{E}T_n \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 2.1.1 (Individueller Ergodensatz):
Sei $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess. Dann gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{f.s..}$$

Beweis Für alle $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$, deshalb $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ und

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

Wenn wir zeigen könnten, dass $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{f.s} \mu$ und $N(t) \xrightarrow[t\to\infty]{f.s.} \infty$, dann gilt $\frac{t}{N(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{f.s} \mu$ und deshalb gilt die Aussage des Theorems.
Nach dem Starken Gesetz der Großen Zahlen von Kolmogorov (vgl. Skript „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (WR), Satz 7.4) gilt $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mu$, also $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty$ und daher $\mathsf{P}(N(t) < \infty) = 1$, weil $\mathsf{P}(N(t) = \infty) = \mathsf{P}(\ S_n \leq t, \forall n) = 1 - \underbrace{\mathsf{P}(\exists n : \forall m \in \mathbb{N}_0\ S_{n+m} > t)}_{=1,\ \text{falls}\ S_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} \infty} = 1 - 1 = 0$. Dann ist $N(t)$, $t \geq 0$, eine echte Zufallsvariable.
Zeigen wir, dass $N(t) \xrightarrow[t\to\infty]{f.s.} \infty$. Alle Trajektorien von $N(t)$ sind monoton nichtfallend in $t \geq 0$,

also $\exists \lim_{t\to\infty} N(\omega,t)$ für alle $\omega \in \Omega$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\lim_{t\to\infty} N(t) < \infty) &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\lim_{t\to\infty} N(t) < n) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(N(t) < n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(S_n > t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(\sum_{k=1}^{n} T_k > t) \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathsf{P}(T_k > \frac{t}{n})}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} = 0.
\end{aligned}$$

Der Übergang $(*)$ gilt, weil $\{\lim_{t\to\infty} N(t) < n\} = \{\exists t_0 \in \mathbb{Q}_+ : \forall t \geq t_0 \; N(t) < n\} = \cup_{t_0\in\mathbb{Q}_+} \cap_{\substack{t\in\mathbb{Q}_+ \\ t\geq t_0}} \{N(t) < n\} = \liminf_{\substack{t\in\mathbb{Q}_+ \\ t\to\infty}} \{N(t) < n\}$, und dann benutzt man die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes, wobei $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$. Da für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ (der Wertebereich einer Realisierung von $N(\cdot)$ ist ja eine Teilfolge von $\mathbb{N}$), gilt $\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \overset{f.s}{=} \mu$. □

Bemerkung 2.1.2
Der Ergodensatz lässt sich verallgemeinern auf den Fall von nicht identisch verteilten T_n. Dabei wird gefordert, dass $\mu_n = \mathsf{E}T_n$, $\{T_n - \mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar sind und $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu > 0$. Dann kann bewiesen werden, dass $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathsf{P}} \frac{1}{\mu}$ (vgl. [2], S. 276).

Theorem 2.1.2 (Zentraler Grenzwertsatz):
Falls $\mu \in (0,\infty)$, $\sigma^2 = \operatorname{var} T_1 \in (0,\infty)$, dann gilt

$$\mu^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{d} Y,$$

wobei $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Beweis Nach dem zentralen Grenzwertsatz für Summen von u.i.v. Zufallsvariablen (vgl. Satz 7.5, WR) gilt

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y. \tag{2.1.1}$$

Sei $[x]$ der ganze Teil von $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für $a = \frac{\sigma^2}{\mu^3}$, dass

$$\mathsf{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{at}} \leq x\right) = \mathsf{P}\left(N(t) \leq x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathsf{P}\left(S_{m(t)} > t\right),$$

wobei $m(t) = \left[x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu}\right] + 1$, $t \geq 0$, und $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$. Deshalb folgt, dass

$$\begin{aligned}
\left|\mathsf{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{at}} \leq x\right) - \varphi(x)\right| &= \left|\mathsf{P}\left(S_{m(t)} > t\right) - \varphi(x)\right| \\
&= \left|\mathsf{P}\left(\frac{S_{m(t)} - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} > \frac{t - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}}\right) - \varphi(x)\right| := I_t(x)
\end{aligned}$$

für beliebiges $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist. Für festes $x \in \mathbb{R}$ führen wir $Z_t = -\frac{t-\mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} - x$, $t \geq 0$, ein. Es gilt dann

$$I_t(x) = \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_{m(t)} - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} + Z_t > -x \right) - \varphi(x) \right|.$$

Wenn wir zeigen könnten, dass $Z_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, dann würde nach (2.1.1) und dem Satz von Slutsky (Satz 6.4.1, WR) folgen, dass $\frac{S_{m(t)}-\mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} + Z_t \xrightarrow[t\to\infty]{d} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, denn aus $Z_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ f.s. folgt $Z_t \xrightarrow[t\to\infty]{d} 0$. Deshalb könnte man schreiben $I_t(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} |\bar{\varphi}(-x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x)| = 0$, wobei $\bar{\varphi}(x) = 1-\varphi(x)$ die Tail-Funktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist, und man hier die Symmetrie-Eigenschaft von $\mathcal{N}(0,1) : \bar{\varphi}(-x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ benutzt hat.

Zeigen wir nun, dass $Z_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, also $\frac{t-\mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} -x$. Es gilt $m(t) = x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu} + \varepsilon(t)$, wobei $\varepsilon(t) \in [0,1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{t-\mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} &= \frac{t - \mu x\sqrt{at} - t - \mu\varepsilon(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} = -x\frac{\sqrt{at} - \mu}{\sigma\sqrt{x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu} + \varepsilon(t)}} - \frac{\mu\varepsilon(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} \\
&= -\frac{x\mu}{\sigma\sqrt{\frac{x}{\sqrt{at}} + \frac{1}{\mu a} + \frac{\varepsilon(t)}{at}}} - \frac{\mu - \varepsilon(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} \\
&= \underbrace{-\frac{x\frac{\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{x}{\sqrt{at}} + \frac{\varepsilon(t)}{at}}}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} -x} - \underbrace{\frac{\mu\varepsilon(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} \xrightarrow[t\to\infty]{} -x.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.3
Der zentrale Grenzwertsatz läßt sich in Lindeberg-Form auch für nicht identisch verteilte T_n beweisen, vgl. [2], S. 276 - 277.

Definition 2.1.2
Die Funktion $H(t) = \mathsf{E}N(t)$, $t \geq 0$ heißt *Erneuerungsfunktion* des Prozesses N (oder der Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

Sei $F_T(x) = \mathsf{P}(T_1 \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von T_1. Für beliebige Verteilungsfunktionen $F, G : \mathbb{R} \to [0,1]$ sei die *Faltung* $F * G$ definiert als $F * G(x) = \int_{-\infty}^{x} F(x-y)dG(y)$. Die *$k$-fache Faltung* F^{*k} der Verteilungfunktion F mit sich selbst, $k \in \mathbb{N}_0$, wird induktiv definiert:

$$\begin{aligned}
F^{*0}(x) &= 1(x \in [0,\infty)),\ x \in \mathbb{R}, \\
F^{*1}(x) &= F(x),\ x \in \mathbb{R}, \\
F^{*(k+1)}(x) &= F^{*k} * F(x),\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Lemma 2.1.1
Die Erneuerungsfunktion H eines Erneuerungsprozesses N ist monoton nichtfallend und rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}_+$. Außerdem gilt

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*n}(t),\ t \geq 0. \tag{2.1.2}$$

Beweis Die Monotonie und rechtsseitige Stetigkeit von H folgt aus der fast sicheren Monotonie und rechtsseitigen Stetigkeit der Trajektorien von N. Nun beweisen wir (2.1.2):

$$H(t) = \mathsf{E}N(t) = \mathsf{E}\sum_{n=1}^{\infty} 1(S_n \leq t) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}1(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*n}(t),$$

weil $\mathsf{P}(S_n \leq t) = \mathsf{P}(T_1 + \ldots + T_n \leq t) = F_T^{*n}(t)$, $t \geq 0$. Die Gleichung $(*)$ gilt für alle partiellen Summen auf beiden Seiten, also auch im Grenzwert. □

Bis auf Ausnahmefälle ist es unmöglich, die Erneuerungsfunktion H durch die Formel (2.1.2) analytisch zu berechnen. Deshalb benutzt man oft in Berechnungen die *Laplace-Transformierte* von H.
Für eine monotone (z.B. monoton nichtfallende) rechtsseitig stetige Funktion $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist ihre *Laplace-Transformierte* definiert als $\hat{l}_G(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$, $s \geq 0$. Hier ist das Integral als Lebesgue-Stieltjes-Integral zu verstehen, also als ein Lebesgue-Integral bzgl. des Maßes μ_G auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ definiert durch $\mu_G((x, y]) = G(y) - G(x)$, $0 \leq x < y < \infty$, falls G monoton nichtfallend ist.
Zur Erinnerung, für eine Zufallsvariable $X \geq 0$ ist ihre Laplace-Transformierte $\hat{l}_X$ definiert durch $\hat{l}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_X(x)$, $s \geq 0$.

Lemma 2.1.2
Für $s > 0$ gilt:

$$\hat{l}_H(s) = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_1}(s)}.$$

Beweis Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{l}_H(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) \stackrel{(2.1.2)}{=} \int_0^\infty e^{-sx} d\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*n}(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-sx} dF^{*n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{l}_{T_1 + \ldots + T_n}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{l}_{T_1}(s)\right)^n = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_1}(s)}, \end{aligned}$$

wobei für $s > 0$ gilt $\hat{l}_{T_1}(s) < 1$ und somit konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \left(\hat{l}_{T_1}(s)\right)^n$. □

Bemerkung 2.1.4
Falls $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess (mit Verzögerung T_1) ist, dann gelten die Aussagen der Lemmas 2.1.1 - 2.1.2 in folgender Form:

1. $$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_{T_1} * F_{T_2}^{*n})(t),\ t \geq 0,$$

   wobei F_{T_1} bzw. F_{T_2} die Verteilungsfunktionen von T_1 bzw. T_n, $n \geq 2$ sind.

2. $$\hat{l}_H(s) = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_2}(s)},\ s \geq 0, \tag{2.1.3}$$

   wobei $\hat{l}_{T_1}$ und $\hat{l}_{T_2}$ die Laplace-Transformierten der Verteilung von T_1 bzw. T_n, $n \geq 2$ sind.

Für weitere Betrachtungen brauchen wir einen Satz (von Wald) über den Erwartungswert einer Summe (in zufälliger Anzahl) von unabhängigen Zufallsvariablen.

Definition 2.1.3
Sei ν eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable und sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum. ν heißt *unabhängig von der Zukunft*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ das Ereignis $\{\nu \le n\}$ nicht von der σ-Algebra $\sigma(\{X_k,\ k > n\})$ abhängt.

Theorem 2.1.3 (Waldsche Identität):
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\sup \mathsf{E}|X_n| < \infty$, $\mathsf{E}X_n = a$, $n \in \mathbb{N}$ und sei ν eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable, die von der Zukunft unabhängig ist, mit $\mathsf{E}\nu < \infty$. Dann gilt

$$\mathsf{E}(\sum_{n=1}^{\nu} X_n) = a \cdot \mathsf{E}\nu.$$

Beweis Berechne $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathsf{E}\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\nu \ge n)$, so folgt die Aussage aus dem Lemma 2.1.3. □

Lemma 2.1.3 (Kolmogorov-Prokhorov):
Sei ν eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable, die nicht von der Zukunft abhängt, und es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\nu \ge n)\mathsf{E}|X_n| < \infty. \tag{2.1.4}$$

Dann gilt $\mathsf{E}S_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\nu \ge n)\mathsf{E}X_n$. Falls $X_n \ge 0$ f.s., dann braucht man die Bedingung (2.1.4) nicht.

Beweis Es gilt $S_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 1(\nu \ge n)$. Führen wir die Bezeichnung $S_{\nu,n} = \sum_{k=1}^{n} X_k 1(\nu \ge k)$, $n \in \mathbb{N}$, ein. Beweisen wir das Lemma zunächst für $X_n \ge 0$ f.s., $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $S_{\nu,n} \uparrow S_\nu$, $n \to \infty$ für jedes $\omega \in \Omega$, und so gilt nach dem Satz über die monotone Konvergenz: $\mathsf{E}S_\nu = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}S_{\nu,n} = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k 1(\nu \ge k))$. Da allerdings $\{\nu \ge k\} = \{\nu \le k-1\}^c$ nicht von $\sigma(X_k) \subset \sigma(\{X_n,\ n \ge k\})$ abhängt, gilt $\mathsf{E}(X_k 1(\nu \ge k)) = \mathsf{E}X_k \mathsf{P}(\nu \ge k)$, $k \in \mathbb{N}$, und daher $\mathsf{E}S_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\nu \ge n)\mathsf{E}X_n$.
Sei nun X_n beliebig. Setze $Y_n = |X_n|$, $Z_n = \sum_{n=1}^{n} Y_n$, $Z_{\nu,n} = \sum_{k=1}^{n} Y_k 1(\nu \ge k)$, $n \in \mathbb{N}$. Da $Y_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\mathsf{E}Z_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathsf{P}(\nu \ge k)) < \infty$ aus (2.1.4). Da allerdings $|S_{\nu,n}| \le Z_{\nu,n} \le Z_\nu$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz, dass $\mathsf{E}S_\nu = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}S_{\nu,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}X_n \mathsf{P}(\nu \ge n)$, wobei diese Reihe absolut konvergiert. □

Folgerung 2.1.1
1. Für eine beliebige Borel-messbare Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ und den Erneuerungsprozess $N = \{N(t),\ t \ge 0\}$ mit Zwischenankuftszeiten $\{T_n\}$, T_n u.i.v., $\mu = \mathsf{E}T_n \in (0, \infty)$ gilt
$$\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)+1} g(T_n)\right) = (1 + H(t))\mathsf{E}g(T_1),\ t \ge 0.$$
2. $H(t) < \infty$, $t \ge 0$.

Beweis
1. Für jedes $t \ge 0$ hängt $\nu = 1 + H(t)$ offensichtlich nicht von der Zukunft von $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ab, und der Rest folgt aus dem Theorem 2.1.3 mit $X_n = g(T_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Für $s > 0$ betrachte $T_n^{(s)} = \min\{T_n, s\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wähle $s > 0$ so, dass für beliebig gewähltes (aber festes) $\varepsilon > 0 : \mu^{(s)} = \mathsf{E}T_1^{(s)} \geq \mu - \varepsilon > 0$. Sei $N^{(s)}$ der Erneuerungsprozess, der auf der Folge $\{T_n^{(s)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Zwischenankunftszeiten aufgebaut wird: $N^{(s)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^{(s)} \leq t)$, $t \geq 0$. Es gilt $N(t) \leq N^{(s)}(t)$, $t \geq 0$, f.s., dabei nach der Folgerung 2.1.1:

$$(\mu-\varepsilon)(\mathsf{E}N^{(s)}(t)+1) \leq \mu^{(s)}(\mathsf{E}N^{(s)}(t)+1) = \mathsf{E}S^{(s)}_{N^{(s)}(t)+1} = \mathsf{E}(\underbrace{S^{(s)}_{N^{(s)}(t)}}_{\leq t} + \underbrace{T^{(s)}_{N^{(s)}(t)+1}}_{\leq s}) \leq t+s,$$

$t \geq 0$, wobei $S_n^{(s)} = T_1^{(s)} + \ldots + T_n^{(s)}$, $n \in \mathbb{N}$. Daher $H(t) = \mathsf{E}N(t) \leq \mathsf{E}N^{(s)}(t) \leq \frac{t+s}{\mu-\varepsilon}$, $t \geq 0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $\limsup_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$, und unsere Aussage $H(t) < \infty$, $t \geq 0$.

□

Folgerung 2.1.2 (Elementarer Erneuerungssatz):
Für einen Erneuerungsprozess N wie in Folgerung 2.1.1, 1) gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Beweis In der Folgerung 2.1.1, Teil 2) ist bereits bewiesen worden, dass $\limsup_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$. Zeigen wir, dass $\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$, dann ist unsere Aussage bewiesen. Nach Theorem 2.1.1 gilt $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}$ f.s., daher nach Fatou's Lemma

$$\frac{1}{\mu} = \mathsf{E}\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}N(t)}{t} = \liminf_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t}.$$

□

Bemerkung 2.1.5 1. Man kann auch zeigen, dass es sich im Falle des endlichen 2. Momentes von T_n ($\mu_2 = \mathsf{E}T_1^2 < \infty$) eine genauere Asymptotik für $H(t)$, $t \to \infty$ herleiten läßt:

$$H(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} + o(1), \ t \to \infty.$$

2. Der elementare Erneuerungssatz gilt auch für verzögerte Erneuerungsprozesse, wobei $\mu = \mathsf{E}T_2$. Definieren wir das *Erneuerungsmaß* H auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ durch $H(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_B dF_T^{*n}(x)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Es gilt $H((-\infty,t]) = H(t)$, $H((s,t]) = H(t) - H(s)$, $s,t \geq 0$, wenn man durch H sowohl die Erneuerungsfunktion als auch das Erneuerungsmaß bezeichnet.

Theorem 2.1.4 (Hauptsatz der Erneuerungstheorie):
Sei $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ ein (verzögerter) Erneuerungsprozess assoziiert mit der Folge $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei T_n, $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind, $\{T_n,\ n \geq 2\}$ identisch verteilt, und die Verteilung von T_2 nicht arithmetisch ist, also nicht auf einem regelmäßigen Gitter mit Wahrscheinlichkeit 1 konzentriert ist. Die Verteilung von T_1 sei beliebig. Sei $\mathsf{E}T_2 = \mu \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$\int_0^t g(t-x)dH(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(x)dx,$$

wobei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[0,n]$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\sum_{n=0}^{\infty} \max_{n\leq x\leq n+1} |g(x)| < \infty$.

Ohne Beweis.

Insbesondere gilt $H((t-u,t]) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{u}{\mu}$, für ein beliebiges $u \in \mathbb{R}_+$, also verhält sich H asymptotisch (für $t \to \infty$) wie das Lebesgue-Maß.

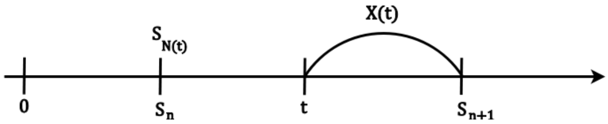

Abbildung 2.2:

Definition 2.1.4
Die Zufallsvariable $\chi(t) = S_{N(t)+1} - t$ heißt *Exzess* von N zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Es gilt offensichtlich $\chi(0) = T_1$. Geben wir nun ein Beispiel eines Erneuerungsprozesses mit stationären Zuwächsen.
Sei $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess assoziiert mit Folge von Zwischenankuftszeiten $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sei F_{T_1} bzw. F_{T_2} die Verteilungsfunktion der Verzögerung T_1 bzw. von T_n, $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass $\mu = \mathsf{E}T_2 \in (0,\infty)$, $F_{T_2}(0) = 0$, also $T_2 > 0$ f.s. und

$$F_{T_1}(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}_{T_2}(y)dy,\ x \geq 0. \tag{2.1.5}$$

In diesem Fall sagt man, dass F_{T_1} die *integrierte Tailverteilungsfunktion* von T_2 ist.

Theorem 2.1.5
Unter den obigen Voraussetzungen ist N ein Prozess mit stationären Zuwächsen.

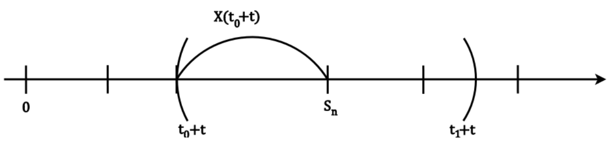

Abbildung 2.3:

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$. Wegen Unabhängigkeit von T_n, $n \in \mathbb{N}$ hängt die gemeinsame Verteilung von $(N(t_1+t) - N(t_0+t), \ldots, N(t_n+t) - N(t_{n-1}+t))^\top$ nicht von t ab, falls die Verteilung von $\chi(t)$ unabhängig von t ist, also $\chi(t) \stackrel{d}{=} \chi(0) = T_1$, $t \geq 0$, siehe Abbildung ....

Zeigen wir, dass $F_{T_1} = F_{X(t)}$, $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
F_{\chi(t)}(x) &= \mathsf{P}(\chi(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n \leq t,\ t < S_{n+1} \leq t+x) \\
&= \mathsf{P}(S_0 = 0 \leq t,\ t < S_1 = T_1 \leq t+x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(\mathsf{E}(1(S_n \leq t,\ t < S_n + T_{n+1} \leq t+x) \mid S_n)) \\
&= F_{T_1}(t+x) - F_{T_1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mathsf{P}(t-y < T_{n+1} \leq t+x-y) dF_{S_n}(y) \\
&= F_{T_1}(t+x) - F_{T_1}(t) + \int_0^t \mathsf{P}(t-y < T_2 \leq t+x-y) d(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(y)}_{H(y)}).
\end{aligned}$$

Falls wir zeigen könnten, dass $H(y) = \frac{y}{\mu}$, $y \geq 0$, dann hätten wir

$$\begin{aligned}
F_{\chi(t)}(x) &= F_{T_1}(t+x) - F_{T_1}(t) + \frac{1}{\mu} \int_t^0 (F_{T_2}(z+x) - 1 + 1 - F_{T_2}(z)) d(-z) \\
&= F_{T_1}(t+x) - F_{T_1}(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t (\bar{F}_{T_2}(z) - \bar{F}_{T_2}(z+x)) dz \\
&= F_{T_1}(t+x) - F_{T_1}(t) + F_{T_1}(t) - \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} \bar{F}_{T_2}(y) dy \\
&= F_{T_1}(t+x) - F_{T_1}(t+x) + F_{T_1}(x) = F_{T_1}(x),\ x \geq 0,
\end{aligned}$$

nach der Form (2.1.5) der Verteilung von T_1.
Nun soll gezeigt werden, dass $H(t) = \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. Dazu verwenden wir die Formel (2.1.4): es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{l}_{T_1}(s) &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-st}(1 - F_{T_2}(t)) dt = \frac{1}{\mu} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} dt}_{\frac{1}{s}} - \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-st} F_{T_2}(t) dt \\
&= \frac{1}{\mu s} \left(1 + \int_0^{\infty} F_{T_2}(t) de^{-st} \right) = \frac{1}{\mu s} (1 + \underbrace{e^{-st} F_{T_2}(t)\,|_0^{\infty}}_{-F_{T_2}(0)=0} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} dF_{T_2}(t))}_{\hat{l}_{T_2}(s)} \\
&= \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{l}_{T_2}(s)),\ s \geq 0.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel (2.1.4) bekommt man

$$\hat{l}_H(s) = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_2}(s)} = \frac{1}{\mu s} = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \hat{l}_{\frac{t}{\mu}}(s),\ s \geq 0.$$

Da die Laplace-Transformierte einer Funktion eindeutig diese Funktion bestimmt, gilt $H(t) = \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. □

Bemerkung 2.1.6
Im Beweis des Theorems 2.1.5 haben wir gezeigt, dass für den verzögerten Erneuerungsprozess

mit Verzögerung, welche die Verteilung (2.1.5) besitzt, $H(t) \sim \frac{t}{\mu}$ nicht nur asymptotisch für $t \to \infty$ (wie im elementaren Erneuerungssatz), sondern es gilt $H(t) = \frac{t}{\mu}$, für alle $t \geq 0$. Das bedeutet, es finden im Mittelwert $\frac{1}{\mu}$ Erneuerungen pro Einheitszeitintervall statt. Aus diesem Grund wird ein solcher Prozess N *homogener Erneuerungsprozess* genannt.

Es läßt sich auch folgendes Theorem beweisen:

Theorem 2.1.6
Falls $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess mit beliebiger Verzögerung T_1 und nicht-arithmetischer Verteilung von T_n, $n \geq 2$ ist, $\mu = \mathsf{E}T_2 \in (0, \infty)$, dann gilt

$$\lim_{t \to \infty} F_{\chi(t)}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_{T_2}(y) dy,\ x \geq 0.$$

Das heißt, die Grenzwertverteilung von Exzess $\chi(t)$, $t \to \infty$ wird bei der Definition eines homogenen Erneuerungsprozesses als Verteilung von T_1 angenommen.

2.2 Poisson-artige Prozesse

2.2.1 Poisson-Prozesse

In diesem Abschnitt werden wir die Definition eines homogenen Poisson-Prozesses (gegeben im Abschnitt 1.2, Beispiel 5) verallgemeinern.

Definition 2.2.1
Der Zählprozess $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ heißt Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ, falls

1. $N(0) = 0$ f.s.
2. Λ ein lokalendliches Maß auf $\mathbb{R}_+$ ist, d.h., $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ besitzt die Eigenschaft $\Lambda(B) < \infty$ für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
3. N unabhängige Zuwächse besitzt.
4. $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\Lambda((s, t]))$ für alle $0 \leq s < t < \infty$.

Manchmal wird der Poisson-Prozess $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ durch das entsprechende zufällige Poissonsche Zählmaß $N = \{N(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ definiert, d.h., $N = ([0, t])$, $t \geq 0$, wobei ein Zählmaß ein lokalendliches Maß mit Werten aus $\mathbb{N}_0$ ist.

Definition 2.2.2
Ein zufälliges Zählmaß $N = \{N(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ heißt Poissonsch mit lokalendlichem Intensitätsmaß Λ, falls

1. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und für beliebige paarweise disjunkte beschränkte Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ die Zufallsvariablen $N(B_1), N(B_2), \ldots, N(B_n)$ unabhängig sind.
2. $N(B) \sim \text{Pois}(\Lambda(B))$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, B-beschränkt.

Es ist klar, dass die Eigenschaften 3 und 4 der Definition 2.2.1 aus den Eigenschaften 1 und 2 der Definition 2.2.2 folgen. Die Eigenschaft 1 der Definition 2.2.1 ist jedoch eine eigenständige Annahme. $N(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ wird als die Anzahl der Punkte von N in der Menge B interpretiert.

Bemerkung 2.2.1
Genauso wie in Definition 2.2.2 kann ein Poissonsches Zählmaß auf beliebigem topologischem Raum E, ausgestattet mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, definiert werden. Sehr häufig wird in Anwendungen $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ gewählt.

Lemma 2.2.1
Für jedes lokalendliche Maß Λ auf $\mathbb{R}_+$ existiert ein Poisson-Prozess mit Λ als Intensitätsmaß.

Beweis Falls so ein Poisson-Prozess existiert hätte, wäre die charakteristische Funktion $\varphi_{N(t)-N(s)}(\cdot)$ des Zuwachses $N(t) - N(s)$, $0 \leq s < t < \infty$ nach Eigenschaft 4 der Definition 2.2.1 gleich $\varphi_{s,t}(z) = \varphi_{\text{Pois}(\Lambda((s,t]))}(z) = e^{\Lambda((s,t])(e^{iz}-1)}$, $z \in \mathbb{R}$. Zeigen wir, dass die Familie von charakteristischen Funktionen $\{\varphi_{s,t},\ 0 \leq s < t < \infty\}$ die Eigenschaft 1.7.1 besitzt: für alle $n : 0 \leq s < u < t$, $\varphi_{s,u}(z)\varphi_{u,t}(z) = e^{\Lambda((s,u])(e^{iz}-1)}e^{\Lambda((u,t])(e^{iz}-1)} = e^{(\Lambda((s,u])+\Lambda((u,t]))(e^{iz}-1)} = e^{\Lambda((s,t])(e^{iz}-1)} = \varphi_{s,t}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, weil das Maß Λ additiv ist. Die Existenz des Poisson-Prozesses N folgt daher aus dem Theorem 1.7.1. $\square$

Bemerkung 2.2.2
Die Existenz eines Poissonschen Zählmaßes kann mit Hilfe des Theorems von Kolmogorov bewiesen werden, allerdings in einer allgemeineren Form wie im Theorem 1.1.2.

Aus den Eigenschaften der Poisson-Verteilung folgt u.A. $\mathsf{E}N(B) = \mathsf{var}\,N(B) = \Lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Daher wird $\Lambda(B)$ als die mittlere Anzahl der Punkte von N in der Menge B, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ interpretiert.
Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn $\Lambda(dx) = \lambda dx$ für $\lambda \in (0, \infty)$, d.h., Λ proportional zum Lebesgue-Maß ν_1 auf $\mathbb{R}_+$ ist. Dann heißt $\lambda = \mathsf{E}N(1)$ die Intensität von N.
Wir werden demnächst zeigen, dass in diesem Fall N ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ ist. Zur Erinnerung: Im Abschnitt 1.2 wurde der homogene Poisson-Prozess als ein Erneuerungsprozess mit Zwischenankunftszeiten $T_N \sim \text{Exp}(\lambda)$ definiert: $N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N}\ S_n \leq t\}$, $S_n = T_1 + \ldots + T_n$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$.

Aufgabe 2.2.1
Zeigen Sie, dass der homogene Poisson-Prozess ein homogener Erneuerungsprozess mit $T_1 \stackrel{d}{=} T_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$ ist. Hinweis: man soll zeigen, dass für eine beliebige Exponentialverteilte Zufallsvariable X die integrierte Tailverteilungsfunktion von X gleich F_X ist.

Theorem 2.2.1
Sei $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ ein Zählprozess. Folgende Aussagen sind äquivalent.

1. N ist ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
2. a) $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, $t \geq 0$
   b) für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, gilt dass der Zufallsvektor $(S_1, \ldots, S_n)$ unter der Bedingung $\{N(t) = n\}$ dieselbe Verteilung besitzt, wie die Ordnungsstatistiken von u.i.v. Zufallsvariablen $U_i \in \mathcal{U}([0, t])$, $i = 1, \ldots, n$.
3. a) N besitzt unabhängige Zuwächse,
   b) $\mathsf{E}N(1) = \lambda$, und
   c) es gilt die Eigenschaft 2b).
4. a) N hat stationäre und unabhängige Zuwächse, und

b) es gilt $\mathsf{P}(N(t)=0)=1-\lambda t+o(t)$, $\mathsf{P}(N(t)=1)=\lambda t+o(t)$, $t\downarrow 0$.

5. a) N hat stationäre und unabhängige Zuwächse,

   b) es gilt die Eigenschaft 2a).

Bemerkung 2.2.3 1. Es ist klar, dass die Definition 2.2.1 mit $\Lambda(dx)=\lambda dx$, $\lambda\in(0,\infty)$ nach Theorem 2.2.1 eine äquivalente Definition des homogenen Poisson-Prozesses ist.

2. Der homogene Poisson-Prozess N wurde am Anfang des 20. Jahrhundertes von den Physikern A. Einstein und M. Smoluchovsky eingeführt, um den Zählprozess von Elementarteilchen im Geigerzähler modellieren zu können.

3. Aus 4b) folgt $\mathsf{P}(N(t)>1)=o(t)$, $t\downarrow 0$.

4. Die Intensität von N hat folgende Interpretation: $\lambda=\mathsf{E}N(1)=\frac{1}{\mathsf{E}T_n}$, also die mittlere Anzahl der Erneuerungen von N in einem Zeitintervall der Länge 1.

5. Die Erneuerungsfunktion vom homogenen Poisson-Prozess ist $H(t)=\lambda t$, $t\geq 0$. Dabei gilt offensichtlich $H(t)=\Lambda([0,t])$, $t>0$.

Beweis Schema des Beweises: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1)
1) $\Rightarrow$ 2):
Aus 1) folgt $S_n=\sum_{k=1}^n T_k\sim Erl(n,\lambda)$, weil $T_k\sim\text{Pois}(\lambda)$, $n\in\mathbb{N}$, daher $\mathsf{P}(N(t)=0)=\mathsf{P}(T_1>t)=e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$, und für $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(N(t)=n) &= \mathsf{P}(\{N(t)\geq n\}\setminus\{N(t)\geq n+1\})=\mathsf{P}(N(t)\geq n)-\mathsf{P}(N(t)\geq n+1)\\
&= \mathsf{P}(S_n\leq t)-\mathsf{P}(S_{n+1}\leq t)=\int_0^t\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx-\int_0^t\frac{\lambda^{n+1}x^n}{n!}e^{-\lambda x}dx\\
&= \int_0^t\frac{d}{dx}\left(\frac{(\lambda x)^n}{n!}e^{-\lambda x}\right)dx=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\ t\geq 0.
\end{aligned}$$

Daher ist 2a) bewiesen.
Beweisen wir nun 2b). Nach dem Transformationssatz für Zufallsvektoren (vgl. Satz 3.6.1, WR) aus

$$\begin{cases}
S_1 &= T_1\\
S_2 &= T_1+T_2\\
&\vdots\\
S_{n+1} &= T_1+\ldots+T_{n+1}
\end{cases}$$

folgt, dass die Dichte $f_{(S_1,\ldots,S_n)}$ von $(S_1,\ldots,S_{n+1})^\top$ durch die Dichte von $(T_1,\ldots,T_{n+1})^\top$, $T_i\sim\text{Exp}(\lambda)$, u.i.v., augedrückt werden kann:

$$f_{(S_1,\ldots,S_{n+1})}(t_1,\ldots,t_{n+1})=\prod_{k=1}^{n+1}f_{T_k}(t_k-t_{k-1})=\prod_{k=1}^{n+1}\lambda e^{-\lambda(t_k-t_{k-1})}=\lambda^{n+1}e^{-\lambda t_{n+1}}$$

für beliebige $0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{n+1}$, $t_0=0$.
Für alle anderen $t_1,\ldots,t_{n+1}$ gilt $f_{(S_1,\ldots,S_{n+1})}(t_1,\ldots,t_{n+1})=0$.

Deshalb

$$\begin{aligned}
f_{(S_1,\ldots,S_n)}(t_1,\ldots,t_n|N(t)=n) &= f_{(S_1,\ldots,S_n)}(t_1,\ldots,t_n|S_k\le t,\ k\le n,\ S_{n+1}>t)\\
&= \frac{\int_t^\infty f_{(S_1,\ldots,S_{n+1})}(t_1,\ldots,t_{n+1})dt_{n+1}}{\int_0^t\int_{t_1}^t\ldots\int_{t_{n-1}}^t\int_t^\infty f_{(S_1,\ldots,S_{n+1})}(t_1,\ldots,t_{n+1})dt_{n+1}dt_n\ldots dt_1}\\
&= \frac{\int_t^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t_{n+1}}dt_{n+1}}{\int_0^t\int_{t_1}^t\ldots\int_{t_{n-1}}^t\int_t^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t_{n+1}}dt_{n+1}dt_n\ldots dt_1}\times\\
&\quad \times\mathrm{I}(0\le \mathrm{t}_1\le \mathrm{t}_2\le\ldots\le \mathrm{t}_n\le \mathrm{t})\\
&= \frac{n!}{t^n}\mathrm{I}(0\le \mathrm{t}_1\le \mathrm{t}_2\le\ldots\le \mathrm{t}_n\le \mathrm{t}).
\end{aligned}$$

Das ist genau die Dichte von n u.i.v $\mathcal{U}([0,t])$-Zufallsvariablen.

Aufgabe 2.2.2
Zeigen Sie es.

2) $\Rightarrow$ 3)
Aus 2a) folgt offensichtlich 3b). Jetzt soll lediglich die Unabhängigkeit der Zuwächse von N bewiesen werden. Für beliebiges $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{N}$, $t_0=0<t_1<\ldots<t_n$ gilt für $x=x_1+\ldots+x_n$, dass

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\cap_{k=1}^n\{N(t_k)-N(t_{k-1})=x_k\}) &= \underbrace{\mathsf{P}(\cap_{k=1}^n\{N(t_k)-N(t_{k-1})=x_k\}|N(t_k)=x)}_{\frac{x!}{x_1!\ldots x_n!}\prod_{k=1}^n\left(\frac{t_k-t_{k-1}}{t_n}\right)^{x_k}\text{ nach 2c)}}\times\\
&\quad\times\underbrace{\mathsf{P}(N(t_k)=x)}_{e^{-\lambda t_n}\frac{(\lambda t_n)^x}{x!}\text{ nach 2a)}}\\
&= \prod_{k=1}^n\frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^{x_k}}{x_k!}e^{-\lambda(t_k-t_{k-1})},
\end{aligned}$$

weil die Wahrscheinlichkeit von $(*)$ die Polynomialverteilung mit Parametern n, $\left\{\frac{t_k-t_{k-1}}{t_n}\right\}_{k=1}^n$ angehört. Denn das Ereignis $(*)$ ist es, beim unabhängigen gleichverteilten Werfen von x Punkte auf $[0,t]$, jeweils x_k Punkte im Korb der Länge t_k-t_{k-1}, $k=1,\ldots,n$ zu haben:

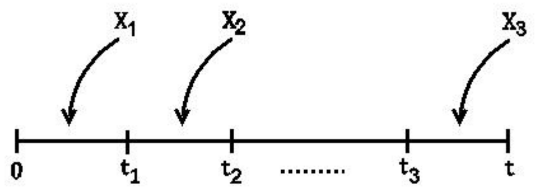

Abbildung 2.4:

Damit ist 3a) bewiesen, weil $\mathsf{P}(\cap_{k=1}^n\{N(t_k)-N(t_{k-1})=x_k\})=\prod_{k=1}^n\mathsf{P}(\{N(t_k)-N(t_{k-1})=x_k\})$.

3) $\Rightarrow$ 4)
Zeigen wir, dass N stationäre Zuwächse besitzt. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$ und $h > 0$ betrachten wir $I(h) = \mathsf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k+h) - N(t_{k-1}+h) = x_k\})$ und zeigen, dass $I(h)$ nicht von $h \in \mathbb{R}$ abhängt. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} I(h) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k+h) - N(t_{k-1}+h) = x_k\} \mid N(t_n+h) = m) \cdot \mathsf{P}(N(t_n+h) = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{x_1! \ldots x_n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t_k + h - t_{n-1} - h}{t_n + h - h} \right)^{x_k} e^{-\lambda(t_n+h)} \frac{(\lambda(t_n+h))}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k) - N(t_{k-1}) = x_k \mid N(t_n+h) = m) \times \mathsf{P}(N(t_n+h) = m) = I(0). \end{aligned}$$

Zeigen wir nun die Eigenschaft 4b) für $h \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(h) = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(h) = 0, N(1) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(h) = 0, N(1) - N(h) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) - N(h) = k, N(1) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k) \mathsf{P}(N(1) - N(h) = k \mid N(1) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k)(1-h)^k. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathsf{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, d.h., $lim_{h \to \infty} \frac{1}{h}(1 - \mathsf{P}(N(h) = 0)) = \lambda$. In der Tat es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(1 - \mathsf{P}(N(h) = 0)) &= \frac{1}{h}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k)(1-h)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k) \cdot \frac{1-(1-h)^k}{h} \\ &\xrightarrow[h \to 0]{} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1-(1-h)^k}{h}}_{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k)k = \mathsf{E}N(1) = \lambda, \end{aligned}$$

weil diese Reihe gleichmäßig in h konvergiert, da sie durch $\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k)k = \lambda < \infty$ dominiert wird wegen der Ungleichung $(1-h)^k \geq 1 - kh$, $h \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$.
Ähnlich kann man zeigen, dass $\lim_{h \to 0} \frac{\mathsf{P}(N(h)=1)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(1) = k)k(1-h)^{k-1} = \lambda$.
4) $\Rightarrow$ 5)
Zu zeigen ist es, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$

$$p_n(t) = \mathsf{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{2.2.1}$$

gilt. Wir beweisen dies induktiv bezüglich n. Zunächst zeigen wir, dass $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, $h = 0$. Dazu betrachten wir $p_0(t+h) = \mathsf{P}(N(t+h) = 0) = \mathsf{P}(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) = p_0(t)p_0(h) =$

$p_0(t)(1-\lambda h+o(h))$, $h\to 0$. Ähnlich kann man zeigen, dass $p_0(t)=p_0(t-h)(1-\lambda h+o(h))$, $h\to 0$. Somit gilt $p_0'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=-\lambda p_0(t)$, $t>0$. Da $p_0(0)=\mathsf{P}(N(0)=0)=1$, folgt aus

$$\begin{cases} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t)\\ p_0(0) &= 0, \end{cases}$$

dass es eine eindeutige Lösung $p_0(t)=e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$ existiert. Nun sei für n die Darstellung (2.2.1) bewiesen. Beweisen wir sie für $n+1$.

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t+h) &= \mathsf{P}(N(t+h)=n+1)\\ &= \mathsf{P}(N(t)=n, N(t+h)-N(t)=1)+\mathsf{P}(N(t)=n+1, N(t+h)-N(t)=0)\\ &= p_n(t)-p_1(h)+p_{n+1}(t)-p_0(h)\\ &= p_n(t)(\lambda h+o(h))+p_{n+1}(t)(1-\lambda h+o(h)),\ \ h\to 0, h>0. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{cases} p_{n+1}'(t) &= -\lambda p_{n+1}(t)+\lambda p_n(t),\ \ t>0\\ p_{n+1}(0) &= 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Da $p_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, bekommt man $p_{n+1}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$ als Lösung von (2.2.2). (In der Tat $p_{n+1}(t)=C(t)e^{-\lambda t}\Rightarrow C'(t)e^{-\lambda t}=\lambda C(t)e^{-\lambda t}\ldots\ldots\ldots\ldots+\lambda p_n(t)$
$C'(t)=\frac{\lambda^{n+1}t^n}{n!}\Rightarrow C(t)=\frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}$, $C(0)=0$)
5) $\Rightarrow$ 1)
Sei N ein Zählprozess $N(t)=\max\{n: S_n\leq t\}$, $t\geq 0$, der Bedingungen 5a) und 5b) erfüllt. Zeigen wir, dass $S_n=\sum_{k=1}^n T_k$, wobei T_k i.i.d. mit $T_k\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $k\in\mathbb{N}$. Da $T_k=S_k-S_{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, $S_0=0$, betrachten wir für $b_0=0\leq a_1<b_1\leq\ldots\leq a_n<b_n$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\ \ (\cap_{k=1}^n\{a_k<S_k\leq b_k\})\\ =\ &\mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n-1}\{N(a_k)-N(b_{k-1})=0, N(b_k)-N(a_k)=1\}\\ &\cap\{N(a_n)-N(b_{n-1})=0, N(b_n)-N(a_n)\geq 1\})\\ =\ &\prod_{k=1}^{n-1}(\underbrace{\mathsf{P}(N(a_k-b_{k-1})=0)}_{e^{-\lambda(a_k-b_{k-1})}}\underbrace{\mathsf{P}(N(b_k-a_k)=1)}_{\lambda(b_k-a_k)e^{-\lambda(b_k-a_k)}})\times\\ &\underbrace{\mathsf{P}(N(a_n-b_{n-1})=0)}_{e^{-\lambda(a_n-b_{n-1})}}\underbrace{\mathsf{P}(N(b_n-a_n)\geq 1)}_{(1-e^{-\lambda(b_n-a_n)})}\\ =\ &e^{-\lambda(a_n-b_{n-1})}(1-e^{-\lambda(b_n-a_n)})\prod_{k=1}^{n-1}\lambda(b_k-a_k)e^{-\lambda(b_k-b_{k-1})}\\ =\ &\lambda^{n-1}(e^{-\lambda a_n}-e^{-\lambda b_n})\prod_{k=1}^{n-1}(b_k-a_k)=\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\lambda^n e^{-\lambda y_n}dy_n\ldots y_1. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Dichte von $(S_1,\ldots,S_n)^\top$ ist also gegeben durch $\lambda^n e^{-\lambda y_n}1(y_1\leq y_2\leq\ldots\leq y_n)$.
□

2.2.2 Zusammengesetzter Poisson-Prozess

Definition 2.2.3
Sei $N=\{N(t),\ t\geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda>0$, konstruiert mit

Hilfe der Folge $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Zwischenankunftszeiten. Sei $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, unabhängigen von $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sei F_U die Verteilungsfunktion von U_1. Für beliebiges $t \geq 0$ setze $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$. Der stochastische Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ heißt *zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Parametern* λ*,* F_U. Die Verteilung von $X(t)$ heißt dabei *zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parametern* λt*,* F_U.

Zusammengesetzter Poisson-Prozess $X(t)$, $t \geq 0$ kann als Summe der „Marken“ U_n eines homogenen markierten Poisson-Prozesses (N, U) bis zur Zeit t interpretiert werden.
So wird $X(t)$ als Gesamtarbeitsbelastung eines Servers bis zur Zeit t in der Warteschlangentheorie interpretiert, falls die Aufforderungen zum Service zu Zeitpunkten $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $n \in \mathbb{N}$ eingehen und mit sich den Arbeitsaufwand U_n, $n \in \mathbb{N}$ mitbringen.
In der Versicherungsmathematik ist $X(t)$, $t \geq 0$ der Gesamtschaden eines Portfolios bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit Schadenanzahl $N(t)$ und Schadenhöhen U_n, $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 2.2.2
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Parametern λ, F_U. Es gelten folgende Eigenschaften:

1. X hat unabhängige stationäre Zuwächse.
2. Falls $\hat{m}_U(s) = \mathsf{E}e^{sU_1}$, $s \in \mathbb{R}$, die momenterzeugende Funktion von U_1 ist, so dass $\hat{m}_U(s) < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, dann gilt
$$\hat{m}_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(\hat{m}_U(s)-1)},\ s \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \quad \mathsf{E}X(t) = \lambda t \mathsf{E}U_1,\ \mathsf{var}\, X(t) = \lambda t \mathsf{E}U_1^2,\ t \geq 0.$$

Beweis 1. Zu zeigen ist, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ und h
$$\mathsf{P}\left(\sum_{i_1=N(t_0+h)+1}^{N(t_1+h)} U_{i_1} \leq x_1, \ldots, \sum_{i_n=N(t_{n-1}+h)+1}^{N(t_n+h)} U_{i_n} \leq x_n\right) = \prod_{k=1}^n \mathsf{P}\left(\sum_{i_k=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} U_{i_k} \leq x_k\right)$$
für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. In der Tat, gilt
$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sum_{i_1=N(t_0+h)+1}^{N(t_1+h)} U_{i_1} \leq x_1, \ldots, \sum_{i_n=N(t_{n-1}+h)+1}^{N(t_n+h)} U_{i_n} \leq x_n\right)\\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n F_n^{*k_j}(x_j)\right) \mathsf{P}\left(\cap_{m=1}^n \{N(t_m+h) - N(t_{m-1}+h) = k_m\}\right)\\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n F_n^{*k_j}(x_j)\right) \left(\prod_{m=1}^n \mathsf{P}(N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m)\right)\\
&= \prod_{m=1}^n \sum_{k_m=0}^{\infty} F_n^{*k_m}(x_m) \mathsf{P}(N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m)\\
&= \prod_{m=1}^n \mathsf{P}\left(\sum_{k_m=N(t_{m-1})+1}^{N(t_m)} \leq x_m\right)
\end{aligned}$$

2.

Aufgabe 2.2.3

□

2.2.3 Cox-Prozess

Ein Cox-Prozess ist ein (im Allgemeinen inhomogener) Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ, das an sich ein zufälliges Maß darstellt. Diese intuitive Vorstellung kann in folgender Definition formalisiert werden.

Definition 2.2.4
Sei $\Lambda = \{\Lambda(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ ein zufälliges f.s. lokal-endliches Maß. Das zufällige Zählmaß $N = \{N(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ wird *Cox-Zählmaß (oder doppelt-stochastisches Poisson-Maß) mit zufälligem Intensitätsmaß* Λ genannt, falls für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n$ gilt $\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n \{N((a_i, b_i]) = k_i\}) = \mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda((a_i,b_i])} \frac{\Lambda^{k_i}((a_i,b_i])}{k_i!}\right)$.
Der Prozess $\{N(t),\ t \ge 0\}$ mit $N(t) = N((0,t])$ heißt *Cox-Prozess* (oder *doppelt-stochastischer Poisson-Prozess*) mit zufälligem Intensitätsmaß Λ.

Beispiel 2.2.1

1. Falls das zufällige Maß Λ f.s. absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes ist, d.h., $\Lambda(B) = \int_B \lambda(t)dt$, B - beschränkt, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, wobei $\{\lambda(t), t \ge 0\}$ ein stochastischer Prozess mit f.s. Borel-meßbaren borel-integrierbaren Trajektorien ist, $\lambda(t) \ge 0$ f.s. für alle $t \ge 0$, der Intensitätsprozess von N genannt wird.

2. Insbesondere kann $\lambda(t) \equiv Y$ sein, wobei Y eine nicht-negative Zufallsvariable ist. Dann gilt $\Lambda(B) = Y\nu_1(B)$, also hat N eine zufällige Intensität Y. Solche Cox-Prozesse werden *gemischte Poisson-Prozesse* genannt.

Einen Cox-Prozess $N = \{N(t),\ t \ge 0\}$ mit Intensitätsprozess $\{\lambda(t),\ t \ge 0\}$ kann man wie folgt explizit konstruieren. Sei $\tilde{N} = \{\tilde{N}(t),\ t \ge 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität 1, der unabhängig von $\{\lambda(t),\ t \ge 0\}$ ist. Dann ist $N \stackrel{d}{=} N_1$, wobei der Prozess $N_1 = \{N_1(t),\ t \ge 0\}$ gegeben ist durch $N_1(t) = \tilde{N}(\int_0^t \lambda(y)dy)$, $t \ge 0$. Die Aussage $N \stackrel{d}{=} N_1$ soll natürlich bewiesen werden. Wir werden sie jedoch ohne Beweis annehmen. Sie bildet auch die Grundlage für die Simulation des Cox-Prozesses N.

2.3 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 2.3.1
Sei $\{N_t\}_{t \ge 0}$ ein Erneuerungsprozess mit Zwischenankunftszeiten T_i, welche exponentialverteilt sind, d.h. $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

a) Beweisen Sie: N_t ist Poisson-verteilt für jedes $t > 0$.

b) Bestimmen Sie den Parameter dieser Poisson-Verteilung.

c) Bestimmen Sie die Erneuerungsfunktion $H(t) = \mathsf{E}\, N_t$.

Aufgabe 2.3.2
Beweisen Sie: Ein (reellwertiger) stochastischer Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0, \infty)\}$ mit unabhängigen Zuwächsen hat bereits dann stationäre Zuwächse, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen $X(t+h) - X(h)$ unabhängig von h ist.

Aufgabe 2.3.3
Sei $N = \{N(t),\, t \in [0, \infty)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass im Intervall $[0, s]$ genau i Ereignisse auftreten unter der Bedingung,

dass im Intervall $[0, t]$ genau n Ereignisse eintreten, d.h. $\mathsf{P}(N(s) = i \mid N(t) = n)$ für $s < t$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2.3.4
Seien $N^{(1)} = \{N^{(1)}(t),\, t \in [0, \infty)\}$ und $N^{(2)} = \{N^{(2)}(t),\, t \in [0, \infty)\}$ unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Die Unabhängigkeit soll in diesem Fall bedeuten, dass die Folgen $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \ldots$ und $T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, \ldots$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass $N = \{N(t) := N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t),\, t \in [0, \infty)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Aufgabe 2.3.5 (Wartezeitenparadoxon):
Für einen Erneuerungsprozess $N = \{N(t),\, t \in [0, \infty)\}$ heißt $T(t) = S_{N(t)+1} - t$ die *Exzesszeit*, $C(t) = t - S_{N(t)}$ die *aktuelle Lebenszeit* und $D(t) = T(t) + C(t) = T_{N(t)+1}$ die *Lebensdauer* zum Zeitpunkt $t > 0$. Sei nun $N = \{N(t),\, t \in [0, \infty)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

a) Berechnen Sie die Verteilung der Exzesszeit $T(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Verteilung der aktuellen Lebenszeit durch $\mathsf{P}(C(t) = t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ und die Dichte $f_{C(t)|N(t)>0}(s) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} \mathsf{1}\{s \leq t\}$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathsf{P}(D(t) \leq x) = (1 - (1 + \lambda \min\{t, x\}) \mathrm{e}^{-\lambda x}) \mathsf{1}\{x \geq 0\}$.

d) Um $\mathsf{E}T(t)$ zu bestimmen, könnte man folgendermaßen argumentieren: Im Mittel liegt t in der MItte des umgebenden Zwischenankuftsintervalls $(S_{N(t)}, S_{N(t)+1})$, d.h. $\mathsf{E}T(t) = \frac{1}{2}\mathsf{E}(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}) = \frac{1}{2}\mathsf{E}T_{N(t)+1} = \frac{1}{2\lambda}$. In Anbetracht des Ergebnisses aus Teil (a) kann dieses Argument nicht stimmen. Wo liegt der Fehler in der Argumentation?

Aufgabe 2.3.6
Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X = \{X(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,\, t \geq 0\}$. Sei $M_{N(t)}(s) = \mathsf{E}s^{N(t)}$, $s \in (0, 1)$, die erzeugende Funktion des Poisson-Prozesses $N(t)$, $\mathcal{L}\{U\}(s) = \mathsf{E}\exp\{-sU\}$ die Laplace-Transformierte von U_i, $i \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{L}\{X(t)\}(s)$ die Laplace-Transformierte von $X(t)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{L}\{X(t)\}(s) = M_{N(t)}(\mathcal{L}\{U\}(s)), \quad s \geq 0$$

gilt.

Aufgabe 2.3.7
Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0, \infty)\}$ mit U_i u.i.v., $U_1 \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$, wobei die Intensität von $N(t)$ durch λ gegeben sei. Zeigen Sie, dass für die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{X(t)\}(s)$ von $X(t)$ gilt:

$$\mathcal{L}\{X(t)\}(s) = \exp\left\{-\frac{\lambda t s}{\gamma + s}\right\}.$$

Aufgabe 2.3.8
Schreiben Sie eine Funktion in **R** (alternativ: Java), der als Parameter ein Zeitpunkt t, eine Intensität λ und ein Wert γ übergeben werden und die als Ergebnis den zufälligen Wert eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Charakteristiken $(\lambda, \mathrm{Exp}(\gamma))$ zum Zeitpunkt t ausgibt. *Hinweis: die Lösungen sollen als kommentierter, strukturierter und lesbarer Ausdruck abgegeben werden.*

Aufgabe 2.3.9
Der stochastische Prozess $N = \{N(t),\, t \in [0,\infty)\}$ sei ein Cox-Prozess mit Intensitätsfunktion $\lambda(t) = Z$, wobei Z eine diskrete Zufallsvariable ist, welche die Werte λ_1 und λ_2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ annimmt. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion sowie den Erwartungswert und die Varianz von $N(t)$.

Aufgabe 2.3.10
Gegeben seien zwei unabhängige homogene Poisson-Prozesse $N^{(1)} = \{N^{(1)}(t),\, t \in [0,\infty)\}$ und $N^{(2)} = \{N^{(2)}(t),\, t \geq 0\}$ mit den Intensitäten λ_1 und λ_2. Weiter sei $X \geq 0$ eine beliebige nichtnegative Zufallsvariable, die von $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ unabhängig ist. Zeigen Sie, dass der Prozess $N = \{N(t),\, t \geq 0\}$ mit

$$N(t) = \begin{cases} N^{(1)}(t), & t \leq X, \\ N^{(1)}(X) + N^{(2)}(t - X), & t > X \end{cases}$$

ein Cox-Prozess ist, dessen Intensitätsprozess $\lambda = \{\lambda(t),\, t \geq 0\}$ gegeben ist durch

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & t \leq X, \\ \lambda_2, & t > X. \end{cases}$$

3 Wiener-Prozess

3.1 Elementare Eigenschaften

Im Beispiel 2) des Abschnittes 1.2 haben wir die *Brownsche Bewegung* (oder *Wiener-Prozess*) $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ definiert als einen Gaußschen Prozess mit $\mathsf{E}W(t) = 0$ und $\mathsf{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s,t\}$, $s,t \geq 0$. Geben wir jetzt eine neue (äquivalente) Definition an.

Definition 3.1.1
Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ heißt Wiener-Prozess (oder Brownsche Bewegung), falls

1. $W(0) = 0$ f.s.
2. W hat unabhängige Zuwächse
3. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $0 \leq s < t$

Die Existenz von W nach Definition 3.1.1 folgt aus dem Satz 1.7.1, weil nämlich $\varphi_{s,t}(z) = \mathsf{E}e^{iz(W(t)-W(s))} = e^{-\frac{(t-s)z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{R}$, und $e^{-\frac{(t-u)z^2}{2}} e^{-\frac{(u-s)z^2}{2}} = e^{-\frac{(t-s)z^2}{2}}$ für $0 \leq s < u < t$, also $\varphi_{s,u}(z)\varphi_{u,t}(z) = \varphi_{s,t}(z)$, $z \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz 1.3.1 folgt außerdem die Existenz einer Version mit stetigen Trajektorien.

Aufgabe 3.1.1
Zeigen Sie, dass das Theorem für $\alpha = 3$, $\sigma = \frac{1}{2}$.

Der Wiener-Prozess ist nach dem Mathematiker Norbert Wiener (1894 - 1964)benannt worden. Warum existiert dann die Brownsche Bewegung? Aus dem Satz von Kolmogorov (Satz 1.1.2) existiert für jede Funktion $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und jede positiv semi-definite Funktion $C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ein reellwertiger Gaußscher Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ mit Mittelwert $\mathsf{E}X(t) = \mu(t)$, $t \geq 0$, und Kovarianzfunktion $\mathsf{cov}(X(s), X(t)) = C(s,t)$, $s,t \geq 0$. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass $C(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \geq 0$ positiv-semidefinit ist.

Aufgabe 3.1.2
Zeigen Sie es.

Deswegen wird oft angenommen, dass der Wiener-Prozess stetige Pfade besitzt (man nimmt einfach die entsprechende Version von ihm).

Theorem 3.1.1
Beide Definitionen des Wiener-Prozesses sind äquivalent.

Beweis 1. Aus der Definition im Abschnitt 1.2 folgt die Definition 3.1.1.
$W(0) = 0$ f.s. folgt aus $\mathsf{var}(W(0)) = \min\{0,0\} = 0$. Beweisen wir nun, dass die Zuwächse von W unabhängig sind. Falls $Y \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ ein n-dimensionaler Gaußscher Zufallsvektor ist und A eine $(n \times n)$-Matrix, dann gilt $AY \sim \mathcal{N}(A\mu, AKA^\top)$, dies folgt aus der expliziten Form der charakteristischen Funktion von Y. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 < \ldots < t_n$,

$Y = (W(t_0), W(t_1), \ldots, W(t_n))^\top$. Es gilt für $Z = (W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1}))^\top$, dass $Z = AY$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist Z auch Gaußsch mit einer Kovarianzmatrix, die diagonal ist. In der Tat gilt $\mathsf{cov}(W(t_{i+1}) - W(t_i), W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \min\{t_{i+1}, t_{j+1}\} - \min\{t_{i+1}, t_j\} - \min\{t_i, t_{j+1}\} + \min\{t_i, t_j\} = 0$ für $i \neq j$. Daher sind die Koordinaten von Z unkorreliert, was für die multivariate Gaußsche Verteilung Unabhängigkeit bedeutet. Deshalb sind die Zuwächse von W unabhängig. Weiterhin, gilt für beliebiges $0 \leq s < t$, dass $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Die Normalverteiltheit folgt aus der Tatsache, dass $Z = AY$ Gaußsch ist, offensichtlich gilt $\mathsf{E}W(t) - \mathsf{E}W(s) = 0$ und $\mathsf{var}(W(t) - W(s)) = \mathsf{var}(W(t)) - 2\,\mathsf{cov}(W(s), W(t)) + \mathsf{var}(W(s)) = t - 2\min\{s, t\} + s = t - s$.

2. Aus der Definition 3.1.1 folgt die Definition im Abschnitt 1.2.
Da $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für $0 \leq s < t$, gilt $\mathsf{cov}(W(s), W(t)) = \mathsf{E}[W(s)(W(t) - W(s) + W(s))] = \mathsf{E}W(s)\mathsf{E}(W(t) - W(s)) + \mathsf{var}\,W(s) = s$, daher gilt $\mathsf{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}$. Aus $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ und $W(0) = 0$ folgt auch, dass $\mathsf{E}W(t) = 0$, $t \geq 0$. Die Tatsache, dass W ein Gaußscher Prozess ist, folgt aus der Relation $Y = A^{-1}Z$, Punkt 1) des Beweises.

□

Definition 3.1.2
Der Prozess $\{W(t),\ t \geq 0\}$, $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))^\top$, $t \geq 0$, heißt *d-dimensionale Brownsche Bewegung*, falls $W_i = \{W_i(t),\ t \geq 0\}$ unabhängige Wiener-Prozesse sind, $i = 1, \ldots, d$.

Die obigen Definitionen und Übungsaufgabe 3.1.1 garantieren uns die Existenz eines Wiener-Prozesses mit stetigen Pfaden. Wie kann man aber eine explizite Konstruktion dieser Pfade angeben? Damit befassen wir uns im nächsten Abschnitt.

3.2 Explizite Konstruktion des Wiener-Prozesses

Konstruieren wir den Wiener-Prozess zunächst auf dem Intervall $[0, 1]$. Die Hauptidee der Konstruktion ist es, einen stochastischen Prozess $X = \{X(t),\ t \in [0, 1]\}$ einzuführen, der auf einem Teilwahrscheinlichkeitsraum von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ definiert ist mit $X \stackrel{d}{=} W$, wobei $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) Y_n$, $t \in [0, 1]$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. $\mathcal{N}(0, 1)$-Zufallsvariablen und $c_n(t) = \int_0^t H_n(s) ds$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, ist. Hier soll $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die orthonormierte Haar-Basis im $L_2([0, 1])$ sein, die jetzt kurz eingeführt wird.

3.2.1 Haar- und Schauder-Funktionen

Definition 3.2.1
Die Funktionen $H_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, heißen *Haar-Funktionen*, falls $H_1(t) = 1$, $t \in [0, 1]$, $H_2(t) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(t) - \mathbb{1}_{(\frac{1}{2}, 1]}(t)$, $H_k(t) = 2^{\frac{n}{2}}(\mathbb{1}_{I_{n,k}}(t) - \mathbb{1}_{J_{n,k}}(t))$, $t \in [0, 1]$, $2^n < k \leq 2^{n+1}$, wobei $I_{n,k} = [a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n-1}]$, $J_{n,k} = (a_{n,k} + 2^{-n-1}, a_{n,k} + 2^{-n}]$, $a_{n,k} = 2^{-n}(k - 2^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

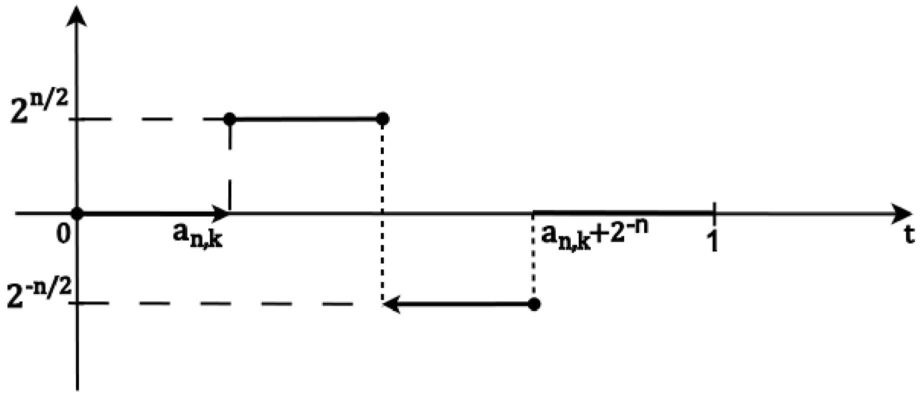

Abbildung 3.1: Haar-Funktionen

Lemma 3.2.1
Das Funktionssystem $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine orthonormierte Basis in $L^2([0,1])$ mit dem Skalarprodukt $< f,g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $f,g \in L^2([0,1])$.

Beweis Die Orthonormiertheit des Systems $< H_k, H_n >= \delta_{kn}$, $k,n \in \mathbb{N}$ folgt unmittelbar aus der Definition 3.2.1. Zeigen wir die Vollständigkeit von $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es genügt zu zeigen, dass für beliebige Funktion $g \in L^2([0,1])$ mit $< g, H_n >= 0$, $n \in \mathbb{N}$, $g = 0$ fast überall auf $[0,1]$ gilt. In der Tat kann die Indikator-Funktion eines Intervalls $1_{[a_{n,k}, a_{n,k}+2^{-n-1}]}$ stets als Linearkombination von H_n, $n \in \mathbb{N}$ aufgeschrieben werden.

$$
\begin{aligned}
1_{[0,\frac{1}{2}]} &= \frac{(H_1 + H_2)}{2}, \\
1_{(\frac{1}{2},1]} &= \frac{(H_1 - H_2)}{2}, \\
1_{[0,\frac{1}{4}]} &= \frac{(1_{[0,\frac{1}{2}]} + \frac{1}{\sqrt{2}} H_2)}{2}, \\
1_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} &= \frac{(1_{[0,\frac{1}{2}]} - \frac{1}{\sqrt{2}} H_2)}{2}, \\
&\vdots \\
1_{[a_{n,k}, a_{n,k}+2^{-n-1}]} &= \frac{(1_{a_{n,k}, a_{n,k}+2^{-n}} + 2^{-\frac{n}{2} H_k})}{2}, \; 2^n < k \le 2^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Daher gilt $\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{(k+1)}{2^n}} g(t)dt = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$, und deshalb $G(t) = \int_0^t g(s)ds = 0$ für $t = \frac{k}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$. Da G stetig auf $[0,1]$ ist, folgt heraus $G(t) = 0$, $t \in [0,1]$, und somit $g(s) = 0$ für fast jedes $s \in [0,1]$. $\square$

Aus Lemma 3.2.1 folgt, dass zwei beliebige Funktionen $f, g \in L^2([0,1])$ die Darstellungen $f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, H_n > H_n$ und $g = \sum_{n=1}^{\infty} < g, H_n > H_n$ haben (diese Reihen konvergieren im $L^2([0,1])$) und $< f,g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f, H_n >< g, H_n >$ (Parseval-Identität).

Definition 3.2.2
Die Funtionen $S_n(t) = \int_0^t H_n(s)ds =< 1_{[0,t]}, H_n >$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ heißen *Schauder-Funktionen*.

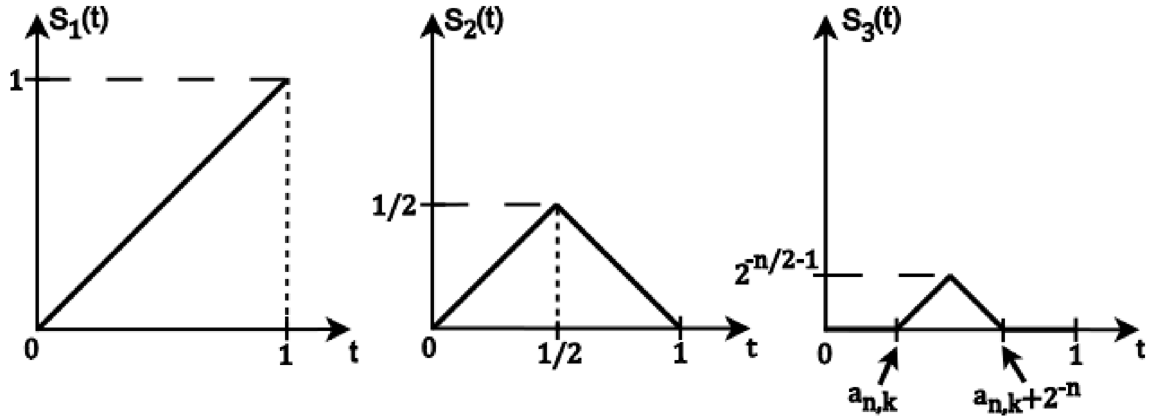

Abbildung 3.2: Schauder-Funktionen

Lemma 3.2.2
Es gilt:

1. $S_n(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
2. $\sum_{k=1}^{2^n} S_{2^n+k}(t) \leq \frac{1}{2} 2^{-\frac{n}{2}}$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
3. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $a_n = O(n^\varepsilon)$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $n \to \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n(t)$ absolut und gleichmäßig in $t \in [0,1]$ und ist folglich eine stetige Funktion auf $[0,1]$.

Beweis 1. folgt unmittelbar aus Definition 3.2.2.

2. folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen S_{2^n+k} für $k = 1, \ldots, 2^n$ disjunkte Träger haben und $S_{2^n+k}(t) \leq S_{2^n+k}(\frac{2k-1}{2^{n-1}}) = 2^{-\frac{n}{2}-1}$, $t \in [0,1]$.

3. Es genügt zu zeigen, dass $R_m = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k>2^n} |a_k| S_k(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und ein $c > 0$ gilt $|a_k| \leq ck^\varepsilon$. Deshalb gilt für alle $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{2^n<k\leq 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leq c \cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \cdot \sum_{2^n<k\leq 2^{n+1}} S_k(t) \leq c \cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \cdot 2^{-\frac{n}{2}-1} \leq c \cdot 2^{\varepsilon - n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}.$$

Da $\varepsilon < \frac{1}{2}$, gilt $R_m \leq c \cdot 2^\varepsilon \sum_{n\geq m} 2^{-n(\frac{1}{2}-\varepsilon)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

□

Lemma 3.2.3
Sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von (nicht unbedingt unabhängigen) Zufallsvariablen definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|Y_n| = O((\log n)^{\frac{1}{2}})$, $n \to \infty$.

Beweis Zu zeigen ist, dass für $c > \sqrt{2}$ und fast allen $\omega \in \Omega$ ein $n_0 = n_0(\omega, c) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|Y_n| \leq c(\log n)^{\frac{1}{2}}$ für $n \geq n_0$. Falls $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $x > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \left(-\frac{1}{y}\right) d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{y^2}{2}} - \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{y^2} dy\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

(Man kann auch zeigen, dass $\bar{\Phi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \to \infty$.) Daher gilt für $c > \sqrt{2}$

$$\sum_{n \geq 2} \mathsf{P}(|Y_n| > c(\log n)^{\frac{1}{2}}) \leq c^{-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \geq 2} (\log n)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{c^2}{2} \log n} = \frac{c^{-1}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 2} (\log n)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{c^2}{2}} < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli (vgl. WR-Skript, Lemma 2.2.1) gilt $\mathsf{P}(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k) = 0$, falls $\sum_k \mathsf{P}(A_k) < \infty$ mit $A_k = \{|Y_k| > e \cdot (\log k)^{\frac{1}{2}}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Daher tritt A_k in unendlicher Anzahl nur mit Wahrscheinlichkeit 0, mit $|Y_n| \leq c(\log n)^{\frac{1}{2}}$ für $n \geq n_0$. □

3.2.2 Wiener-Prozess mit f.s. stetigen Pfaden

Lemma 3.2.4
Sei $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen. Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Zahlen mit $\sum_{k=1}^{2^m} |a_{2^m+k}| \leq 2^{-\frac{m}{2}}$, $\sum_{k=1}^{2^m} |b_{2^m+k}| \leq 2^{-\frac{m}{2}}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren f.s. die Grenzwerte $U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n$ und $V = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Y_n$, $U \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2)$, $V \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2)$, wobei $\mathsf{cov}(U,V) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. U und V sind genau dann unabhängig, wenn $\mathsf{cov}(U,V) = 0$.

Beweis Aus Lemma 3.2.2 und 3.2.3 ergibt sich f.s. die Existenz der Grenzwerte U und V (ersetze dafür a_n durch Y_n und S_n durch z.B. b_n in Lemma 3.2.2). Aus der Faltungsstabilität der Normalverteilung folgt für $U^{(m)} = \sum_{n=1}^{m} a_n Y_n$, $V^{(m)} = \sum_{n=1}^{m} b_n Y_n$, dass $U^{(m)} \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{m} a_n^2)$, $V^{(m)} \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{m} b_n^2)$. Da $U^{(m)} \xrightarrow{d} U$, $V^{(m)} \xrightarrow{d} V$ folgt somit $U \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2)$, $V \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2)$. Weiterhin, gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}(U,V) &= \lim_{m \to \infty} \mathsf{cov}(U^{(m)}, V^{(m)}) \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{i,j=1}^{m} a_i b_j \, \mathsf{cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i,
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn nach Lemma 3.2.3 gilt $|Y_n| \leq c \underbrace{(\log n)^{\frac{1}{2}}}_{\leq c n^{\varepsilon},\ \varepsilon < \frac{1}{2}}$, für $n \geq \mathbb{N}_0$, und die majorisierende Reihe konvergiert nach Lemma 3.2.2:

$$\sum_{n,k=2^m}^{2^{m+1}} a_n b_k Y_n Y_k \overset{f.s.}{\leq} \sum_{n,k=2^m}^{2^{m+1}} a_n b_k c^2 n^{\varepsilon} k^{\varepsilon} \leq 2^{2\varepsilon(m+1)} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} = 2^{-(1-2\varepsilon)m}, \quad 1 - 2\varepsilon > 0.$$

Für ausreichend großes m gilt $\sum_{n,k=m}^{\infty} a_n b_k Y_n Y_k \leq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-(1-2\varepsilon)j} < \infty$, und diese Reihe konvergiert f.s.
Zeigen wir nun

$$\mathsf{cov}(U,V) = 0 \iff U \text{ und } V \text{ unabhängig}$$

Aus der Unabhängigkeit folgt immer die Unkorelliertheit von Zufallsvariablen. Zeigen wir hier das Gegenteil. Aus $(U^{(m)}, V^{(m)}) \xrightarrow[m\to\infty]{d} (U, V)$ folgt $\varphi_{(U^{(m)},V^{(m)})} \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi_{(U,V)}$, also

$$\begin{aligned}
\varphi_{(U^{(m)},V^{(m)})}(s,t) &= \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\exp\{i(t\sum_{k=1}^{m} a_k Y_k + s\sum_{n=1}^{m} b_n Y_n)\} \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\exp\{i\sum_{k=1}^{m}(ta_k + sb_k)Y_k\} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m} \mathsf{E}\exp\{i(ta_k + sb_k)Y_k\} \\
&= \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\exp\{-\frac{(ta_k+sb_k)^2}{2}\} = \exp\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ta_k+sb_k)^2}{2}\} \\
&= \exp\{-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\}\exp\{ts\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k}_{\mathsf{cov}(U,V)=0}\}\exp\{-\frac{s^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\} = \varphi_U(t)\varphi_V(s),
\end{aligned}$$

$s, t \in \mathbb{R}$. Daher sind U und V unabhängig, falls $\mathsf{cov}(U,V) = 0$. □

Theorem 3.2.1
Sei $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, die $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Dann gibt es einen Teil-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathsf{P})$ von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ und einen stochastischen Prozess $X = \{X(t),\ t \in [0,1]\}$ darauf, so dass $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n S_n(t)$, $t \in [0,1]$, und $X \overset{d}{=} W$. Hierbei ist $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Familie der Schauder-Funktionen.

Beweis Nach Lemma 3.2.2, 2) erfüllen die Koeffizienten $S_n(t)$ für jedes $t \in [0,1]$ die Bedingungen des Lemmas 3.2.4. Darüberhinaus existiert nach Lemma 3.2.3 eine Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ mit $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für jedes $\omega \in \Omega_0$ die Relation $|Y_n(\omega)| = O(\sqrt{\log n})$, $n \to \infty$, gilt. Sei $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \Omega_0$. Schränken wir den Wahrscheinlichkeitsraum auf $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathsf{P})$ ein. Dann ist die Bedingung $a_n = Y_n(\omega) = O(n^{\varepsilon})$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, erfüllt, weil $\sqrt{\log n} < n^{\varepsilon}$ für ausreichend große n, und nach Lemma 3.2.2, 3) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) S_n(t)$ absolut und gleichmäßig in $t \in [0,1]$ gegen die Funktion $X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega_0$, die eine stetige Funktion in t für jedes $\omega \in \Omega_0$ ist. $X(\cdot, t)$ ist eine Zufallsvariable, weil nach Lemma 3.2.4 die Konvergenz dieser Reihe fast sicher gilt. Weiterhin, gilt $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(t))$, $t \in [0,1]$.
Zeigen wir, dass der so definierte stochastische Prozess auf $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathsf{P})$ ein Wiener-Prozess ist. Dazu prüfen wir die Bedingungen der Definition 3.1.1. Betrachten wir beliebige Zeitpunkte

$0 \le t_1 < t_2, t_3 < t_4 \le 1$ und berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}(X(t_2)-X(t_1), X(t_4)-X(t_3)) &= \mathsf{cov}(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(S_n(t_2)-S_n(t_1)), \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(S_n(t_4)-S_n(t_3))) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(S_n(t_2)-S_n(t_1))(S_n(t_4)-S_n(t_3)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(< H_n, 1_{[0,t_2]} > - < H_n, 1_{[0,t_1]} >) \times \\
&\quad (< H_n, 1_{[0,t_4]} > - < H_n, 1_{[0,t_3]} >) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} < H_n, 1_{[0,t_2]} - 1_{[0,t_1]} >< H_n, 1_{[0,t_4]} - 1_{[0,t_3]} > \\
&= < 1_{[0,t_2]} - 1_{[0,t_1]}, 1_{[0,t_4]} - 1_{[0,t_3]} > \\
&= < 1_{[0,t_2]}, 1_{[0,t_4]} > - < 1_{[0,t_1]}, 1_{[0,t_4]} > \\
&\quad - < 1_{[0,t_2]}, 1_{[0,t_3]} > + < 1_{[0,t_1]}, 1_{[0,t_3]} > \\
&= \min\{t_2, t_4\} - \min\{t_1, t_4\} - \min\{t_2, t_3\} + \min\{t_1, t_3\},
\end{aligned}$$

weil $< 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} >= \int_0^{\min\{s,t\}} du = \min\{s,t\}$, $s, t \in [0,1]$. Falls $0 \le t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 < 1$, dann gilt $\mathsf{cov}(X(t_2)-X(t_1), X(t_4)-X(t_3)) = t_2 - t_1 - t_2 + t_1 = 0$, also sind die Zuwächse von X (nach Lemma 3.2.4) unkorreliert. Weiterhin gilt $X(0) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(0)) = \mathcal{N}(0,0)$, daher $X(0) \overset{f.s.}{=} 0$. Daraus folgt für $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $t_3 = 0$, $t_4 = t$, dass $\mathsf{var}(X(t)) = t$, $t \in [0,1]$, und für $t_1 = t_3 = s$, $t_2 = t_4 = t$, dass $\mathsf{var}(X(t) - X(s)) = t - s - s + s = t - s$, $0 \le s < t \le 1$. Somit gilt $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, und nach Definition 3.1.1 gilt $X \overset{d}{=} W$. □

Bemerkung 3.2.1 1. Theorem 3.2.1 bildet eine Grundlage für die approximative Simulation der Pfade einer Brownschen Bewegung durch die Teilsummen $X^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} Y_k S_k(t)$, $t \in [0,1]$, für ausreichend großes $n \in \mathbb{N}$.

2. Die Konstruktion in Theorem 3.2.1 kann verwendet werden, um den Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden auf einem Intervall $[0, t_0]$, für beliebiges $t_0 > 0$ zu erzeugen. Falls $W = \{W(t),\ t \in [0,1]\}$ ein Wiener-Prozess auf $[0,1]$ ist, dann ist $Y = \{Y(t),\ t \in [0, t_0]\}$ mit $Y(t) = \sqrt{t_0} W(\frac{t}{t_0})$, $t \in [0, t_0]$, ein Wiener-Prozess auf $[0, t_0]$.

   Aufgabe 3.2.1
   Beweisen Sie es.

3. Der Wiener-Prozess W mit stetigen Pfaden auf $\mathbb{R}_+$ kann wie folgt explizit konstruiert werden. Seien $W^{(n)} = \{W^{(n)}(t),\ t \in [0,1]\}$ unabhängige Kopien des Wiener-Prozesses wie in Theorem 3.2.1. Definiere $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(t \in [n-1, n])[\sum_{k=1}^{n-1} W^{(k)}(1) - W^{(n)}(t - (n-1))]$, $t \ge 0$, also,

$$W(t) = \begin{cases} W^{(1)}(t),\ t \in [0,1], \\ W^{(1)}(1) + W^{(2)}(t-1),\ t \in [1,2], \\ W^{(1)}(1) + W^{(2)}(1) + W^{(3)}(t-2),\ t \in [2,3], \\ \text{usw.} \end{cases}$$

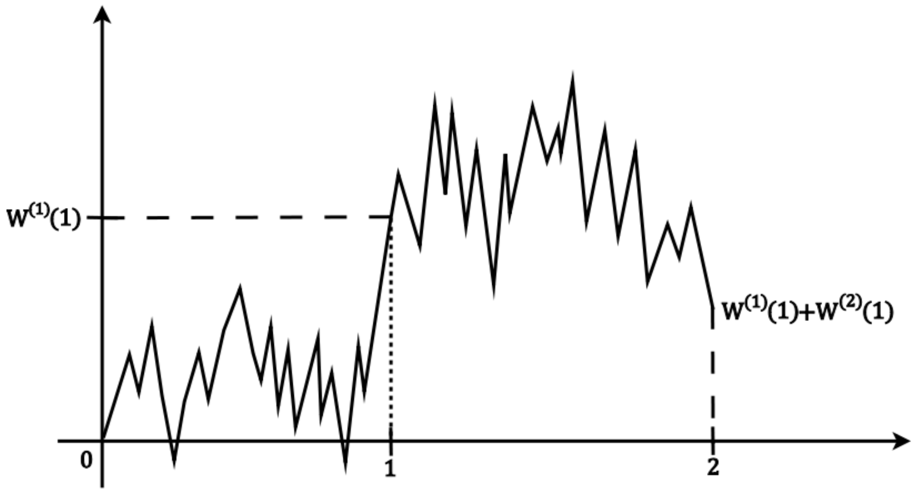

Abbildung 3.3:

Aufgabe 3.2.2
Zeigen Sie, dass der so eingeführte stochastische Prozess $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess auf $\mathbb{R}_+$ ist.

3.3 Verteilungs- und Pfadeeigenschaften vom Wiener-Prozess

3.3.1 Verteilung des Maximums

Theorem 3.3.1
Sei $W = \{W(t),\ t \in [0,1]\}$ ein Wiener-Prozess über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Dann gilt:

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} W(t) > x\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \tag{3.3.1}$$

für alle $x \geq 0$.

Die in 3.3.1 gegebene Abbildung $\max_{t\in[0,1]} W(t) : \Omega \to [0,\infty)$ ist eine wohldefinierte Zufallsvariable, denn es gilt: $\max_{t\in[0,1]} W(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \max_{i=1,\ldots,k} W(\frac{i}{k},\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, weil die Trajektorien von $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ stetig sind. Aus 3.3.1 folgt, dass $\max_{t\in[0,1]} W(t)$ einen exponentiell beschränkten Tail hat: somit hat $\max_{t\in[0,1]} W(t)$ endliche k-te Momente.

Hilfsmittel für Beweis von Theorem 3.3.1
Sei $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ ein Wiener-Prozess und $Z_1, Z_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathsf{P}(Z_i = 1) = \mathsf{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ für alle $i \geq 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\{\tilde{W}^n(t),\ t \in [0,1]\}$ durch $\tilde{W}^n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\frac{Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}$, wobei $S_i = Z_1 + \ldots + Z_i$, $i \geq 1$, $S_0 = 0$.

Lemma 3.3.1
Für jedes $k \geq 1$ und beliebige $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ gilt:

$$\left(\tilde{W}^{(n)}(t_1), \ldots, \tilde{W}^{(n)}(t_k)\right)^\top \xrightarrow{d} \left(W(t_1), \ldots, W(t_k)\right)^\top.$$

Beweis Spezialfall $k = 2$ (für $k > 2$ verläuft der Beweis analog). Sei $t_1 < t_2$. Für alle $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
s_1\tilde{W}^{(n)}(t_1) + s_2\tilde{W}^{(n)}(t_2) &= (s_1+s_2)\frac{S_{\lfloor nt_1\rfloor}}{\sqrt{n}} + s_2\frac{(S_{\lfloor nt_2\rfloor} - S_{\lfloor nt_1\rfloor+1})}{\sqrt{n}} \\
&\quad + Z_{\lfloor nt_1\rfloor+1}((nt_1 - \lfloor nt_1\rfloor)\frac{s_1}{\sqrt{n}} + \frac{s_2}{\sqrt{n}}) \\
&\quad + Z_{\lfloor nt_2\rfloor+1}(nt_2 - \lfloor nt_2\rfloor)\frac{s_2}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}e^{i(s_1\tilde{W}^{(n)}(t_1)+s_2\tilde{W}^{(n)}(t_2))} &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}e^{i\frac{s_1+s_2}{\sqrt{n}}S_{\lfloor nt_1\rfloor}}\mathsf{E}e^{i\frac{s_2}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt_2\rfloor}-S_{\lfloor nt_1\rfloor+1})} \\
&= \left| \mathsf{E}e^{i\frac{s_1+s_2}{\sqrt{n}}s_{\lfloor nt_1\rfloor}} = \varphi_{S_{\lfloor nt_1\rfloor}}\left(\frac{s_1+s_2}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{Z_1}\left(\frac{s_1+s_2}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\lfloor nt_1\rfloor} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\varphi_{Z_1}\left(\frac{s_1+s_2}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\lfloor nt_1\rfloor}\left(\varphi_{Z_1}\left(\frac{s_2}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\lfloor nt_2\rfloor-\lfloor nt_1\rfloor-1} \\
&= \left| \lim_{n\to\infty}\varphi^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{s^2}{2}} \right| \\
&= e^{-\frac{\left(s_1^2t_1+2s_1s_2\min\{t_1,t_2\}+s_2^2t_2\right)}{2}} \\
&= \varphi_{(W(t_1),W(t_2))}(s_1,s_2),
\end{aligned}
$$

wobei $\varphi_{(W(t_1),W(t_2))}$ die charakteristische Funktion von $(W(t_1), W(t_2))$ ist. $\square$

Lemma 3.3.2
Sei $\tilde{W}^{(n)} = \max_{t\in[0,1]}\tilde{W}^{(n)}(t)$. Dann gilt:

$$
\tilde{W}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k=1,\ldots,n} S_k, \quad \text{für alle } n = 1,2,\ldots
$$

und

$$
\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(\tilde{W}^{(n)} \leq x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy, \quad \text{für alle } x \geq 0.
$$

Ohne Beweis

Beweis von Theorem 3.3.1
Aus Lemma 3.3.1 folgt für $x \geq 0$, $k \geq 1$ und $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{t\in\{t_1,\ldots,t_k\}}\tilde{W}^{(n)}(t) > x\right) = \mathsf{P}\left(\max_{t\in\{t_1,\ldots,t_k\}} W(t) > x\right) \\
&\Rightarrow \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]}\tilde{W}^{(n)}(t) > x\right) \geq \mathsf{P}\left(\max_{t\in\{t_1,\ldots,t_k\}} W(t) > x\right).
\end{aligned}
$$

Mit $(t_1,\ldots,t_k)^\top = \left(\frac{1}{k},\ldots,\frac{k}{k}\right)^\top$ und $\max_{t\in[0,1]} W(t,\omega) = \lim_{k\to\infty}\max_{i=1,\ldots,k} W\left(\frac{1}{k},\omega\right)$ gilt

$$
\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]}\tilde{W}^{(n)}(t) > x\right) \geq \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} W(t) > x\right).
$$

Aus Lemma 3.3.2 folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 3.3.1
Sei $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt:

$$\mathsf{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} = 0\right) = 1.$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left|\frac{W(t)}{t} - \frac{W(n)}{n}\right| &\leq \left|\frac{W(t)}{t} - \frac{W(n)}{t}\right| + \left|\frac{W(n)}{t} - \frac{W(n)}{n}\right| \\
&\leq |W(n)| \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{n}\right| + \frac{1}{n} \sup_{t\in[n,n+1]} |W(t) - W(n)| \\
&\leq \frac{2}{n} |W(n)| - \frac{Z(n)}{n},
\end{aligned}$$

wobei $Z(n) = \sup_{t\in[0,1]} |W(n+t) - W(n)|$, $t \in [n, n+1)$. Es gilt

$$\frac{2}{n} |W(n)| = \frac{2}{n} \left|\sum_{i=1}^{\infty} (W(i) - W(i-1))\right| \xrightarrow{f.s.} 2\,|\mathsf{E}W(1)| = 0.$$

Wir zeigen, dass $\mathsf{E}Z(1) < \infty$.

$$\mathsf{P}\left(Z(1) > x\right) \leq \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} W(t) > x\right) + \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} (-W(t)) > x\right) = 2\mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} W(t) > x\right),$$

weil $\{-W(t),\ t \in [0,1]\}$ auch ein Wiener-Prozess ist. Es gilt

$$\mathsf{P}\left(Z(1) > x\right) \leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{und somit} \quad \frac{Z(n)}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Daraus folgt $\frac{W(t)}{t} \xrightarrow{f.s.} 0$ für $t \to \infty$. □

3.3.2 Invarianzeigenschaften

Bestimmte Transformationen des Wiener-Prozesses führen wieder zu einem Wiener-Prozess.

Theorem 3.3.2
Sei $\{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann sind die stochastischen Prozesse $\{Y^{(i)}(t),\ t \geq 0\}$, $i = 1, \ldots, 4$, mit

$$\begin{aligned}
Y^{(1)}(t) &= -W(t), && \text{(Symmetrie)} \\
Y^{(2)}(t) &= W(t+t_0) - W(t_0) \quad \text{für ein } t_0 > 0, && \text{(Verschiebung des Nullpunktes)} \\
Y^{(3)}(t) &= \sqrt{c}W(\tfrac{t}{c}) \quad \text{für ein } c > 0, && \text{(Skalierung)} \\
Y^{(4)}(t) &= \begin{cases} tW(\frac{1}{t}), & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases} && \text{(Spiegelung bei } t = 0)
\end{aligned}$$

ebenfalls Wiener-Prozesse.

Beweis 1. $Y^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$, haben unabhängige Zuwächse mit $Y^{(i)}(t_2) - Y^{(i)}(t_1) \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$.

2. $Y^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, \dots, 4$.

3. $Y^{(i)}$, $i = 1, \dots, 3$, haben stetige Trajektorien. $\{Y^{(i)}(t),\ t \geq 0\}$ hat stetige Trajektorien für $t > 0$.

4. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{t\to 0} tW(\frac{1}{t}) = 0$.
$\lim_{t\to 0} tW(\frac{1}{t}) = \lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} \overset{f.s.}{=} 0$ wegen Korollar 3.3.1.

□

Korollar 3.3.2
Sei $\{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt:

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) = \infty\right) = \mathsf{P}\left(\inf_{t\geq 0} W(t) = -\infty\right) = 1.$$

Beweis Für $x, c > 0$ gilt:

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) > x\right) = \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W\left(\frac{t}{c}\right) > \frac{x}{\sqrt{c}}\right) = \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) > \frac{x}{\sqrt{c}}\right)$$

$$\Rightarrow \mathsf{P}\left(\{\sup_{t\geq 0} W(t) = 0\} \cup \{\sup_{t\geq 0} W(t) = \infty\}\right) = \mathsf{P}(\sup_{t\geq 0} W(t) = 0) + \mathsf{P}(\sup_{t\geq 0} W(t) = \infty) = 1.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) = 0\right) &= \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) \leq 0\right) \leq \mathsf{P}\left(W(t) \leq 0, \sup_{t\geq 1} W(t) \leq 0\right) \\
&= \mathsf{P}\left(W(1) \leq 0, \sup_{t\geq 1}(W(t) - W(1)) \leq -W(1)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 1} W(t) - W(1) \leq -W(t) \mid W(1) = x\right) \mathsf{P}\left(W(1) \in dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0}(W(t) - W(1)) \leq -x \mid W(1) = x\right) \mathsf{P}\left(W(1) \in dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) = 0\right) \mathsf{P}\left(W(1) \in dx\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) = 0\right) \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

also $\mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) = 0\right) = 0$ und somit $\mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} W(t) = \infty\right) = 1$.
Analog kann man zeigen, dass $\mathsf{P}\left(\inf_{t\geq 0} W(t) = -\infty\right) = 1$. □

Bemerkung 3.3.1
$\mathsf{P}\left(\sup_{t\geq 0} X(t) = \infty, \inf_{t\geq 0} X(t) = -\infty\right) = 1$ bedeutet, dass die Trajektorien von W unendlich oft zwischen positiven und negativen Werten auf $[0, \infty)$ oszillieren.

Korollar 3.3.3
Sei $\{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt

$$\mathsf{P}\left(\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist nirgendwo differenzierbar in } [0, \infty)\right) = 1.$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist nirgendwo differenzierbar in } [0,\infty)\} \\
&= \cap_{n=0}^{\infty}\{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist nirgendwo diffenrenzierbar in } [n,n+1)\}.
\end{aligned}
$$

Es genügt zu zeigen, dass $\mathsf{P}(\omega \in \Omega : W(\omega)$ differenzierbar für ein $t_0 = t_0(\omega) \in [0,1]) = 0$. Definiere die Menge

$$
A_{nm} = \left\{\omega \in \Omega : \text{ es gibt ein } t_0 = t_0(\omega) \in [0,1] \text{ mit } |X(t_0\omega + h,\omega) - W(t_0(\omega,\omega))| \leq mh, \ \forall h \in \left[0,\frac{4}{k}\right]\right\}.
$$

Dann gilt

$$
\{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ differenzierbar für ein } t_0 = t_0(\omega)\} = \cup_{m\geq 1}\cup_{n\geq 1} A_n m.
$$

Zu zeigen bleibt $\mathsf{P}(\cup_{m\geq 1}\cup_{n\geq 1} A_{nm}) = 0$.
Sei $k_0(\omega) = \min_{k=1,2,\ldots}\{\frac{k}{n} \geq t_0(\omega)\}$. Dann gilt für $\omega \in A_{nm}$ und $j = 0,1,2$

$$
\begin{aligned}
\left|W\left(\frac{k_0(\omega)+j+1}{n},\omega\right) - W\left(\frac{k_0(\omega)+j}{n},\omega\right)\right| &\leq \left|W\left(\frac{k_0(\omega)+j+1}{n},\omega\right) - W\left(t_0(\omega),\omega\right)\right| \\
&\quad + \left|W\left(\frac{k_0(\omega)+j}{n},\omega\right) - W\left(t_1(\omega),\omega\right)\right| \\
&\leq \frac{8m}{n}.
\end{aligned}
$$

Sei $\Delta_0(k) = W(\frac{k+1}{n}) - W(\frac{k}{n})$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_{nm}) &\leq \mathsf{P}\left(\cup_{k=0}^{n}\cup_{j=0}^{2}|\Delta_n(k+j)| \leq \frac{8m}{n}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}\left(\cap_{j=0}^{2}|\Delta_n(k+j)| \leq \frac{8m}{n}\right) = \mathsf{P}\left(|\Delta_n(0)| \leq \frac{8m}{n}\right) \\
&\leq (n+1)\left(\frac{16m}{\sqrt{2\pi n}}\right)^3 \to 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}
$$

und weil $A_{nm} \subset A_{n+1,m}$ gilt, folgt $\mathsf{P}\left(A_{nm}\right) = 0$. □

Korollar 3.3.4
Mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt:

$$
\sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq t_0<\ldots<t_n\leq 1}\sum_{i=1}^{n}|W(t_i) - W(t_{i-1})| = \infty,
$$

d.h. $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ hat f.s. Trajektorien mit unbeschränkter Variation.

Beweis Weil jede stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit beschränkter Variation fast überall differenzierbar ist, ergibt sich die Behauptung aus Korollar 3.3.3.

<u>Alternativer Beweis</u>
Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2^n}\left|W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right| = \infty$.

Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right)^2 - t$. Daraus folgt $\mathsf{E}Z_n = 0$ und $\mathsf{E}Z_n^2 = t^2 2^{-n+1}$ und mit der Tschebyschev-Ungleichung

$$\mathsf{P}\left(|Z_n| < \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}Z_n^2}{\varepsilon^2} = \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 2^{-n+1}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(|Z_n| > \varepsilon\right) \overset{f.s.}{=} 0.$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli ergibt sich, dass $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ fast sicher und somit

$$\begin{aligned} 0 \leq t \quad &\leq \sum_{i=1}^{2^n} \left(W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right)^2 \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq 2^n} \left| W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right)\right| \sum_{i=1}^{2^n} \left| W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, weil W stetige Trajektorien hat und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq 2^n} \left| W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right)\right| = 0.$$

□

3.4 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 3.4.1
Geben Sie eine intuitive (exakte!) Methode an um Trajektorien eines Wiener-Prozesses $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ zu realisieren. Nutzen Sie dabei die Unabhängigkeit und die Verteilung der Zuwächse von W. Schreiben Sie zudem ein Programm in **R** zur Simulation von Pfaden von W. Zeichnen Sie drei Pfade $t \mapsto W(t,\omega)$ für $t \in [0,1]$ in ein gemeinsames Schaubild.

Aufgabe 3.4.2
Es sei der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ gegeben und $L := \mathrm{argmax}_{t\in[0,1]} W(t)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{P}(L \leq x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{x}, \quad x \in [0,1].$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\max_{r\in[0,t]} W(r) \overset{d}{=} |W(t)|$.

Aufgabe 3.4.3
Zur Simulation eines Wiener-Prozesses $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ können wir auch die Approximation

$$W_n(t) = \sum_{k=1}^{n} S_k(t) z_k$$

verwenden, wobei die $S_k(t)$, $t \in [0,1]$, $k \geq 1$ die *Schauder-Funktionen* sind, sowie $z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ u.i.v. Zufallsvariablen, und die Reihe fast sicher für alle $t \in [0,1]$ konvergiert ($n \to \infty$).

a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0,1]$ die Approximation $W_n(t)$ auch im L^2-Sinne gegen $W(t)$ konvergiert.

b) Schreiben Sie ein Programm in **R** (alternativ: C) zur Simulation des Wiener-Prozesses $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$.

c) Simulieren Sie drei Pfade $t \mapsto W(t,\omega)$ für $t \in [0,1]$ und zeichnen Sie diese in ein gemeinsames Schaubild. Betrachten Sie hierbei die Stützstellen $t_k = \frac{k}{n}$, $k = 0,\dots,n$ mit $n = 2^8 - 1$.

Aufgabe 3.4.4
Für den Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ definieren wir den Prozess des Maximums, welcher gegeben ist durch $M = \{M(t) := \max_{s\in[0,t]} W(s),\, t \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) Die Dichte $f_{M(t)}$ des Maximums $M(t)$ ist gegeben durch

$$f_{M(t)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} 1\{x \geq 0\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft $\mathsf{P}(M(t) > x) = 2\mathsf{P}(W(t) > x)$.

b) Erwartungswert und Varianz von $M(t)$ sind gegeben durch

$$\mathsf{E}M(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \quad \mathsf{var}\, M(t) = t(1 - 2/\pi).$$

Nun definieren wir $\tau(x) := \operatorname{argmin}_{s\in\mathbb{R}}\{W(s) = x\}$ als den ersten Zeitpunkt, zu dem der Wiener-Prozess den Wert x annimmt.

c) Bestimmen Sie die Dichte von $\tau(x)$ und zeigen Sie: $\mathsf{E}\tau(x) = \infty$.

Aufgabe 3.4.5
Sei $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse ebenfalls Wiener-Prozesse sind:

$$W_1(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tW(1/t), & t > 0, \end{cases} \quad W_2(t) = \sqrt{c}W(t/c), \quad c > 0.$$

Aufgabe 3.4.6
Es sei der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ gegeben. Die Größe $Q(a,b)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess die Halbgerade $y = at + b$, $t \geq 0$, $a, b > 0$ überschreitet. Beweisen Sie:

a) $Q(a,b) = Q(b,a)$ und $Q(a, b_1 + b_2) = Q(a,b_1)Q(a,b_2)$,

b) $Q(a,b)$ ist gegeben durch $Q(a,b) = \exp\{-2ab\}$.

4 Lèvy Prozesse

4.1 Lèvy-Prozesse

Definition 4.1.1
Ein stochastischer Prozess $\{X(t),\ t \geq 0\}$ heißt Lèvy-Prozess, wenn

1. $X(0) = 0$,
2. $\{X(t)\}$ hat stationäre und unabhängige Zuwächse,
3. $\{X(t)\}$ stochastisch stetig ist, d.h. für beliebiges $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$:
$$\lim_{t \to t_0} \mathsf{P}(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0.$$

Beachte

- Man kann sich leicht überlegen, dass zusammengesetzte Poisson-Prozesse die 3 Bedingungen erfüllen, denn für bel. $\varepsilon > 0$ gilt
$$\mathsf{P}\left(|X(t) - X(t_0)| < \varepsilon\right) \geq \mathsf{P}\left(|X(t) - X(t_0)| > 0\right) \leq 1 - e^{-\lambda|t-t_0|} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0.$$
- Ferner gilt für den Wiener-Prozess für bel. $\varepsilon > 0$
$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi(t-t_0)}} \int_t^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2(t-t_0)}\right) dy \\ &\overset{x = \frac{y}{\sqrt{t-t_0}}}{=} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{t}{\sqrt{t-t_0}}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow[t \to t_0]{} 0. \end{aligned}$$

4.1.1 Unbegrenzte Teilbarkeit

Definition 4.1.2
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable. Dann nennt man X *unbegrenzt teilbar*, wenn für bel. $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ existieren mit $X \overset{d}{=} Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}$.

Theorem 4.1.1
Sei $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess. Dann ist die Zufallsvariable $X(t)$ für jedes $t \geq 0$ unbegrenzt teilbar.

Beweis Für bel. $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar, dass
$$X(t) = X\left(\frac{t}{n}\right) + \left(X\left(\frac{2t}{n}\right) - X\left(\frac{t}{n}\right)\right) + \ldots + \left(X\left(\frac{nt}{n}\right) - X\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right).$$
Da $\{X(t)\}$ unabhängige stationäre Zuwächse hat, sind Summanden offenbar unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen. $\square$

Lemma 4.1.1
Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn sich die charakteristische Funktion φ_X von X für jedes $n \geq 1$ darstellen läßt in der Form

$$\varphi_X(s) = (\varphi_n(s))^n \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R},$$

wobei φ_n charakteristische Funktionen von Zufallsvariablen sind.

Beweis „ $\Rightarrow$ “
$Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ u.i.v., $X \overset{d}{=} Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}$. Daraus folgt, dass $\varphi_X(s) = \prod_{i=1}^n \varphi_{Y_i^{(n)}}(s) = (\varphi_n(s))^n$.
“ $\Leftarrow$ “
$\varphi_X(s) = (\varphi_n(s))^n \Rightarrow$ existiert $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ u.i.v. mit charakteristischer Funktion φ_n und $\varphi_{Y_1,\ldots,Y_n}(s) = (\varphi_n(s))^n = \varphi_X(s)$. Mit dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt, dass $X \overset{d}{=} Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}$. □

Lemma 4.1.2
Sei $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Falls es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $\varphi(s)$ stetig in $s = 0$ ist und $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(s) = \varphi(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, dann ist φ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable X und es gilt $X_n \xrightarrow{d} X$.

Definition 4.1.3
Sei ν ein Maß über den Meßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann nennt man ν ein Lèvy-Maß, wenn $\nu(\{0\}) = 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}} \min\left\{y^2, 1\right\} \nu(dy) < \infty.$$

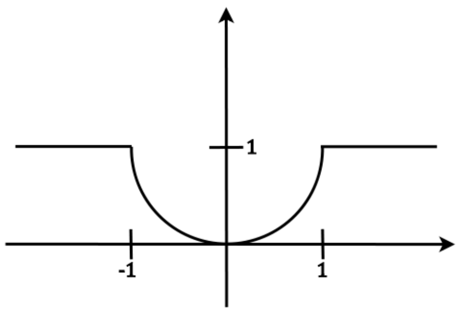

Abbildung 4.1:

<u>Beachte</u>

- Offenbar ist jedes Lèvy-Maß σ-endlich und

$$\nu\left((-\varepsilon, \varepsilon)^c\right) < \varepsilon, \quad \text{für alle } \varepsilon > 0, \tag{4.1.1}$$

  wobei $(-\varepsilon, \varepsilon)^c = \mathbb{R} \mid (-\varepsilon, \varepsilon)$.

- Insbesondere ist jedes endliche Maß ν ein Lèvy-Maß, falls $\nu(\{0\}) = 0$.

- Eine zu (4.1.1) equivalente Bedingung ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{1+y^2}\nu(dy) < \infty, \quad \text{denn} \quad \frac{y^2}{1+y^2} \leq \min\left\{y^2, 1\right\} \leq 2\frac{y^2}{1+y^2}. \tag{4.1.2}$$

Theorem 4.1.2
Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ beliebig und sei ν ein beliebiges Lèvy-Maß. Dann ist durch die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(s) = \exp\left\{ias - \frac{bs^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isy} - 1 - isy1(y \in (-1,1))\right)\nu(dy)\right\} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}, \tag{4.1.3}$$

die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Zufallsvariable gegeben.

Bemerkung 4.1.1

- Die Formel (4.1.3) wird auch *Lèvy-Chintschin-Formel* genannt.
- Die Umkehrung vom Theorem 4.1.2 gilt auch, es hat also jede unbegrezt teilbare Zufallsvariable eine solche Darstellung. Deshalb nennt man das charakteristische Tripel (a, b, ν) auch *Lèvy-Charakteristik* einer unbegrenzt teilbaren Zufallsvariable.

Beweis des Theorems 4.1.2 1. Schritt
Zeige, dass φ eine charakteristische Funktion ist.

- $$\left|e^{isy} - 1 - isy\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(isy)^k}{k!} - 1 - isy\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(isy)^k}{k!}\right| \leq y^2 \underbrace{\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\right|}_{:=c} \leq y^2 c$$

  Damit folgt mit (4.1.1) und (4.1.2), dass das Integral in (4.1.3) existiert und somit wohldefiniert ist.

- Sei nun $\{c_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge mit $c_n > c_{n+1} > \ldots > 0$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Dann ist die Funktion $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi_n(s) := \exp\left\{is\left(a - \int_{[-c_n,c_n]^c \cap (-1,1)} y\nu(dy)\right) - \frac{bs^2}{2}\right\} \exp\left\{\int_{[-c_n,c_n]^c} \left(e^{isy} - 1\right)\nu(dy)\right\}$$

  die charakteristische Funktion der Summe von $Z_1^{(n)}$ und $Z_2^{(n)}$, 2 unabhängigen Zufallsvariablen, denn

  - der erste Faktor ist die charakteristische Funktion der Normalverteilung mit Erwartungswert $a - \int_{[-c_n,c_n]^c \cap (-1,1)} y\nu(dy)$ und Varianz b.
  - der zweite Faktor ist die charakteristische Funktion der zusammengesetzten Poisson-Verteilung mir den Charakteristiken

$$\lambda = \nu([-c_n, c_n]^c) \quad \text{und} \quad \mathsf{P}_U(\cdot) = \nu(\cdot \cap [-c_n, c_n]^c / \nu([-c_n, c_n]^c))$$

    ist.

- Außerdem gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \varphi(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, wobei offenbar φ stetig in 0 ist, den für die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ im Exponent von (4.1.3), also

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isy} - 1 - isy\mathbb{1}\left(y \in (-1,1)\right)\right) \nu(dy) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}$$

gilt $|\psi(s)| = cs^2 \int_{(-1,1)} y^2 \nu(dy) + \int_{(-1,1)^c} \left|e^{isy} - 1\right| \nu(dy)$. Hieraus und aus (4.1.2) folgt mit Satz von Lebesgue, dass $\lim_{s\to\infty} \psi(s) = 0$.

- Aus Lemma 4.1.2 ergibt sich, dass die in (4.1.3) gegebene Funktion φ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable ist.

2. Schritt
Die unbegrenzte Teilbarkeit dieser Zufallsvariable folgt aus dem Lemma 4.1.1 und daraus, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ auch $\frac{\nu}{n}$ ein Lèvy-Maß ist und dass

$$\varphi(s) = \exp\left\{i\frac{a}{n}s - \frac{\frac{b}{n}s^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isy} - 1 - isy\mathbb{1}(y \in (-1,1))\right) \left(\frac{\nu}{n}\right)(dy)\right\} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

□

Bemerkung 4.1.2
Die Abbildung $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\eta(s) = ias - \frac{bs^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isy} - 1 - isy\mathbb{1}(y \in (-1,1))\right) \nu(dy)$$

aus (4.1.3) heißt *Lèvy-Exponent* dieser unbegrezt teilbaren Verteilung.

4.1.2 Lèvy-Chintschin-Darstellung

$\{X(t),\ t \geq 0\}$ – Lèvy-Prozess. Wir wollen die charakteristische Funktion von $X(t)$, $t \geq 0$, durch die Lèvy-Chintschin-Formel darstellen.

Lemma 4.1.3
Sei $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ein stochastisch stetiger Prozess, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ und $t_0 \geq 0$ gelte $\lim_{t\to t_0} \mathsf{P}(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0$. Dann ist für jedes $s \in \mathbb{R}$ durch $t \longmapsto \varphi_{X(t)}(s)$ eine stetige Abbildung von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{C}$.

Beweis

- $y \longmapsto e^{isy}$ stetig in 0, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta_1 > 0$, so dass

$$\sup_{y\in(-\delta_1,\delta_1)} \left|e^{isy} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ist stochastisch stetig, d.h. für alle $t_0 \geq 0$ existiert $\delta_2 > 0$, so dass

$$\sup_{t\geq 0,\ |t-t_0|<\delta_2} \mathsf{P}\left(|X(t) - X(t_0)| > \delta_1\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Daraus folgt, dass für alle $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $|t - t_0| < \delta_2$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{X(t)}(s) - \varphi_{X(t_0)}(s)\right| &= \left|\mathsf{E}\left(e^{isX(t)} - e^{isX(t_0)}\right)\right| \leq \mathsf{E}\left|e^{isX(t_0)}\left(e^{is(X(t)-X(t_0))} - 1\right)\right| \\ &\leq \mathsf{E}\left|e^{is(X(t)-X(t_0))} - 1\right| = \int_{\mathbb{R}} \left|e^{isy} - 1\right| \mathsf{P}_{X(t)-X(t_0)}(dy) \\ &\leq \int_{(-\delta_1,\delta_1)} \left|e^{isy} - 1\right| \mathsf{P}_{X(t)-X(t_0)}(dy) \\ &\quad + \int_{(-\delta_1,\delta_1)^c} \underbrace{\left|e^{isy} - 1\right|}_{=2} \mathsf{P}_{X(t)-X(t_0)}(dy) \\ &\leq \sup_{y \in (-\delta_1,\delta_1)} \left|e^{isy} - 1\right| + 2\mathsf{P}\left(|X(t) - X(t_0)| > \delta_1\right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Theorem 4.1.3
Sei $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess. Für alle $t \geq 0$ gilt

$$\varphi_{X(t)}(s) = e^{t\eta(s)}, \quad s \in \mathbb{R},$$

wobei $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist. Insbesondere gilt

$$\varphi_{X(t)}(s) = e^{t\eta(s)} = \left(e^{\eta(s)}\right)^t = \left(\varphi_{X(1)}(s)\right)^t, \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Beweis

$$\varphi_{X(t+t')}(s) = \mathsf{E}e^{isX(t+t')} = \mathsf{E}\left(e^{isX(t)}e^{is(X(t+t')-X(t))}\right) = \varphi_{X(t)}(s)\varphi_{X(t')}(s)$$

Sei $g_s : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definiert durch $g_s(t) = \varphi_{X(t)}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $g_s(t + t') = g_s(t)g_s(t')$, $t, t' \geq 0$. $X(0) = 0$.

$$\begin{cases} g_s(t + t') = g_s(t)g_s(t'), & t, t' \geq 0, \\ g_s(0) = 1, \\ g_s : [0,\infty) \to \mathbb{C} \text{ stetig.} \end{cases}$$

Daraus folgt: existiert $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass $g_s(t) = e^{\eta(s)t}$ für alle $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. $\varphi_{X(1)}(s) = e^{\eta(s)}$ und es folgt, dass η stetig ist. □

Lemma 4.1.4
Sei $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eine Folge von endlichen Maßen (auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) mit

1. $\sup_{n\geq 1} \mu_n(\mathbb{R}) < c$, $c = const < \infty$ (gleichmäßig beschränkt)

2. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $B_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ kompakt, so dass $\sup_{n\geq 1} \mu_n(B_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$. Daraus folgt, dass es eine Teilfolge $\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \ldots$ und ein endliches Maß über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ existiert, so dass für alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, beschränkt, stetig, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\mu_{n_k}(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f(y)\mu_{n_k}(dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mu(dy)$$

Beweis Siehe [14], S. 122 - 123. □

Theorem 4.1.4
Sei $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess. Dann gibt es $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und ein Lèvy-Maß ν, so dass

$$\varphi_{X(1)}(s) = e^{ias-\frac{bs^2}{2}} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isy} - 1 - iy\mathbb{1}(y \in (-1,1))\right)\nu(dy), \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Beweis Für alle Nullfolgen $t_1, t_2, \ldots$ gilt

$$\eta(s) = \left(e^{t\eta(s)}\right)'\Big|_{t=0} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{t_n\eta(s)} - 1}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{X(t_n)}(s) - 1}{t_n}. \tag{4.1.4}$$

$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$ Die Konvergenz in (4.1.4) ist gleichmäßig in $s \in [-t_0, t_0]$ für ein $s_0 > 0$ (Taylor-Entwicklung von $e^{t_n\eta(s)}$). Sei $t_n = \frac{1}{n}$ und P_n die Verteilung von $X(\frac{1}{n})$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} (e^{isy} - 1)\mathsf{P}_n(ds) = \lim_{n\to\infty} n \frac{\varphi_{X(\frac{1}{n})}(s) - 1}{\frac{1}{n}} = \eta(s) \\
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \int_{-s_0}^{s_0} \left(e^{isy} - 1\right)\mathsf{P}_n(dy)ds = \int_{-s_0}^{s_0} \eta(s)ds \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(s_0y)}{s_0y}\right)\mathsf{P}_n(dy) = -\frac{1}{2s_0}\int_{-s_0}^{s_0} \eta(s)ds
\end{aligned}$$

$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig mit $\eta(0) = 0$ und daraus folgt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ $\delta_0 > 0$ existiert, so dass $\left|-\frac{1}{2s_0}\int_{-s_0}^{s_0}\eta(s)ds\right| < \varepsilon$. Weil $1 - \frac{\sin(s_0y)}{s_0y} \geq \frac{1}{2}$, $|s_0y| \geq 2$, gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $s_0 > 0$, $n_0 > 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{\left\{y:|y|\geq\frac{2}{s_0}\right\}} \mathsf{P}_n(dy) \leq \limsup_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{sin(s_0y)}{s_0y}\right)\mathsf{P}_n(dy) < \varepsilon.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $s_0 > 0$, $n_0 > 0$, so dass

$$n \int_{\left\{y:|y|\geq\frac{2}{s_0}\right\}} \mathsf{P}_n(dy) \leq 4\varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Durch Verkleinerung von s_0 erhält man

$$n \int_{\left\{y:|y|\geq\frac{2}{s_0}\right\}} \mathsf{P}_n(dy) \leq 4\varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

$$\frac{y^2}{1+y^2} \leq c\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right), \quad \text{für alle } y \neq 0 \quad \text{und ein } c > 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\sup_{n\geq1} n \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{1+y^2}\mathsf{P}_n(dy) \leq c' \quad \text{für ein } c' < \infty.$$

Sei nun $\mu_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ definiert durch

$$\mu_n(B) = n \int_B \frac{y^2}{1+y^2}\mathsf{P}_n(dy) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Es folgt, dass $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist, $\sup_{n\geq 1}\mu_n(\mathbb{R}) < c'$. Außerdem gilt $\frac{y^2}{1+y^2} \leq 1$, $\sup_{n\geq 1}\mu_n\left(\left\{y : |y| > \frac{2}{s_0}\right\}\right) \leq 4\varepsilon$ und $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist relativ kompakt. Nach dem Lemma 4.1.3 gilt: existiert $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mu_{n_k}(dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mu(dy)$$

für ein Maß μ und f stetig und beschränkt. Sei für $s\in\mathbb{R}$ die Funktion $f_s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$f_s(y) = \begin{cases} \left(e^{isy}-1-isy\right)\frac{1+y^2}{y^2}, & y\neq 0,\\ -\frac{s^2}{2} & , \quad \text{sonst.}\end{cases}$$

Daraus folgt, dass f_s beschränkt und stetig ist und

$$\begin{aligned}
\eta(s) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{isy}-1\right)\mathsf{P}_n(dy)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_s(y)\mu_n(dy) + isn\int_{\mathbb{R}}\sin y\,\mathsf{P}_n(dy)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_s(y)\mu_{n_k}(dy) + isn_k\int_{\mathbb{R}}\sin y\,\mathsf{P}_{n_k}(dy)\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f_s(y)\mu(dy) + \lim_{k\to\infty} isn_k\int_{\mathbb{R}}\sin y\,\mathsf{P}_{n_k}(dy)\\
\eta(s) &= ia's - \frac{bs^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{isy}-1-is\sin y\right)\nu(dy),
\end{aligned}$$

für alle $s\in\mathbb{R}$ mit $a' = \lim_{k\to\infty} isn_k\int_{\mathbb{R}}\sin y\,\mathsf{P}_{n_k}(dy)$, $b=\mu(\{0\})$, $\nu:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,\infty)$,

$$\nu(dy) = \begin{cases}\frac{1+y^2}{y^2}\mu(dy), & y\neq 0,\\ 0 & , \quad y=0.\end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |y\mathbb{1}(y\in(-1,1)) - \sin y|\,\nu(dy) < \infty.$$

$$|y\mathbb{1}(y\in(-1,1)) - \sin y|\,\frac{1+y^2}{y^2} < c'', \quad \text{für alle } y\neq 0 \quad \text{und ein } c''>0.$$

Daraus folgt, dass

$$\eta(s) = ias - \frac{bs^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{isy}-1-isy\mathbb{1}\left(y\in(-1,1)\right)\right)\nu(dy), \quad \text{für alle } s\in\mathbb{R}.$$

$$a = a' + \int_{\mathbb{R}}\left(y\mathbb{1}(y\in(-1,1)) - \sin y\right)\nu(dy).$$

□

4.1.3 Beispiele

1. Wiener-Prozess (es genügt $X(1)$ zu betrachten)
   $X(1)\sim\mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_{X(1)}(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$ und daraus folgt

$$(a,b,\nu) = (0,1,0).$$

Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess mit Drift μ, d.h. $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$, $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ – Brownsche Bewegung. Es folgt

$$(a, b, \nu) = (\mu, \sigma^2, 0).$$

$$\varphi_{X(1)}(s) = \mathsf{E} e^{isX(1)} = \mathsf{E} e^{(\mu + \sigma W(1))is} = e^{\mu i s} \varphi_{W(1)}(\sigma s) = e^{is\mu - \sigma^2 \frac{s^2}{2}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. <u>Zusammengesetzter Poisson-Prozess</u> mit Parametern (λ, P_n)
   $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$, $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, U_i u.i.v. $\sim \mathsf{P}_U$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{X(1)}(s) &= \exp\left\{\lambda \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isX} - 1\right) \mathsf{P}_U(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{\lambda i s \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{1}(x \in [-1,1]) \mathsf{P}_U(dx) + \lambda \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isx} - 1 - isx\mathbf{1}(x \in [-1,1])\right) \mathsf{P}_U(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{\lambda i s \int_{-1}^{1} x \mathsf{P}_U(dx) + \lambda \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isx} - 1 - isx\mathbf{1}(x \in [-1,1])\right) \mathsf{P}_U(dx)\right\}, \quad s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(a, b, \nu) = \left(\lambda \int_{-1}^{1} x \mathsf{P}_U(dx), 0, \lambda \mathsf{P}_U\right), \quad \mathsf{P}_U \text{ – endlich auf } \mathbb{R}.$$

3. <u>Prozesse von Gauß-Poisson-Typ</u>
   $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$, $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$, $t \geq 0$.
   $X_1 = \{X_1(t),\ t \geq 0\}$ und $X_2 = \{X_2(t),\ t \geq 0\}$ unabhängig.
   X_1 – Wiener-Prozess mit Drift μ und Varianz σ^2,
   X_2 – Zusammengesetzter-Poisson-Prozess mit Parametern λ, P_U.

$$\begin{aligned}
\varphi_{X(t)}(s) &= \varphi_{X_1(t)}(s) \varphi_{X_2(t)}(s) \\
&= \exp\left\{is\left(\mu + \lambda \int_{-1}^{1} x \mathsf{P}_U(dx)\right) - \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \lambda \left(e^{isx} - 1 - isx\mathbf{1}(x \in [-1,1])\right) \mathsf{P}_U(dx)\right\}, \quad s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(a, b, \nu) = \left(\mu + \lambda \int_{-1}^{1} x \mathsf{P}_U(dx), \sigma^2, \lambda \mathsf{P}_U\right).$$

4. <u>Stabile Lèvy-Prozesse</u>
   $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ – Lèvy-Prozess mit $X(t) \sim \alpha$ stabile Verteilung, $\alpha \in (0, 2]$. Falls $X = W$ (Wiener-Prozess), dann $X(1) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Seien $Y, Y_1, \ldots, Y_n$ u.i.v. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Variablen. Nach Faltungsstabilität der Normalverteilung gilt

$$\begin{aligned}
Y_1 + \ldots + Y_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) &\stackrel{d}{=} \sqrt{n} Y + n\mu - \sqrt{n}\mu \\
&= \sqrt{n} Y + \mu\left(n - \sqrt{n}\right) \\
&= n^{\frac{1}{2}} Y + \mu\left(n^{\frac{2}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right), \quad \alpha = 2.
\end{aligned}$$

Definition 4.1.4
Die Verteilung einer Zufallsvariable Y heißt α-stabil, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ nur Kopien $Y_1, \ldots, Y_n$ gibt (von Y)

$$Y_1 + \ldots + Y_n \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} Y + d_n,$$

wobei d_n deterministisch ist (also eine Konstante bzgl. W, d.h. nicht zufällig). Dabai heißt $\alpha \in (0, 2]$ *Stabilitätsindex.*

$$d_n = \begin{cases} \mu \left(n - n^{\frac{1}{\alpha}} \right), & \alpha \neq 1, \\ \mu n \log n \quad , & \alpha = 1. \end{cases}$$

Ohne Beweis

Beispiel 4.1.1
- $\alpha = 2$: Normalverteilung
- $\alpha = 1$: Cauchy-Verteilung mit Parametern (μ, σ^2). Die Dichte:

$$f_Y(x) = \frac{\sigma}{\pi \left((x-\mu)^2 + \sigma^2 \right)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

  Dabei gilt $\mathsf{E} Y^2 = \infty$, $\mathsf{E} Y$ existiert nicht.
- $\alpha = \frac{1}{2}$: Lèvy-Verteilung mit Parametern (μ, σ^2). Die Dichte:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{\sigma}{2(x-\mu)} \right\}, & x > \mu, \\ 0 \quad , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Beispiele sind die wenigen Beispiele von α-stabilen Verteilungen, die eine explizite Form der Dichte besitzen. Für andere $\alpha \in (0, 2)$, $\alpha \neq \frac{1}{2}, 1$, wird die α-stabile Verteilung durch ihre charakteristische Funktionen eingeführt. Generell gilt: Falls Y α-stabil, $\alpha \in (0, 2]$, dann $\mathsf{E}|Y|^p < \infty$, $0 < p < \alpha$.

Definition 4.1.5
Die Verteilung einer Zufallsvariable heißt symmetrisch, falls $Y \stackrel{d}{=} -Y$, falls Y eine symmetrische α-stabile Verteilung besitzt, $\alpha \in (0, 2]$,

$$\varphi_Y(s) = \exp \left\{ -c \left| s \right|^\alpha \right\}.$$

In der Tat, aus der Stabilität von Y folgt

$$\left(\varphi_Y(s) \right)^n = e^{i d_n s} \varphi_Y \left(n^{\frac{1}{\alpha}} s \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass $d_n = 0$, denn $\varphi_{-Y}(s) = \varphi_Y(s)$. Es gilt: $e^{i d_n s} = e^{-i d_n s}$, $s \in \mathbb{R}$ und $d_n = 0$. Der Rest ist eine Übungsaufgabe.

Lemma 4.1.5
Lèvy-Chintschin-Darstellung der charakteristischen Funktion ist eine stabile Verteilung. Eine Lèvy-Charakteristik (a, b, ν), $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$b = \begin{cases} \sigma^2, & \alpha = 2, \\ 0 \ , & \alpha < 2. \end{cases}$$

$$\nu(dx) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha = 2, \\ \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} 1(x \geq 0) dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} 1(x < 0) dx, & \alpha < 2, \\ c_1, c_2 \geq 0 : c_1 + c_2 > 0 & , \end{cases}$$

Ohne Beweis
Man kann zeigen, dass

$$\mathsf{P}(|Y| \geq x) \underset{x\to\infty}{\sim} \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \alpha = 2, \\ \frac{c}{x^\alpha}, & \alpha < 2. \end{cases}$$

Definition 4.1.6
Der Lèvy-Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ heißt stabil, wenn $X(1)$ eine α-stabile Verteilung besitzt, $\alpha \in (0,2]$ ($\alpha = 2$: Brownsche Bewegung (mit Drift)).

4.1.4 Subordinatoren

Definition 4.1.7
Ein Lèvy-Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ heißt *Subordinator*, falls für alle $0 < t_1 < t_2$, $X(t_1) \leq X(t_2)$ f.s. gilt

$$X(0) = 0 \quad \text{f.s.} \quad \Rightarrow \quad X(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Diese Klasse von Lèvy-Prozessen ist deshalb wichtig, weil man leicht $\int_a^b g(t)dX(t)$ einführen kann als Lebesgue-Stiltjes-Integrale.

Theorem 4.1.5
Der Lèvy-Prozess $X = X(t),\ t \geq 0$ ist genau dann ein Subordinator, wenn die Lèvy-Chintschin-Darstellung in der Form sich darstellen läßt

$$\varphi_{X(t)}(s) = \exp\left\{ias + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isx} - 1\right) \nu(dx)\right\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

wobei ν das Lèvy-Maß ist, mit

$$\nu((-\infty, 0)) = 0, \quad \int_0^\infty \min\left\{1, y^2\right\} \nu(dy) < \infty.$$

Beweis Hinlänglichkeit
Es ist zu zeigen, dass $X(t_2) \geq X(t_1)$ f.s., falls $t_2 \geq t_1 \geq 0$.
Zunächst zeigen wir, dass $X(1) \geq 0$ f.s.. Falls $\nu \equiv 0$, dann $X(1) = a$ f.s., daher

$$\varphi_{X(t)}(s) = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ X(t) \end{pmatrix}^t = e^{iats}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$X(t) = at$ f.s. und daraus folgt, dass $X(t) \uparrow$ und X ist ein Subordinator. Falls $\nu([0,\infty)) > 0$, dann existiert $N > 0$, so dass $n \geq N$, $0 < \nu\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right)\right) < \infty$. Es folgt

$$\varphi_{X(t)}(s) = \exp\left\{ias + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^\infty \left(e^{isx} - 1\right) \nu(dx)\right\} = e^{ias} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

wobei $\varphi_n(s) = \int_{\frac{1}{n}}^\infty \left(e^{isx} - 1\right) \nu(dx)$ die charakteristische Funktion einer zusammengesetzter Poisson-Verteilung mit Parametern $\left(\nu\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right)\right), \frac{\nu(\cap[\frac{1}{n},\infty))}{\nu([\frac{1}{n},\infty))}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sei Z_n die Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_n. Es gilt: $Z_n = \sum_{i=1}^{N_n} U_i$, $N_n \sim \text{Pois}\left(\nu\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right)\right)\right)$,

$U_i \sim \frac{\nu(\cap[\frac{1}{n},\infty))}{\nu([\frac{1}{n},\infty))}$ und daraus folgt $Z_n \geq 0$ f.s. und $X(1) = \underbrace{a}_{=0} + \underbrace{\lim Z_n}_{\geq 0} \geq 0$ f.s. Da X ein Lèvy-Prozess ist, gilt

$$X(1) = X\left(\frac{1}{n}\right) + \left(X\left(\frac{2}{n}\right) - X\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \ldots + \left(X\left(\frac{n}{n}\right) - X\left(\frac{n-1}{n}\right)\right),$$

wobei wegen Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse $X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right) \overset{f.s.}{\geq} 0$ für $1 \leq k \leq n$ für alle n. $X(q_2) - X(q_1) \geq 0$ f.s. für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_2 \geq q_1 \geq 0$. Nun seien $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$, so dass $0 \leq t_1 \leq t_2$. Seien $\left\{q_1^{(n)}, q_2^{(n)}\right\}$ Folgen von Zahlen aus $\mathbb{Q}$ mit $q_1^{(n)} \leq q_2^{(n)}$. $q_1^{(n)} \downarrow t_1$, $q_2^{(n)} \uparrow t_2$, $n \to \infty$. Für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(X(t_2) - X(t_1) < -\varepsilon\right) &= \mathsf{P}\left(X(t_2) - X\left(q_2^{(n)}\right) + X\left(q_2^{(n)}\right) - X\left(q_1^{(n)}\right) + X\left(q_1^{(n)}\right) - X(t_1) < -\varepsilon\right) \\
&\leq \mathsf{P}\left(X(t_2) - X\left(q_2^{(n)}\right) + X\left(q_1^{(n)}\right) - X(t_1) < -\varepsilon\right) \\
&\leq \mathsf{P}\left(X(t_2) - X\left(q_2^{(n)}\right) < -\varepsilon\right) + \mathsf{P}\left(X\left(q_1^{(n)}\right) - X(t_1) \leq -\frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathsf{P}\left(X(t_2) - X(t_1) < \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \\
&\Rightarrow \mathsf{P}\left(X(t_2) - X(t_1) < 0\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \mathsf{P}\left(X(t_2) - X(t_1) < \varepsilon\right) = 0 \\
&\Rightarrow X(t_2) \geq X(t_1) \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

Notwendigkeit

Sei X ein Lèvy-Prozess, der ein Subordinator ist. Es ist zu zeigen, dass $\varphi_{X_1(t)}(\cdot)$ die obige Form hat.

Nach der Lèvy-Chintschin-Darstellung für $X_1(t)$ gilt

$$\varphi_{X(1)}(s) = \exp\left\{ias - \frac{b^2 s^2}{2} + \int_0^\infty \left(e^{isx} - 1 - isx\mathbb{1}(x \in [-1,1])\right)\nu(dx)\right\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Das Maß ν ist auf $[0,\infty)$ konzentriert, weil $X(1) \overset{f.s.}{\geq} 0$ und aus dem Beweis des Theorems 4.1.4 $\nu((-\infty,0)) = 0$ gewählt werden kann.

$$\varphi_{X(1)}(s) \leq \underbrace{\exp\left\{ias - \frac{b^2 s^2}{2}\right\}}_{:=\varphi_{Y_1(s)}} \underbrace{\exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{isx} - 1 - isx\mathbb{1}(x \in [-1,1])\right)\nu(dx)\right\}}_{:=\varphi_{Y_2(s)}}$$

Daraus folgt, dass $X(1) = Y_1 + Y_2$, Y_1 und Y_2 unabhängig, $Y_1 \sim \mathcal{N}(a, b^2)$ und deswegen $b = 0$. Für alle $\varepsilon \in (0,1)$

$$\varphi_{X_1}(s) = \exp\left\{is\left(a - \int_\varepsilon^1 x\nu(dx)\right) + \int_0^\varepsilon \left(e^{isx} - 1 - isx\right)\nu(dx) + \int_0^\infty \left(e^{isx} - 1\right)\nu(dx)\right\}$$

Es ist zu zeigen, dass für $\varepsilon \to 0$ gilt, dass $\int_\varepsilon^\infty \left(e^{isx} - 1\right)\nu(dx) \to \int_0^\infty \left(e^{isx} - 1\right)\nu(dx) < \infty$ mit $\int_0^1 \min\{x, 1\}\nu(dx) < \infty$. $\varphi_{X(1)}(s) = \exp\left\{is\left(a - \int_\varepsilon^1 x\nu(dx)\right)\right\}\varphi_{Z_1}(s)\varphi_{Z_2}(s)$, wobei Z_1 und Z_2 unabhängig, $\varphi_{Z_1}(s) = \exp\left\{\left(e^{isx} - 1 - isx\right)\nu(dx)\right\}$, $\varphi_{Z_2}(s) = \exp\left\{\int_\varepsilon^\infty \left(e^{isx} - 1\right)\nu(dx)\right\}$, $s \in \mathbb{R}$.

$X(1) \stackrel{d}{=} a - \int_\varepsilon^1 x\nu(dx) + Z_1 + Z_2$. Es existiert $\varphi_{Z_1}^{(2)}(0) = \frac{-\mathsf{E}Z_1^2}{2} < \infty$, $\varphi_{Z_1}^{(1)}(0) = 0 = i\mathsf{E}Z_1$ und daraus ergibt sich, dass $\mathsf{E}Z_1 = 0$ und $\mathsf{P}(Z_1 \leq 0) > 0$. Andererseits, hat Z_2 eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parametern $\left(\nu\left([\varepsilon, \infty)\right), \frac{\nu(\cap[\varepsilon,+\infty])}{\nu([\varepsilon,+\infty))}\right)$, $\varepsilon \in (0,1)$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathsf{P}\left(Z_2 \leq 0\right) > 0 \\
&\Rightarrow \mathsf{P}\left(Z_1 + Z_2 \leq 0\right) \geq \mathsf{P}\left(Z_1 \leq 0, Z_2 \leq 0\right) = \mathsf{P}\left(Z_1 \leq 0\right)\mathsf{P}\left(Z_2 \leq 0\right) > 0 \\
&\Rightarrow a - \int_\varepsilon^1 x\nu(dx) \geq 0 \quad \text{für alle } \varepsilon \in (0,1) \\
&\Rightarrow \int_0^a \min\{x, 1\}\, dx < \infty \\
&\Rightarrow \text{für } \varepsilon \to \infty \quad Z_1 \stackrel{d}{\to} 0 \\
&\varphi_{X(1)}(s) = \exp\left\{is\left(a - \int_0^1 x\nu(dx)\right) + \int_0^\infty \left(e^{isx} - 1\right)\nu(dx)\right\}, \quad s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 4.1.2 (α-stabiler Subordinator):
$X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess, Subordinator, mit $a = 0$ – Lévy-Maß.

$$
\nu(dx) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x^{1+\alpha}} dx\,, & x > 0, \\ 0 \cdot \frac{1}{x^{1+\alpha}} dx = 0, & x \leq 0. \end{cases}
$$

Daraus folgt, dass X ein α-stabiler Lèvy-Prozess ist.
Zeigen wir, dass $\hat{l}_{X(\cdot)}(s) = \mathsf{E}e^{-sX(t)} = e^{-ts^\alpha}$ für alle $s, t \geq 0$.

$$
\varphi_{X(t)}(s) = \left(\varphi_{X(1)}(s)\right)^t = \exp\left\{t\int_0^\infty \left(e^{isx} - 1\right)\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{x^{1+\alpha}}dx\right\}, \quad s \in \mathbb{R}.
$$

Es ist zu zeigen, dass

$$
U^d = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \left(1 - e^{-ux}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}, \quad u \geq 0.
$$

Das genügt, weil $\varphi_{X(t)}(\cdot)$ analytisch auf $\{Z \in \mathbb{C} : \Im Z \geq 0\}$ fortgesetzt werden kann, d.h. $\varphi_{X(t)}(iu) = \hat{l}_{X(t)}$, $u \geq 0$. In der Tat gilt

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(1 - e^{-ux}\right)\frac{dx}{x^{1+d}} &= \int_0^\infty u\int_0^x e^{-uy}dy x^{-1-\alpha}dx \\
&= \int_0^\infty \int_y^\infty ue^{-uy}x^{-1-\alpha}dxdy \\
&= \int_0^\infty \int_y^\infty x^{-1-\alpha}dxue^{-uy}dy \\
&= \frac{u}{\alpha}\int_0^\infty e^{-uy}y^{-\alpha}dy \\
&= \frac{u}{\alpha}\int_0^\infty e^{-z}z^{-\alpha}\frac{1}{u^{-\alpha}}d\left(\frac{z}{u}\right) \\
&= \frac{u^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty e^{-z}z^{(1-\alpha)-1}dz \\
&= \frac{u^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

und daraus folgt $\hat{l}_{X(t)}(s) = e^{-ts^\alpha}$, $t, s \geq 0$.

4.2 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 4.2.1
Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F und charakteristischer Funktion φ. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

a) Falls X unbegrenzt teilbar ist, dann gilt $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. *Hinweis: Zeigen Sie, dass* $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(s)|^2 = 1$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$, *falls* $\varphi(s) = (\varphi_n(s))^n$. *Beachten Sie außerdem, dass* $|\varphi_n(s)|^2$ *wiederum eine charakteristische Funktion ist und* $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$ *für* $x > 0$ *gilt.*

b) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) für eine Verteilung an, die nicht unbegrenzt teilbar ist.

Aufgabe 4.2.2
Sei $X = \{X(t),\, t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess. Zeigen Sie, dass dann die Zufallsvariable $X(t)$ für jedes $t \geq 0$ unbegrenzt teilbar ist.

Aufgabe 4.2.3
Zeigen Sie, dass die Summe von zwei unabhängigen Lévy-Prozessen wieder ein Lévy-Prozess ist, und geben Sie die zugehörige Lévy-Charakteristik an.

Aufgabe 4.2.4
Betrachten Sie die folgende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}, \quad \text{wobei } \psi(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}(\cos(2^k t) - 1).$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist. *Hinweis: Betrachten Sie die Lévy-Chintschin-Darstellung mit Maß* $\nu(\{\pm 2^k\}) = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.2.5
Der Lévy-Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ sei ein Gamma-Prozess mit Parametern $b, p > 0$, das heißt, für jedes $t \geq 0$ gelte $X(t) \sim \Gamma(b, pt)$. Zeige, dass $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Subordinator ist mit dem Laplace-Exponenten $\xi(u) = \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\nu(dy)$ für $\nu(dy) = py^{-1}e^{-by}dy$, $y > 0$. (Der Laplace-Exponent von $\{X(t), t \geq 0\}$ ist die Funktion $\xi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, für die $\mathsf{E}e^{-uX(t)} = e^{-t\xi(u)}$ für beliebige $t, u \geq 0$ gilt)

Aufgabe 4.2.6
Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Lévy-Exponenten η und $\{\tau(s), s \geq 0\}$ ein unabhängiger Subordinator mit charakteristischem Lévy-Exponenten γ. Der stochastische Prozess Y sei definiert durch $Y = \{X(\tau(s)), s \geq 0\}$.

(a) Zeige, dass

$$\mathsf{E}\left(e^{i\theta Y(\tau(s))}\right) = e^{\gamma(-i\eta(\theta))s}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

wobei $\Im z$ den Imaginärteil von z bezeichnet.

Hinweis: Weil τ ein Prozess mit nicht-negativen Werten ist, gilt $\mathsf{E}e^{i\theta\tau(s)} = e^{\gamma(\theta)s}$ für alle $\theta \in \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$ durch analytische Fortsetzung in Theorem 4.1.3.

(b) Zeige, dass Y ein Lèvy-Prozess mit charakteristischem Lèvy-Exponenten $\gamma(-i\eta(\cdot))$ ist.

Aufgabe 4.2.7
Sei $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ein zusammengesetztet Poisson-Prozess mit L'evy-Maß

$$\nu(dx) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\lambda, \sigma > 0$. Zeigen Sie, dass $\{\sigma W(N(t)),\ t \geq 0\}$ die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen wie X hat, wobei $\{N(s),\ s \geq 0\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 2λ und W ein von N unabhängiger Standard-Wiener-Prozess ist.

Hinweise zu Aufgabe 4.2.6 a) und Aufgabe 4.2.7

- Zur Berechnung des Erwartungswertes für die charakteristische Funktion kann die Identität $\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y)) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}(X|Y = y) F_Y(dy)$ für zwei Zufallsvariablen X und Y benutzt werden. Dabei sollte auf $\tau(s)$ bedingt werden.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(sy) e^{-\frac{y^2}{2a}} dy = \sqrt{2\pi a} \cdot e^{-\frac{as^2}{2}}$ für $a > 0$ und $s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.2.8
Sei W ein Standard-Wiener-Prozess und τ ein unabhängiger $\frac{\alpha}{2}$-stabiler Subordinator, wobei $\alpha \in (0, 2)$. Zeige, dass $\{W(\tau(s)), s \geq 0\}$ ein α-stabiler Lévy-Prozess ist.

Aufgabe 4.2.9
Zeige, dass der Subordinator T mit Randdichte

$$f_{T(t)}(s) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}} 1\{s > 0\}$$

ein $\frac{1}{2}$-stabiler Subordinator ist. (Hinweis: Differenziere die Laplace-Transformierte von $T(t)$ und löse die Differentialgleichung)

5 Martingale

5.1 Grundbegriffe

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 5.1.1
Sei $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ eine Familie von σ-Algebra $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Sie heißt

1. *eine Filtration*, falls $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, $0 \leq s < t$.
2. *eine vollständige Filtration*, falls sie eine Filtration ist, so dass $\mathcal{F}_0$ (und somit alle $\mathcal{F}_s$, $s > 0$) sämtliche Mengen des Wahrscheinlichkeitsmaßes Null enthält.
   Später werden wir immer voraussetzen, dass wir mit einer vollständigen Filtration zu tun haben.
3. *eine rechtsseitig stetige Filtration*, falls für alle $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.
4. *eine natürliche Filtration* für einen stochastischen Prozess $\{X(t),\ t \geq 0\}$, falls sie durch die Vergangenheit des Prozesses bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ erzeugt wird, d.h. für alle $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ ist die kleinste σ-Algebra ($\subset \mathcal{F}_t$), die Mengen $\{\omega \in \Omega : (X(t_1), \ldots, X(t_n))^\top \subset B\}$ enthält, für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq t$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ heißt *Stoppzeit (bzgl. der Filtration* $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$*)*, falls für alle $t \geq 0$ $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, d.h. aus den Beobachtungen des Prozesses X (bis natürlicher Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$) kann man beurteilen, ob der Moment τ eingetreten ist.

Lemma 5.1.1
Sei $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ eine rechtsseitig stetige Filtration. τ ist eine Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ genau dann, wenn $\underbrace{\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t}_{\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t}$, für alle $t \geq 0$.

Beweis „ $\Leftarrow$ “
Sei $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. Zu zeigen: $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.
$\{\tau \leq t\} = \cap_{s\in(t,t+\varepsilon)}\{\tau < s\}$ für alle $\varepsilon > 0 \Rightarrow \{\tau \leq t\} \in \cap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$

„ $\Rightarrow$ “
Zu zeigen: $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0 \Rightarrow \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.
$\{\tau < t\} = \cup_{s\in(0,t)}\{\tau \leq t - s\} \in \cup_{s\in(0,t)}\mathcal{F}_{t-s} \subset \mathcal{F}_t$ $\square$

Definition 5.1.2
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ eine Filtration ($\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ t \geq 0$) und $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. X ist adaptiert bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, falls $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-meßbar ist, für alle $t \geq 0$, d.h., für alle $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X(t) \in B\} \in \mathcal{F}_t$.

Definition 5.1.3
Der Zeitpunkt $\tau_B(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in B\}$, $\omega \in \Omega$, heißt *Ersterreichungszeit* der Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ durch den stochastischen Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ (engl. first passage time, first entrance/hitting time).

Theorem 5.1.1
Sei $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ eine rechtsseitig stetige Filtration und $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein adaptierter (bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$) càdlàg-Prozess. Für offenes $B \subset \mathbb{R}$ ist τ_B eine Stoppzeit. Falls B abgeschlossen ist, dann ist $\tilde{\tau}_B(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in B \text{ oder } X(t-) \in B\}$ eine Stoppzeit, wobei $X(t-) = \lim_{s\uparrow t} X(s)$.

Beweis 1. Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ offen.
Wegen Lemma 5.1.1 genügt zu zeigen, dass $\{\tau_B < t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. Wegen rechtsseitiger Stetigkeit der Trajektorien von X gilt:

$$\{\tau_B < t\} = \cup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)}\{X(s) \in B\} \in \cup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)}\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \quad \text{weil } \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t,\ s < t.$$

2. Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ abgeschlossen.
Für alle $\varepsilon > 0$. Sei $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : d(x,B) < \varepsilon\}$ – Parallelmenge von B, wobei $d(x,B) = \inf_{y\in B} |x-y|$. B_ε ist offen, für alle $t \geq 0$.
$\{\tilde{\tau}_B \leq t\} = \{X(t) \in B\} \cup \cap_{n\geq 1, s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)} \cup \{X(s) \in B_{\frac{1}{n}}\} \in \mathcal{F}_t$, weil X adaptiert bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ ist.

□

Lemma 5.1.2
Seien τ_1, τ_2 Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. Dann sind $\min\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 + \tau_2$ und $\alpha\tau_1$, $\alpha \geq 1$, Stoppzeiten (bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$).

Beweis Für alle $t \geq 0$ gilt:
$\{\min\{\tau_1,\tau_2\} \leq t\} = \underbrace{\{\tau_1 \leq t\}}_{\in\mathcal{F}_t} \cup \underbrace{\{\tau_2 \leq t\}}_{\in\mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$,
$\{\max\{\tau_1,\tau_2\} \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$,
$\{\alpha\tau_1 \leq t\} = \{\tau_1 \leq \frac{t}{\alpha}\} \in \mathcal{F}_{\frac{t}{\alpha}} \subset \mathcal{F}_t$, weil $\frac{t}{\alpha} \leq t$,
$\{\tau_1 + \tau_2 \leq t\} = \underbrace{\{\tau_1 > t\}}_{\in\mathcal{F}_t} \cup \underbrace{\{\tau_2 > t\}}_{\in\mathcal{F}_t} \cup \underbrace{\tau_1 \geq t, \tau_2 > 0}_{\mathcal{F}_t} \cup \{0 < \tau_2 < t, \tau_1 - \tau_2 > t\}$,
Zu zeigen: $\{0 < \tau_2 < t, \tau_1 - \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$.
$\{0 < \tau_2 < t, \tau_1 + \tau_2 > t\} = \cup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)}\{s < \tau_1 < t, \tau_2 > t-s\} \in \mathcal{F}_t$ □

Theorem 5.1.2
Sei τ eine f.s. endliche Stoppzeit bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, d.h. $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 1$. Dann existiert eine Folge von diskreten Stoppzeiten $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \geq \ldots$, so dass $\tau_n \downarrow \tau$, $n \to \infty$ f.s.

Beweis Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\tau_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \tau(\omega) = 0 \\ \frac{k+1}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} < \tau(\omega) \leq \frac{k+1}{2^n}, \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Für alle $t \geq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n}$ gilt $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau_n \leq \frac{k}{2^n}\} = \{\tau \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t \Rightarrow \tau_n$ ist eine Stoppzeit. Es ist also klar, dass $\tau_n \downarrow \tau$, $n \to \infty$ f.s. □

Folgerung 5.1.1
Sei τ eine f.s. endliche Stoppzeit bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ und $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein càdlàg-Prozess über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $X(\omega, \tau(\omega))$, $\omega \in \Omega$, eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Beweis Zu zeigen: $X(\tau) : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar, d.h. für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X(\tau) \in B\} \in \mathcal{F}$. Sei $\tau_n \downarrow \tau$, $n \to \infty$ wie im Satz 5.1.2. Da X càdlàg ist, gilt $X(\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\tau)$ f.s. $X(\tau)$ ist dann $\mathcal{F}$-meßbar als Grenzwert von $X(\tau_n)$, die ihrerseits $\mathcal{F}$-meßbar sind. Für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\{X(\tau_n) \in B\} = \cup_{k=0}^{\infty} (\underbrace{\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{\{X(\frac{k}{2^n}) \in B\}}_{\in \mathcal{F}}) \in \mathcal{F}$$

□

5.2 (Sub-, Super-)Martingale

Definition 5.2.1
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess adaptiert bzgl. einer Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t \geq 0$, auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\mathsf{E}\,|X(t)| < \infty$, $t \geq 0$. X heißt Martingal (bzw. Sub- oder Supermartingal), falls $\mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} X(s)$ für alle $s, t \geq 0$ mit $t \geq s$: $\Rightarrow \mathsf{E}(X(t)) = \mathsf{E}(X(s)) = \text{const}$ für alle s, t.

Beispiele

Sehr oft werden Martingale auf Basis eines stochastischen Prozesses $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ wie folgt konstruiert: $X(t) = Y(t) - \mathsf{E}Y(t)$.

1. *Poisson-Prozess*
   Sei $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ der homogene Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. $\mathsf{E}Y(t) = \mathsf{var}\,Y(t) = \lambda t$, weil $Y(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, $t \geq 0$.
   a) $X(t) = Y(t) - \lambda t$, $t \geq 0 \Rightarrow X(t)$ ist ein Martingal bzgl. natürlicher Filtration $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s)_{s \leq t} &= \mathsf{E}(Y(t) - \lambda t - (Y(s) - \lambda s + (Y(s) - \lambda s)) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= Y(s) - \lambda s + \mathsf{E}(Y(t) - Y(s) - \lambda(t-s) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= Y(s) - \lambda s + \mathsf{E}(Y(t) - Y(s)) + Y(s) - \lambda s \\ &= Y(s) - \lambda s + \underbrace{\mathsf{E}(Y(t-s))}_{=\lambda(t-s)} - \lambda(t-s) \\ &= Y(s) - \lambda \overset{f.s.}{=} X(s) \end{aligned}$$

   b) $X'(t) = X^2(t) - \lambda(t)$, $t \geq 0 \Rightarrow X'(t)$ ist ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X'(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathsf{E}(X^2(t) - \lambda t \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{E}((X(t) - X(s) + X(s))^2 - \lambda t \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathsf{E}((X(t) - X(s))^2 + 2((X(t) - X(s))X(s)) + X^2(s) - \lambda s - \lambda(t-s) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= X'(s) + \underbrace{\mathsf{E}((X(t) - X(s)))^2}_{=\mathsf{var}(Y(t)-Y(s))=\lambda(t-s)} + 2X(s)\underbrace{\mathsf{E}(X(t) - X(s))}_{=0} - \lambda(t-s) \\ &\overset{f.s.}{=} X'(s), \quad s \leq t. \end{aligned}$$

2. *Zusammengesetzter Poisson-Prozess*
$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$, $t \geq 0$, N – homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, U_i – unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, $\mathsf{E}|U_i| < \infty$, $\{U_i\}$ unabhängig von N.
$X(t) = Y(t) - \mathsf{E}Y(t) = Y(t) - \lambda t \mathsf{E}U_1$, $t \geq 0$.

Aufgabe 5.2.1
Zeigen Sie, dass $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration ist.

3. *Wiener-Prozess*
Sei $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess, $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$ sei die natürliche Filtration.
   a) $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$
   $Y(t) = W^2(t) - \mathsf{E}W^2(t) = W^2(t) - t$, $t \geq 0$, ist ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(Y(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathsf{E}((W(t) - W(s) + W(s))^2 - s - (t-s) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \text{siehe Beispiel 1b, benutze die Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse} \\ &= W^2(s) - s \stackrel{f.s.}{=} Y(s), \quad s \leq t. \end{aligned}$$

   b) $Y'(t) = e^{uW(t) - u^2 \frac{t}{2}}$, $t \geq 0$ und ein fixiertes $u \in \mathbb{R}$.
   $\mathsf{E}|Y'(t)| = e^{-u^2 \frac{t}{2}} \mathsf{E} e^{uW(t)} = e^{u^2 \frac{t}{2}} e^{u^2 \frac{t}{2}} = 1 < \infty$. Zeigen wir, dass $Y' = \{Y'(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$ ist.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(Y'(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathsf{E}(e^{u(W(t)-W(s)+W(s)) - u^2 \frac{s}{2} - u^2 \frac{(t-s)}{2}} \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \underbrace{e^{-u^2 \frac{s}{2}} e^{uW(s)}}_{=Y'(s)} e^{-u^2 \frac{(t-s)}{2}} \underbrace{\mathsf{E}(e^{u(W(t)-W(s))} \mid \mathcal{F}_s)}_{=\mathsf{E}(e^{uW(t-s)}) = e^{u^2 \frac{(t-s)}{2}}} \\ &= Y'(s) e^{-u^2 \frac{(t-s)}{2}} e^{u^2 \frac{(t-s)}{2}} = Y'(s), \quad s \leq t. \end{aligned}$$

4. *Abgeschlossenes Martingal*
Sei X eine Zufallsvariable (auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$) mit $\mathsf{E}|X| < \infty$. Sei $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.
$Y(t) = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$. $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ ist ein Martingal.
$\mathsf{E}|Y(t)| = \mathsf{E}|\mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_t)| \leq \mathsf{E}(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_t)) = \mathsf{E}|X| < \infty$, $t \geq 0$.
$\mathsf{E}(Y(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{E}((X \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{f.s.}{=} Y(s)$, $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

5. *Lèvy-Prozesse*
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess mit Lèvy-Exponenten η und natürlicher Filtration $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$.
   a) Falls $\mathsf{E}|X(1)| < \infty$, definiere $Y(t) = X(t) - \underbrace{t\mathsf{E}X(1)}_{=\mathsf{E}X(t)}$, $t \geq 0$. Es kann wie in obigen Fällen gezeigt werden, dass $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$ ist.
   b) Benutze die Kombination aus Beispiel 3b – normiere die charakteristische Funktion von $X(t)$ ohne Erwartung durch deren Wert. $Y(t) = \frac{e^{iuX(t)}}{\varphi_{X(t)}^{(u)}} = \frac{e^{iuX(t)}}{t\eta(u)} = e^{iuX(t) - t\eta(u)}$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ ist ein komplexwertiges Martingal.
$\mathsf{E}|Y(t)| = |e^{-t\eta(u)}| < \infty$, weil $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. $\mathsf{E}Y(t) = 1$, $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(Y(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathsf{E}(e^{iu(X(t)-X(s))(t-s)\eta(u)} e^{iuX(s)-s\eta(u)} \mid \mathcal{F}_s) \\ &= e^{iuX(s)-s\eta(u)} e^{-(t-s)\eta(u)} \mathsf{E}(e^{iu(X(t)-X(s))}) \\ &= Y(s) e^{-(t-s)\eta(u)} e^{(t-s)\eta(u)} \stackrel{f.s.}{=} Y(s) \end{aligned}$$

6. *Submartingale/Supermartingale*
   Jeder integrierbare stochastische Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$, der bzgl. einer Filtration $\{\mathcal{F}_s,\ s \geq 0\}$ adaptiert ist und f.s. monoton nichtfallende (bzw. nichtsteigende) Trajektorien besitzt, ist ein Sub- (bzw. ein Super-)Martingal.
   Tatsächlich, es gilt $X(t) \stackrel{f.s.}{\geq} X(s)$, $t \geq s \Rightarrow \mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{f.s.}{\geq} \mathsf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{f.s.}{=} X(s)$. Insbesondere ist jeder Subordinator ein Submartingal.

Lemma 5.2.1
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess, der bzgl. einer Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ adaptiert ist und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, so dass $\mathsf{E}|f(X(t))| < \infty$, $t \geq 0$. Dann ist $Y = \{f(X(t),\ t \geq 0)\}$ ein Submartingal, falls

a) X ein Submartingal ist, oder

b) X ein Submartingal und f monoton nichtfallend ist.

Beweis Benutze die Ungleichung von Jensen für die bedingten Erwartungen. $\mathsf{E}(f(X(t)) \mid \mathcal{F}_s) \geq f(\underbrace{\mathsf{E}(X(t)\mathcal{F}_s)}_{\geq X(s)}) \geq f(X(s))$, weil f monoton nichtfallend (Fall b)) oder es gilt die Gleichung (Fall a)). □

5.3 Gleichgradige Integrierbarkeit

Frage: Man weiss, dass im Allg. aus $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$ nicht $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X$ folgt. Hier sind $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen, definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Wann gilt „$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X$“ ⇒ „$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X$“? Die Antwort darauf liefert der Begriff der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Definition 5.3.1
Die Folge $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ von Zufallsvariablen heißt gleichgradig integrierbar, falls $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und $\sup_n \mathsf{E}(|X_n| 1(|X_n| > \varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$.

Lemma 5.3.1
Die Folge $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ von Zufallsvariablen ist gleichgradig integrierbar genau dann, wenn

1. $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$ (gleichmäßige Beschränktheit),

2. wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\mathsf{E}(|X_n| 1(A)) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathsf{P}(A) < \delta$.

Beweis Sei $\{X_n\}$ eine Folge von Zufallsvariablen.
Es ist zu zeigen, dass

$$\sup_n \mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} 1) & \sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty \\ 2) & \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \mathsf{E}(|X_n|1(A)) < \varepsilon\ \forall A \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(A) < \delta \end{array}$$

„$\Leftarrow$“
$A_n = \{|X_n| > x\}$. Aus der Markov-Ungleichung: $\mathsf{P}(A_n) \leq \frac{1}{x}\mathsf{E}|X_n|$ für alle $n \Rightarrow \sup_n \mathsf{P}(A_n) \leq \frac{1}{x}\sup_n \mathsf{E}|X_n| \leq \frac{c}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists N>0 : \forall x > N\ \mathsf{P}(A_n) < \delta \overset{2)}{\Rightarrow} \sup_n \mathsf{E}(|X_n|1(A_n)) \leq \varepsilon \Rightarrow$ weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann $\Rightarrow \sup_n \mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x)) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

„$\Rightarrow$“

1.
$$\begin{aligned} \sup_n \mathsf{E}|X_n| &\leq \sup_n (\mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x)) + \mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|\leq x))) \\ &\leq \sup_n (\mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x)) + x\,\underbrace{\mathsf{P}(|X_n|\leq x)}_{\leq 1}) \\ &\leq \varepsilon + x < \infty \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \mathsf{E}(|X_n|1(A)) &= \mathsf{E}(\underbrace{|X_n|}_{\leq x}\underbrace{1(|X_n|\leq x)}_{\leq 1}1(A)) + \mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x)\underbrace{1(A)}_{\leq 1}) \\ &\leq \underbrace{x\mathsf{P}(A)}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x))}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}, \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0\ \exists x > 0$, so dass $\mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ wegen gleichgradiger Integrierbarkeit. Wähle $\delta > 0$, $x\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

□

Lemma 5.3.2
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X$ genau dann, wenn $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist. Insbesondere folgt aus $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X$ die Konvergenz $\mathsf{E}X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{E}X$.

Beweis Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar. Es ist zu zeigen, dass $\mathsf{E}|X_n - X| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} X \Rightarrow \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für alle ε.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,|X_n - X| &\leq \mathsf{E}\,(|X_n - X|\,1\,(|X_n - X| \leq \varepsilon)) + \mathsf{E}\,(|X_n - X|\,1\,(|X_n - X| > \varepsilon)) \\ &\leq \varepsilon + \underbrace{\mathsf{E}\,(|X_n - X|\,1\,(|X_n - X| > \varepsilon))}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \text{wegen Lemma 5.3.1, 2) für } A_n=\{|X_n-X|>\varepsilon\}} \\ &\quad + \underbrace{\mathsf{E}\,(|X|\,1\,(|X_n - X| > \varepsilon))}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \text{weil } \mathsf{E}|X|<\infty,\ \text{nach dem Satz von Lebesgue}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Warum $\mathsf{E}|X| < \infty$? Es gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$, aus Lemma 5.3.1, 1): $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$. Nach dem Lemma von Fatou gilt $\mathsf{E}|X| < \infty$, denn für alle $\varepsilon_0 > 0$ $\exists N$: für alle $n > N$ $|X_n - X| < \varepsilon_0 \Rightarrow X_n \le \eta_1$, $\eta_1 = |X| + \varepsilon_0$, $X_n \ge \eta_2$, $\eta_2 = |X| - \varepsilon_0$, für alle $n > N$. $\mathsf{E}|X| = \mathsf{E}|\lim_{n\to\infty} X_n| \le \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}|X_n| < \infty$. Somit haben wir bewiesen, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X$.
Jetzt sei $\mathsf{E}|X_n - X| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Es sind die Eigenschaften 1) und 2) des Lemmas 5.3.1 zu zeigen.

1. $\sup_n \mathsf{E}|X_n| \le \sup_n \mathsf{E}|X_n - X| + \mathsf{E}|X| < \infty$, wegen $X_n \xrightarrow{L^1} X$.
2. Für alle $A \subset \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(A) \le \delta$: $\mathsf{E}(|X_n|1(A)) \le \mathsf{E}(|X_n - X|\underbrace{1(A)}_{\le 1}) + \mathsf{E}(|X|1(A)) \le \underbrace{\mathsf{E}|X_n - X|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ bei entsprechender Wahl von δ, weil $\mathsf{E}|X| < \infty$ und weil für alle $\varepsilon > 0$ $\exists N$, so dass für alle $n > N$ $\mathsf{E}|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}$.

□

5.4 Gestoppte Martingale

Bezeichnung: $x_+ = (x)_+ = \max(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Theorem 5.4.1 (Ungleichung von Doob):
Sei $X = \{X(t),\ t \ge 0\}$ ein càdlàg-Prozess, adaptiert bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F},\ t \ge 0\}$. Sei X ein Submartingal. Dann gilt für beliebige $t > 0$ und beliebige $x > 0$:

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\le s\le t} X(x) > x\right) \le \frac{\mathsf{E}(X(t))_+}{x}$$

Beweis O.B.d.A. setze $X(t) \ge 0$, $t \ge 0$ f.s. voraus.
$\mathsf{P}(\sup_{0\le s\le t} X(s) > x) = \mathsf{P}(\sup_{0\le s\le t}((X(s))_+ > x))$, für alle $t \ge 0$, $x > 0$. $A = \{\sup_{t_1,\dots,t_n} X(s) > x\}$, $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le t$ – beliebige Zeitpunkte. $A = \cup_{k=1}^n A_k$,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{X(t_1) > x\} \\ A_2 &= \{X(t_2) \le x, X(t_2) > x\} \\ &\vdots \\ A_k &= \{X(t_1) \le x, X(t_1) \le x, \ldots, X(t_{k-1}) \le x, X(t_k) > x\}, \end{aligned}$$

$k = 2, \ldots, n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$.
Es ist zu seigen, dass $\mathsf{P}(A) \le \frac{\mathsf{E}(X(t_n))}{x}$.
$\mathsf{E}(X(t_n)) \ge \mathsf{E}(X(t_n)1(A)) = \sum_{k=1}^n \mathsf{E}(X(t_n)1(A_k)) \ge x \sum_{k=1}^n \mathsf{P}(A_k) = x\mathsf{P}(A)$, $k = 1, \ldots, n-1$, weil X ein Martingal ist und daraus folgt, dass $\mathsf{E}(X(t_n)1(A_k)) \ge \mathsf{E}(X(t_k)1(A_k)) \ge \mathsf{E}(x1(A_k)) = x\mathsf{P}(A_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $t_n > t_k$.
Sei $B \subset [0, t]$ eine endliche Teilmenge, $0 \in B$, $t \in B \Rightarrow$ es wird ähnlich bewiesen, dass $\mathsf{P}(\max_{s\in B} X(s) > x) \le \frac{\mathsf{E}X(t)}{x}$.
$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R} \Rightarrow [0, t) \cap \mathbb{Q} \cup \{t\} = \cup_{k=1}^\infty B_k$, $B_k \subset [0, t) \cap \mathbb{Q} \cup \{t\}$ endlich, $B_k \subset B_n$, $k < n$.
Wegen Monotonie des Wahrscheinlichkeitsmaßes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\max_{s\in B} X(s) \ge x\right) = \mathsf{P}\left(\cup_n \{\max_{s\in B_n} X(s) > x\}\right) = \mathsf{P}\left(\sup_{s\in\cup_n B_n} X(s) > x\right) \le \frac{\mathsf{E}X(t)}{x}$$

Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade von X gilt $\mathsf{P}(\sup_{0\le s\le t} X(s) > x) \le \frac{\mathsf{E}X(t)}{x}$. □

Folgerung 5.4.1
Für Wiener-Prozess $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ betrachten wir den Wiener-Prozess mit negativer Drift: $Y(t) = W(t) - \mu t$, $\mu > 0$, $t \geq 0$. Aus dem Beispiel Nr.3 des Abschnitts 5.3 ist $X(t) = \exp\{u(Y(t)+t\mu) - \frac{u^2 t}{2}\}$, $t \geq 0$, ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration für W. Für $u = 2\mu$ gilt

$$X(t) = \exp\{2\mu Y(t)\}, \quad t \geq 0.$$

$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Y(s) > x\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq s\leq t} e^{2\mu Y(s)} > e^{2\mu x}\right\} \leq \frac{\mathsf{E}e^{2\mu Y(t)}}{e^{2\mu x}} = e^{-2\mu x}$, $x > 0$
$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\sup_{0\leq s\leq t} Y(s) > x\}$. Aus Beispiel Nr.3 gilt $\mathsf{E}e^{2\mu Y(t)} = \mathsf{P}(\sup_{t\geq 0} Y(t) > x) \leq e^{-2\mu x}$.

Theorem 5.4.2
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ mit càdlàg-Pfaden. Falls $T : \Omega \to [0, \infty)$ eine endliche Stoppzeit bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ ist, dann ist auch der stochastische Prozess $\{X_{T\wedge t}(t) \geq 0\}$ ein Martingal, das auch ein gestopptes Martingal genannt wird. Dabei ist $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Lemma 5.4.1
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal mit càdlàg-Trajektorien bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. Sei T eine endliche Stoppzeit und sei $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von diskreten Stoppzeiten aus dem Theorem 5.1.2, für die $T_n \downarrow T$, $n \to \infty$, gilt. Dann ist $\{X(T_n \wedge t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar für jedes $t \geq 0$.

Beweis

$$T_n = \begin{cases} 0 \quad, & \text{falls } T = 0 \\ \frac{k+1}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} < T \leq \frac{k+1}{2^n}, \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

1. Es ist zu zeigen: $\mathsf{E}|X(T_n \wedge t)| < \infty$ für alle n.
   $\mathsf{E}|X(T_n \wedge t)| \leq \sum_{k:\frac{k}{2^n}<t} \mathsf{E}|X(\frac{k}{2^n})| + \mathsf{E}|X(t)| < \infty$, weil X ein Martingal ist, also integrierbar.

2. Es ist zu zeigen: $\sup_n \mathsf{E}(|X(T_n \wedge t)|1(\underbrace{|X(T_n \wedge t)| > x}_{A_n})) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
&\sup_n \mathsf{E}(|X(T_n \wedge t)|1(A_n)) \\
= \ &\sup_n \left(\sum_{k:\frac{k}{2^n}<t} \mathsf{E}\left(\left|X\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| 1\left(\left\{T_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap A_n\right)\right) + \mathsf{E}\left(|X(t)|\, 1\left(T_n > t\right) 1\left(A_n\right)\right)\right) \\
\leq \ &\sup_n \left(\sum_{k:\frac{k}{2^n}<t} \mathsf{E}\left(|X(t)|\, 1\left(\left\{T_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap A_n\right)\right) + \mathsf{E}\left(|X(t)|\, 1\left(\{T_n > t\} \cap A_n\right)\right)\right) \\
= \ &\sup_n \mathsf{E}\left(|X(t)|\, 1\left(A_n\right)\right) \leq \sup_n \mathsf{E}\left(|X(t)|\, 1\left(Y > x\right)\right) \\
= \ &\mathsf{E}\left(|X(t)|\, 1\left(Y > x\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei $1(A_n) \leq 1(\underbrace{\sup_n |X(T_n \wedge t)|}_{Y} > x)$. Es ist zu zeigen: $\mathsf{P}(Y > x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mit Hilfe von der Ungleichung von Doob.
$\mathsf{P}(Y > x) \leq \mathsf{P}(\sup_{0\leq s\leq t} |X(s)| > x) \leq \frac{\mathsf{E}|X(t)|}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Da $\mathsf{E}|X(t)| < \infty$ für alle

$t \geq 0$ und $\mathsf{P}(Y > x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, ergibt sich $\mathsf{E}(|X(t)|1(Y > x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sup_n \mathsf{E}|X(T_n \wedge t)1(A)| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ $\{X(T_n \wedge t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

□

Beweis vom Theorem 5.4.2
Es ist zu zeigen, dass $\{X(T \wedge t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal ist.

1. $\mathsf{E}|X(T \wedge t)| < \infty$ für alle $t \geq 0$. Wie in der Folgerung 5.1.1 approximiert man $T_n \downarrow T$, $n \to \infty \Rightarrow X(T_n \wedge t) \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X(T \wedge t)$, da aber $\mathsf{E}|X(T_n \wedge t)| < \infty$ für alle n folgt $\mathsf{E}|X(T \wedge t)| < \infty$ wegen Lemma 5.4.1, weil aus der gleichgradigen Integrierbarkeit die L^1-Konvergenz folgt.

2. *Martingal Eigneschaft*
   Es ist zu zeigen:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{E}(X(T\wedge t) \mid \mathcal{F}_s) & \stackrel{f.s.}{=} & X(T\wedge s), \quad s \leq t \\ & \Updownarrow & \\ \mathsf{E}(X(T\wedge t)1(A)) & \stackrel{f.s.}{=} & \mathsf{E}(X(T\wedge s)1(A)),\ A \in \mathcal{F}_s \end{array}$$

   Zunächst zeigen wir, dass $\mathsf{E}(|X(T_n \wedge t)|1(A)) = \mathsf{E}(|X(T_n \wedge s)|1(A))$, $A \in \mathcal{F}_s$, $n \in \mathbb{N}$. Seien $t_1, \ldots, t_k \in (s,t)$ diskrete Werte, die T_n mit positiver Wahrscheinlichkeit in (s,t) annimmt.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X(T_n\wedge t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathsf{E}(\mathsf{E}(X(T_n\wedge t) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathsf{E}(\mathsf{E}(\underbrace{X(T_n\wedge t)}_{X(t_k)} 1(T_n \leq t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &\quad + \mathsf{E}(\mathsf{E}(\underbrace{X(T_n\wedge t)}_{X(t)} 1(T_n > t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathsf{E}(X(t_k)1(T_n \leq t_k) \mid \mathcal{F}_s) + \mathsf{E}(1(T_n > t_k)\mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathsf{E}(X(t_k \wedge T_n) \mid \mathcal{F}_s) = \ldots = \mathsf{E}(X(t_{k-1} \wedge T_n) \mid \mathcal{F}_s) = \ldots \\ &= \mathsf{E}(X(t_1 \wedge T_n) \mid \mathcal{F}_s) = \ldots = \mathsf{E}(X(T_n \wedge s) \mid \mathcal{F}_s) \\ &\stackrel{f.s.}{=} X(T_n \wedge s) \end{aligned}$$

   Da X càdlàg ist und $T_n \downarrow T$, $n \to \infty$, gilt $X(T_n \wedge t) \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X(T_n \wedge t)$. Dazu sind $\{X(T_n \wedge t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar wegen L^1-Konvergenz. Daraus folgt

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{E}(X(T_n\wedge t)1(A)) & = & \mathsf{E}(X(T_n\wedge s)1(A)) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_s \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{E}(X(T\wedge t)1(A)) & = & \mathsf{E}(X(T\wedge s)1(A)) \end{array}$$

   $\Rightarrow \{X(T \wedge t),\ t \geq 0\}$ ist ein Martingal.

□

Definition 5.4.1
Sei $T : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t \geq 0$. Die „gestoppte“ σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ wird definiert durch $A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Lemma 5.4.2 1. Seien S, T – Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, $S \overset{f.s.}{\leq} T$. Dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

2. Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal mit càdlàg-Trajektorien bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ und sei T eine Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. Dann ist $X(T)$ $\mathcal{F}_T$-meßbar.

Beweis 1. $A \in \mathcal{F}_s \Rightarrow A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. $A \cap \{T \leq t\} = \underbrace{A \cap \{S \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$.

2. $X(T) = g \circ f$, $f : \Omega \to \Omega \times \mathbb{R}_+$, $f(\omega) = (\omega, T(\omega))$, $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(\omega, s) = X(s, \omega)$.
Es ist zu zeigen: f-$\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \times B_{\mathbb{R}_+}$-meßbar, g-$\mathcal{F} \times B_{\mathbb{R}_+} \mid \mathcal{F}_T$-meßbar $\Rightarrow g \circ f$-$\mathcal{F} \mid \mathcal{F}_T$-meßbar.
f-$\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \times B_{\mathbb{R}_+}$-meßbar ist offensichtlich, weil T eine Zufallsvariable ist. Betrachten wir die Einschränkung von $X = \{X(s),\ s \geq 0\}$ auf $s \in [0, t]$, $t \geq 0$.
Es ist zu zeigen: $\{X(T) \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
X – càdlàg $\Rightarrow X(s, \omega) = X(0, \omega)1(s = 0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} X(t\frac{k}{2^n}, \omega)1(\frac{k-1}{2^n}t < s \leq \frac{k}{2^n}t) \Rightarrow$ $X(s, \omega)$ ist $B_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$-meßbar $\Rightarrow X(T)$ ist $\mathcal{F} \mid \mathcal{F}_T$-meßbar.

□

Theorem 5.4.3 (Optionales Sampling-Theorem):
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Martingal mit càdlàg-Trajektorien bzgl. einer Filtration $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ und Sei T eine endliche Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\} \Rightarrow \mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_T) \overset{f.s.}{=} X(T \wedge t)$, $t > 0$.

Beweis Zeigen wir zunächst, dass $\mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_{T_n}) \overset{f.s.}{=} X(T_n \wedge t)$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, wobei die diskrete Approximation von T ist, $T_n \downarrow T$, $n \to \infty$. Sei $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k = t$ die Werte, die $T_n \wedge t$ mit positiven Wahrscheinlichkeiten annimmt. Es ist zu zeigen, dass für alle $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ gilt: $\mathsf{E}(X(t)1(A)) = \mathsf{E}(X(T_n \wedge t)1(A))$.

$$\begin{aligned}
(X(t) - X(T_n \wedge t))1(A) &= \sum_{i=1}^{k-1} X(t_k) - X(t_i)1(\{T_n \wedge t = t_i\} \cap A) \\
&= \sum_{i=2}^{k} (X(t_i) - X(t_{i-1}))1(A)1(\{T_n \wedge t < t_i\}) \\
\mathsf{E}((X(t) - X(T_n \wedge t))1(A)) &= \sum_{i=2}^{k} \mathsf{E}((X(t_i) - X(t_{i-1}))1(T_n \wedge t < t_i)1(A)) \\
&= \sum_{i=2}^{k} \mathsf{E}(\mathsf{E}(X(t_i) - X(t_{i-1}))1(T_n \wedge t < t_i)1(A) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) \\
&= \sum_{i=2}^{k} \mathsf{E}(1(T_n \wedge t < t_i)1(A))\mathsf{E}((X(t_i) - X(t_{i-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) = 0
\end{aligned}$$

$\mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_{T_n}) \overset{f.s.}{=} \mathsf{E}(X(T_n \wedge t) \mid \mathcal{F}_{T_n}) \overset{f.s.}{=} X(T_n \wedge t)$, denn $X(T_n)$ ist $\mathcal{F}_{T_n}$-meßbar. $T \leq T_n \Rightarrow \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_{T_n}$. Da $\{X(T_n \wedge t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $t \in [0, \infty)$ gleichgradig integrierbar ist, gilt

$$\mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_T) = \mathsf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_{T_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(X(T_n \wedge t) \mid \mathcal{F}_{T_n}) = \lim_{n\to\infty} X(T_n \wedge t) = X(T \wedge t),$$

weil X càdlàg ist. □

Folgerung 5.4.2
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein càdlàg-Martingal und seien S, T endliche Stoppzeiten, so dass $\mathsf{P}(S \leq T) = 1$. Dann gilt $\mathsf{E}(X(t \wedge T) \mid \mathcal{F}_s) \overset{f.s.}{=} \mathsf{E}(X(S \wedge t)), t \geq 0$. Insbesondere gilt $\mathsf{E}(X(T \wedge t))) = \mathsf{E}(X(0))$.

Beweis X – Martingal. Aus dem Theorem 5.4.2 ist $\{X(T \wedge t),\ t > 0\}$ auch ein Martingal. Wende den Satz 5.4.3 an dieses treue Martingal an:

$$\mathsf{E}(X(T \wedge t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{f.s.}{=} X(T \wedge S \wedge t) \overset{f.s.}{=} X(S \wedge t),$$

weil $S \overset{f.s.}{\leq} T$. Setze $S = 0$, dann $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X(T \wedge t) \mid \mathcal{F}_0)) = \mathsf{E}X(0 \wedge t) = \mathsf{E}X(0)$. $\square$

5.5 Lèvy-Prozesse und Martingale

Theorem 5.5.1
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess mit Charakteristiken (a, b, ν).

1. Es existiert eine càdlàg-Modifikation von $\tilde{X} = \{\tilde{X}(t),\ t \geq 0\}$ von X mit denselben Charakteristiken (a, b, ν).

2. Die natürliche Filtration eines càdlàg-Lèvy-Prozesses ist rechtsseitig stetig.

Ohne Beweis

Theorem 5.5.2 (Regenerationssatz für Lèvy-Prozesse):
Sei $X = \{X(t),\ t > 0\}$ ein càdlàg-Lèvy-Prozess mit natürlicher Filtration $\{\mathcal{F}_t^X,\ t \geq 0\}$ und sei T eine endliche Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_t^X,\ t \geq 0\}$. Der Prozess $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$, gegeben durch $Y(t) = X(T + t) - X(T)$, $t \geq 0$, ist ebenfalls ein Lèvy-Prozess, adaptiert bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_{T+t}^X,\ t \geq 0\}$, der unabhängig von $\mathcal{F}_T^X$ ist und dieselben Charakteristiken, wie X besitzt. T wird Regenerationszeitpunkt genannt, da $Y \overset{d}{=} X$, Y unabhängig von $\mathcal{F}_T^X$.

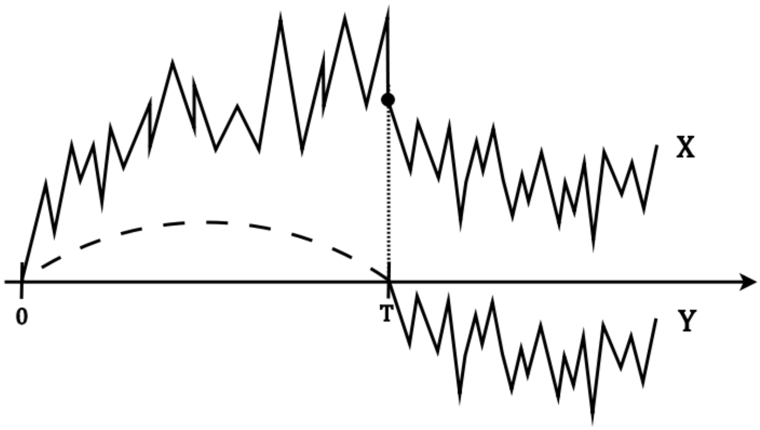

Abbildung 5.1:

Beweis 1. Annahmne: Es $\exists c > 0$, so dass $\mathsf{P}(T \leq c) = 1$. Seien $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$. Nach dem Beispiel Nr.5 im Abschnitt 5.2 ist $\tilde{Y}_j = \{\tilde{Y}_j(t) = \exp\{iu_j X(t) - t\eta(u_j)\},\ t \geq 0\}$, $j = 1, \ldots, n$, ein komplexwertiges Martingal, wobei $\eta(\cdot)$ die Lèvy-Exponente von $X(t)$ ist. Seien $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ beliebige Zeitpunkte. Für alle $A \in \mathcal{F}_T^X$ gilt

$$\mathsf{E}(1(A)\exp\{\sum_{j=1}^n iu_j(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))\}) \overset{Z.z.}{=} \mathsf{P}(A)\mathsf{E}(\exp\{\sum_{j=1}^n iu_j(X(t_j) - X(t_{j-1}))\})$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(1(A)\exp\{\sum_{j=1}^n iu_j(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))\}) \\
= \;& \mathsf{E}(1(A)\exp\{\sum_{j=1}^n iu_j(X(T+t_j) - X(T) - X(T+t_{j-1}) - X(T)))\}) \\
= \;& \mathsf{E}\left(1(A)\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{Y}_j(T+t_j)}{\tilde{Y}_j(T+t_{j-1})}\frac{\exp\{\eta(u_j)(T+t_j)\}}{\exp\{\eta(u_j)(T+t_{j-1})\}}\right) \\
= \;& \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(1(A)\prod_{j=1}^n \frac{\tilde{Y}_j(T+t_j)}{\tilde{Y}_j(T+t_{j-1})}\exp\{(t_j - t_{j-1})\eta(u_j)\} \mid \mathcal{F}_{T+t_{j-1}}^X\right)\right) \\
= \;& \mathsf{E}\left(1(A)\prod_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{Y}_j(T+t_j)}{\tilde{Y}_j(T+t_{j-1})}e^{(t_j - t_{j-1})\eta(u_j)}\frac{e^{(t_n - t_{n-1})\eta(u_n)}}{\tilde{Y}_n(T+t_{n-1})}\mathsf{E}(\tilde{Y}_n(T+t_n) \mid \mathcal{F}_{T+t_{n-1}}^X)\right) \\
= \;& \mathsf{E}\left(1(A)\prod_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{Y}_j(T+t_j)}{\tilde{Y}_j(T+t_{j-1})}e^{(t_j - t_{j-1})\eta(u_j)} \cdot \ldots \cdot e^{(t_n - t_{n-1})\eta(u_n)}\right) \\
= \;& \ldots = \mathsf{E}(1(A)\prod_{j=1}^n e^{(t_j - t_{j-1})\eta(u_j)}) = \mathsf{P}(A)\prod_{j=1}^n e^{(t_j - t_{j-1})\eta(u_j)} \\
= \;& \mathsf{P}(A)\mathsf{E}(\exp\{i\sum_{j=1}^n (u_j(X(t_j) - X(t_{j-1})))\})
\end{aligned}$$

□

Folgerung 5.5.1
$T_1 = T + t_n$, $S_1 = T + t_{n-1} \leq T_1$ f.s., $T_1, S_1 \leq t$, weil $t > c + t_n$, $T \geq c$.

Aufgabe 5.5.1
Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E}(1(A)\exp\{\sum_{j=1}^n iu_j(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))\}) = \mathsf{P}(A)\mathsf{E}(\exp\{\sum_{j=1}^n iu_j(X(t_j) - X(t_{j-1}))\})$ die Aussage des Satzes folgt.

5.6 Martingale und Wiener-Prozesse

Unser Ziel: Falls $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess ist, dann gilt

$$\mathsf{P}(\max_{s\in[0,t]} W(s) > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy, \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Theorem 5.6.1 (Reflexionsprinzip):
Sei T eine beliebige Stoppzeit bzgl. der natürlichen Filtration $\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\}$. Sei $X = \{X(t), t \geq 0\}$ der reflektierte Wiener-Prozess zum Zeitpunkt T, d.h. $X(t) = W(T \wedge t) - (W(t) - W(T \wedge t))$, $t \geq 0$. Dann gilt $X \stackrel{d}{=} W$.

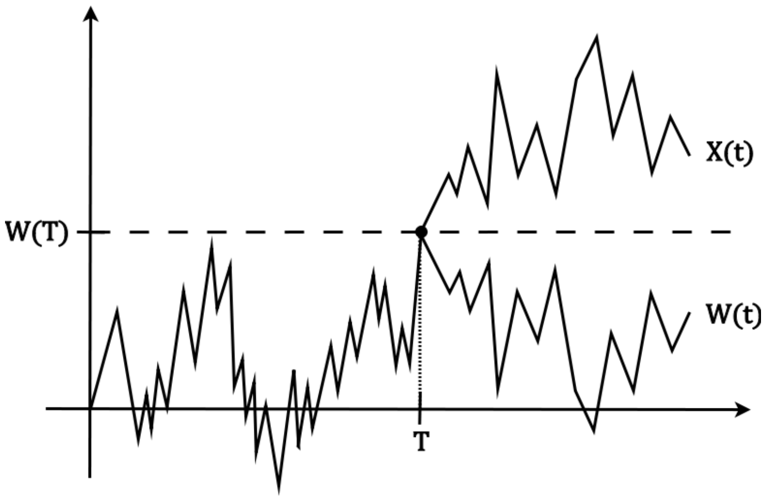

Abbildung 5.2:

Beweis Sei $X_1(t) = W(T \wedge t)$, $X_2(t) = W(T+t) - W(T)$, $t \geq 0$. Aus dem Theorem 5.5.2 folgt, dass X_2 unabhängig von (T_1, X_1) ist (W – Lèvy-Prozess und T – Regenerationszeitpunkt). Es gilt $W(t) \stackrel{g}{=} X_1(t) + X_2((t-T)_+)$, $X(t) \stackrel{g}{=} X_1(t) - X_2((t-T)_+)$, $t \geq 0$. Aus dem Satz **??** folgt

$$\begin{array}{ccc} (T_1, X_1, X_2) & \stackrel{d}{=} & (T, X_1, -X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \stackrel{d}{=} & X \end{array}$$

□

Sei $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, sei $\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\}$ die natürliche Filtration bzgl. W. Für $z \in \mathbb{R}$ sei $T_{\{z\}}^W = \inf\{t \geq 0 : W(t) = z\}$. $T_{\{z\}}^W := T_z^W$ ist eine f.s. endliche Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\}$, $z > 0$. Offensichtlich, es gilt $\{\mathcal{F}_z^W \leq t\} \in \mathcal{F}_t^W$. Da W stetige Pfade (f.s.) besitzt, ist $\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\}$ rechtsseitig stetig.

Folgerung 5.6.1
Sei $M_t = \max_{s \in [0,t]} W(s)$, $t \geq 0$. Dann gilt für alle $z > 0$, $y \geq 0$, dass $\mathsf{P}(M_t \geq z, W(t) \leq z - y) = \mathsf{P}(W(t) > y + z)$.

Beweis M_t sei eine Zufallsvariable, weil W stetige Pfade hat. $T := T_z^W$. Nach dem Theorem 5.6.1 gilt: für $Y(t) = W(T \wedge t) - (W(t) - W(T \wedge t))$, $t \geq 0$, $Y \stackrel{d}{=} W$ bzw. $\{T_z^W, W\} \stackrel{d}{=} \{T_z^Y, Y\}$, weil $W(t) = z$, $T_z^W = T_z^Y$. Deshalb

$$\mathsf{P}(T \leq t, W(t) < z - y) = \mathsf{P}(T_z^Y \leq t, Y(t) < z - y)$$

$\{T_z^Y \leq t\} \cap \{Y(t) < z-y\} = \{T_z^Y \leq t\} \cap \{2z - W(t) < z-y\}$. Falls $T = T_z^Y \leq t$, dann $Y(t) = W(T) - W(t) + W(T) = 2z - W(t)$ und daraus folgt

$$\mathsf{P}(T \leq t, W(t) < z-y) = \mathsf{P}(T \leq t, 2z - W(t) < z-y) = \mathsf{P}(T \leq t, W(t) > z+y) = \mathsf{P}(W(t) > z+y)$$

Per Definition im $T = T_z^W$ gilt:

$$\mathsf{P}(T \leq t, W(t) < z-y) = \mathsf{P}(M_t \geq z, W(t) < z-y) = \mathsf{P}(W(t) > y+z)$$

$\Rightarrow T_z^W \leq t \Longleftrightarrow \max_{s \in [0,t]} W(s) \geq z$ □

Theorem 5.6.2 (Verteilung des Maximums von W):
Für $t > 0$ und $x \geq 0$ gilt

$$\mathsf{P}(M_t > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

Beweis In Folgerung 5.6.1 setze $y = 0 \Rightarrow \mathsf{P}(M_t \geq z, W(t) < z) = \mathsf{P}(W(t) > z)$. Es gilt $\mathsf{P}(W(t) > z) = \mathsf{P}(W(t) \geq z)$ für alle t und alle z, weil $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$, also atomfrei
$\Rightarrow \mathsf{P}(M_t \geq z, W(t) < z) + \mathsf{P}(W(t) \geq z) = \mathsf{P}(W(t) > z) + \mathsf{P}(W(t) > z)$
$\Rightarrow \mathsf{P}(M_t \geq z, W(t) < z) + \mathsf{P}(M_t \geq z, W(t) \geq z) = \mathsf{P}(M_t \geq z) = 2\mathsf{P}(W(t) > z)$
$\Rightarrow \mathsf{P}(M_t > z) = 2\mathsf{P}(W(t) > z) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_z^\infty e^{-\frac{y^2}{2z}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_z^\infty e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$ □

Sei $X(t) = W(t) - t\mu$, $t \geq 0$, $\mu > 0$, der Wiener-Prozess mit negativer Drift. Betrachte $\mathsf{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > x) = e^{-2\mu x}$, $x \geq 0$.

Motivation Berechnung der Ruin-Wahrscheinlichkeiten in der Risikotheorie.

Annahmen Startkapital $x \geq 0$. Sei μ das Prämienvolumen per Zeiteinheit.$\Rightarrow$ μt – Prämienannahmen zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Sei $W(t)$ der Prozess der Verluste (Preisentwicklung). $\Rightarrow$ $Y(t) = x + t\mu - W(t)$ – Restkapital zum Zeitpunkt t. Die Wahrscheinlichkeit des Ruins ist $\mathsf{P}(\inf_{t \geq 0} Y(t) < 0) = \mathsf{P}(x - \sup_{t \geq 0} X(t) < 0) = \mathsf{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > x)$

Theorem 5.6.3
Es gilt

$$\mathsf{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > x) = e^{-2\mu x}, \quad x \geq 0,\ \mu > 0.$$

Beweis Sei $T = T_z^X = \inf\{t \geq 0 : X(t) = z\}$. Es ist bekannt, dass $Y(t) = \exp\{uX(t) - t(\frac{u^2}{2} - \mu u)\}$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, ein Martingal ist. Sei $T' = T \wedge t$ – eine endliche Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_t^X,\ t \geq 0\}$. Aus Folgerung 5.4.1: $\mathsf{E}Y(T') = \mathsf{E}Y(0) = \mathsf{E}e^0 = 1$

$$\Rightarrow \mathsf{E}(Y(T')1(T < t)) + \mathsf{E}(Y(T')1(T \geq t)) = \mathsf{E}(Y(T)1(T < t)) + \mathsf{E}(Y(T')1(t \geq t))$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathsf{E}(Y(T')1(T \geq t)) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.
Aus der Folgerung **??** ist bekannt, dass

$$\frac{W(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{f.s.} 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{X(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{W(t)}{t} - \mu = -\mu \Rightarrow X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{f.s.} -\infty$$

$Y(T')1(T \geq t) = \exp\{uX(t) - t(\frac{u^2}{2} - \mu u)\}1(T \geq t) \xrightarrow[t\to+\infty]{f.s.} 0$, falls $\frac{u^2}{2} - \mu u > 0 \Rightarrow u \geq 2\mu$. Anderseits, $Y(T')1(T \leq t) \leq \exp\{uz\} \Rightarrow$ nach dem Satz von Lebesgue gilt:

$$\mathsf{E}(Y(T')1(T \geq t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathsf{E}(Y(T)1(T<t)) = 1,\ Y(T) = \exp\{uz - T(\frac{u^2}{2} - \mu u)\} \\
&\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathsf{E}(\exp\{-T(\frac{u^2}{2} - \mu u)\}1(T<t)) = e^{-uz} \\
&\overset{u=2\mu}{\Rightarrow} \lim_{t\to+\infty} \mathsf{P}(T<t) = \mathsf{P}(T<\infty) = e^{-2\mu z} \\
&\Rightarrow \mathsf{P}(\sup_{t\geq 0} X(t) > z) = \mathsf{P}(T_z^X < \infty) = e^{-2\mu z}
\end{aligned}$$

□

Theorem 5.6.4
Sei $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $T(t) = \inf\{s \geq 0 : W(s) + \mu s = \delta t\}$, $t \geq 0$. Dann ist $T = \{T(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess mit $\hat{m}_{T(t)}(z) = \mathsf{E}e^{-zT(t)} = \exp\{-t\delta(\sqrt{2z + \mu^2} - \mu)\}$, $t \geq 0$, $z \geq 0$.

Spezialfall: Für $\mu = 0$, $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist $T = \{T(t),\ t \geq 0\}$ ein $\frac{1}{2}$-stabiler Subordinator, der auch manchmal Lèvy-Subordinator genannt wird. Hier gilt $\hat{m}_{X(t)}(z) = e^{-t\sqrt{z}}$. (Für α-stabile Subordinatoren gilt: $\hat{m}_{T(t)}(z) = e^{-tz^\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$)

Zur Erinnerung: Das Lèvy-Maß eines α-stabilen Subordinators ist

$$\nu(dx) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} 1(x > 0), \quad \alpha \in (0,1).$$

Beweis des Satzes 5.6.4 im Spezialfall (allgemein geht analog)
Sei $T(t) = \inf\{s \geq 0 : W(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\}$, $t \geq 0$. Es ist zu zeigen, dass $T = \{T(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess ist.
$T(0) \overset{f.s.}{=} 0$. Aus dem Theorem 5.5.2 folgt, dass T unabhängige und stationäre Zuwächse hat. T ist stochastisch stetig, denn

$$\lim_{t\to 0} \mathsf{P}(T(t) > \varepsilon) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(\max_{s\in[0,\varepsilon]} W(s) < \frac{t}{\sqrt{2}}) = \lim_{t\to 0}(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \int_{\frac{t}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}} dy) = 1 - 1 = 0.$$

Somit haben wir bewiesen, dass T ein Lèvy-Prozess ist.
Es ist noch zu zeigen, dass $T(t)$ α-stabil für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, d.h. $\mathsf{E}e^{-zT(t)} = e^{-t\sqrt{z}}$, für alle z und $t \geq 0$. Ähnlich zum Beweis des Theorems 5.6.3 betrachten wir das Martingal $X = \{X(s),\ s \geq 0\}$, $X(s) = \exp\{zW(s) - s\frac{z^2}{2}\}$, $s \geq 0$.
Sei $Y_{n,t} = T(t) \wedge n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, eine Folge von Stoppzeiten bzgl. $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. Aus Folgerung 5.4.1 ist $\{X(Y_{n,t}),\ n \in \mathbb{N}\}$ für alle t, $z > 0$, ebenfalls ein Martingal.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}X(Y_{n,t}) = \mathsf{E}X(Y_{0,t}) = \mathsf{E}X(0) = e^{z0} = 1 \\
&\mathsf{E}(X(Y_{n,z})1(T(t) < n)) + \mathsf{E}(X(Y_{n,t}))1(T(t) \geq n) \\
&= \mathsf{E}(\exp\{z \underbrace{W(T(t))}_{=\frac{t}{\sqrt{2}}} - T(t)\tfrac{z^2}{2}\}1(T(t) < n)) + \mathsf{E}(\exp\{zW(n) - n\tfrac{z^2}{2}1(T(t) \geq n))
\end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathsf{E}(\exp\{zW(n) - n\frac{z^2}{2}\}1(T(t) \geq n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Daraus wird folgen, dass $1 = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(\exp\{z\frac{t}{\sqrt{2}} - T(t)\frac{z^2}{2}\} \underbrace{1(T(t) < n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1}) = \mathsf{E}\exp\{z\frac{t}{\sqrt{2}} - T(t)\frac{z^2}{2}\}$, weil $T(t)$ eine endliche Stoppzeit ist, d.h. $\mathsf{P}(T(t) < \infty) = 1$ für alle $t \geq 0$.
Die obige Konvergenz gilt nach Lebesgueschem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\Rightarrow \mathsf{E}\exp\{-T(t)\underbrace{\frac{z^2}{2}}_{=u}\} - e^{-t\frac{z}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \mathsf{E}e^{-uT(t)} = e^{-t\sqrt{u}},\ u \geq 0.$$

Es ist noch zu zeigen, dass $\mathsf{E}(\exp\{zW(n) - n\frac{z^2}{2}\} \underbrace{1(T(t) \geq n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Zusätzlich gilt: $T(t) \geq n \Rightarrow W(n) \leq \frac{t}{\sqrt{2}}$.
$\exp\{zW(n) - n\frac{z^2}{2}\}1(T(t) \geq n) \leq \exp\{t\frac{t}{\sqrt{2}}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
$\Rightarrow$ Die Konvergenz ergibt sich aus dem Satz von Lebesgue. □

Bemerkung 5.6.1
Falls $T(t) = \min\{s \geq 0 : W(s) + \mu s = \delta t\}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $t \geq 0$, dann kann die Laplace-Transformierte in $T(t)$ (vgl. Theorem 5.6.4) $\mathsf{E}e^{-zT(t)} = \exp\{-t\delta(\sqrt{2z + \mu^2} - \mu)\}$ explizit inventiert werden: die Dichte von $T(t)$ läßt sich schreiben als

$$f_{T(t)}(x) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta t\mu} x^{-\frac{3}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(t^2\delta^2\frac{1}{x} + \mu^2 x)\}1(x \geq 0).$$

Das ist die Dichte der *sogenannten inversen Gauß-Verteilung.*

Theorem 5.6.5
Sei $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ ein Lèvy-Prozess und sei $T = \{T(t),\ t \geq 0\}$ ein Subordinator, die beide auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ definiert sind. Seien X und T unabhängig. Dann ist $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ definiert durch $Y(t) = X(T(t))$, $t \geq 0$, ebenfalls ein Lèvy-Prozess.

Ohne Beweis

5.7 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 5.7.1
Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ mit

$$\mathsf{E}|X| < \infty, \quad \mathsf{E}|Y| < \infty, \quad \mathsf{E}|XY| < \infty,$$

und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine beliebige Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gilt

(a) $\mathsf{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathsf{E}X, \mathsf{E}(X|\mathcal{F}) = X$,

(b) $\mathsf{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathsf{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathsf{E}(Y|\mathcal{G})$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$,

(c) $\mathsf{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathsf{E}(Y|\mathcal{G})$, falls $X \leq Y$,

(d) $\mathsf{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathsf{E}(X|\mathcal{G})$, falls Y eine $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Zufallsvariable ist,

(e) $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathsf{E}(X|\mathcal{G}_1)$, falls $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ sind mit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$,

(f) $\mathsf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathsf{E}X$, falls die σ-Algebra $\mathcal{G}$ und $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unabhängig sind, d. h., falls $\mathsf{P}(A \cap A') = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A')$ für beliebige $A \in \mathcal{G}$ und $A' \in \sigma(X)$.

(g) $\mathsf{E}(f(X)|\mathcal{G}) \geq f(\mathsf{E}(X|\mathcal{G}))$, falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist, so dass $\mathsf{E}|f(X)| < \infty$.

Aufgabe 5.7.2
Betrachte die zwei Zufallsvariablen X und Y über dem Wahrscheinlichkeitsraum $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \frac{1}{2}\nu)$ mit $\mathsf{E}|X| < \infty$, wobei ν das Lebesguemaß auf $[-1,1]$ bezeichnet. Bestimme für die folgenden Zufallsvariablen jeweils $\sigma(Y)$ und eine Version der bedingten Erwartung $\mathsf{E}(X|Y)$.

(a) $Y(\omega) = \omega^5$ (Hinweis: Zeige zunächst, dass $\sigma(Y) = \mathcal{B}([-1,1])$)

(b) $Y(\omega) = (-1)^k$ für $\omega \in \left[\frac{k-3}{2}, \frac{k-2}{2}\right)$, $k = 1, \ldots, 4$ und $Y(1) = 1$
(Hinweis: Es gilt $\mathsf{E}(X|B) = \frac{\mathsf{E}(X\mathbb{1}_B)}{\mathsf{P}(B)}$ für $B \in \sigma(Y)$ mit $\mathsf{P}(B) > 0$)

(c) Berechne die Verteilung von $\mathsf{E}(X|Y)$ in (a) und (b), falls $X \sim U[-1,1]$.

Aufgabe 5.7.3
Seien X und Y Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Die bedingte Varianz $\mathsf{var}(Y|X)$ ist definiert durch

$$\mathsf{var}(Y|X) = \mathsf{E}((Y - \mathsf{E}(Y|X))^2|X).$$

Zeige, dass

$$\mathsf{var}\, Y = \mathsf{E}(\mathsf{var}(Y|X)) + \mathsf{var}(\mathsf{E}(Y|X)).$$

Aufgabe 5.7.4
Für eine Stoppzeit τ definieren wir die gestoppte σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ wie folgt:

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für beliebige } t \geq 0\}.$$

Seien nun S und T Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige:

(a) $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \; \forall A \in \mathcal{F}_S$

(b) $\mathcal{F}_{\min\{S,T\}} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

Aufgabe 5.7.5 (a) Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Martingal. Zeige, dass $\mathsf{E}X(t) = \mathsf{E}X(0)$ für alle $t \geq 0$ gilt.

(b) Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Sub- bzw. Supermartingal. Zeige, dass $\mathsf{E}X(t) \geq \mathsf{E}X(0)$ bzw. $\mathsf{E}X(t) \leq \mathsf{E}X(0)$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 5.7.6
Der stochastische Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ sei adaptiert und càdlàg. Zeige, dass

$$\mathsf{P}(\sup_{0 \leq v \leq t} X(v) > x) \leq \frac{\mathsf{E}X(t)^2}{x^2 + \mathsf{E}X(t)^2}$$

für beliebige $x > 0$ und $t \geq 0$ gilt, falls X ein Submartingal mit $\mathsf{E}X(t) = 0$ und $\mathsf{E}X(t)^2 < \infty$ ist.

Aufgabe 5.7.7 (a) Sei $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion mit

$$\frac{g(x)}{x} \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Zeige, dass die Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen gleichgradig integrierbar ist, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}g(|X_n|) < \infty$.

(b) Sei $X = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal. Zeige, dass die Folge von Zufallsvariablen $X(T \wedge 1), X(T \wedge 2), \ldots$ für jede endliche Stoppzeit T gleichgradig integrierbar ist, falls $\mathsf{E}|X(T)| < \infty$ und $\mathsf{E}(|X(n)|\mathsf{1}_{\{T>n\}}) \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 5.7.8
Sei $S = \{S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}\}$ eine symmetrische zufällige Irrfahrt mit $a > 0$ und $\mathsf{P}(X_i = 1) = \mathsf{P}(X_i = -1) = 1/2$ für $i \in \mathbb{N}$. Die zufällige Irrfahrt wird zu demjenigen Zeitpunkt T gestoppt, bei dem sie zum ersten Mal einen der beiden Werte 0 und $K > a$ unter- bzw. überschreitet, d. h.

$$T = \min_{k\geq 0}\{S_k \leq 0 \text{ oder } S_k \geq K\}.$$

Zeige, dass $M_n = \sum_{i=0}^n S_i - \frac{1}{3}S_n^3$ ein Martingal ist und $\mathsf{E}(\sum_{i=0}^T S_i) = \frac{1}{3}(K^2 - a^2)a + a$ gilt.

Hinweis: Für die Berechnung von $\mathsf{E}(M_n|\mathcal{F}_m^M)$, $n > m$, kann $\mathsf{E}(\sum_{i=k}^l X_i)^3 = 0$, $1 \leq k \leq l$, $M_n = \sum_{r=0}^m S_r + \sum_{r=m+1}^n S_r - \frac{1}{3}S_n^3$ und $S_n = S_n - S_m + S_m$ verwendet werden.

Ein diskretes Martingal bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$, so dass X_n bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ messbar ist und $\mathsf{E}(X_{n+1}|X_n) = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine diskrete Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\}$.

Aufgabe 5.7.9
Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein diskretes Martingal und T eine diskrete Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass auch $\{X_{\min\{T,n\}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 5.7.10
Sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine symmetrische zufällige Irrfahrt mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, so dass $\mathsf{P}(X_1 = 1) = \mathsf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $T = \inf\{n : |S_n| > \sqrt{n}\}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass T eine Stoppzeit bezüglich $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(b) Zeige, dass $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $G_n = S^2_{\min\{T,n\}} - \min\{T, n\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (Hinweis: Verwende Aufgabe 5.7.9)

(c) Zeige, dass $|G_n| \leq 4T$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(Hinweis: Es gilt $|G_n| \leq |S^2_{\min\{T,n\}}| + |\min\{T, n\}| \leq S^2_{\min\{T,n\}} + T$)

Aufgabe 5.7.11
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathsf{E}|X_1| < \infty$. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und sei T eine Stoppzeit bezüglich $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathsf{E}T < \infty$.

(a) Sei T unabhängig von $X_1, X_2, \ldots$. Leite eine Formel für die charakteristische Funktion von $S_T = \sum_{i=1}^T X_i$ her und weise damit die Waldsche Identität nach, d. h. $\mathsf{E}S_T = \mathsf{E}T\mathsf{E}X_1$.

(b) Sei zusätzlich $\mathsf{E}X_1 = 0$ und $T = \inf\{n : S_n < 0\}$. Verwende Theorem 2.1.3 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass $\mathsf{E}T = \infty$. (Hinweis: Widerspruchsbeweis)

6 Stationäre Folgen von Zufallsvariablen

6.1 Reihen von unabhängigen Zufallsvariablen

Es ist bekannt, dass die Reihe

$$\begin{array}{lcl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty & \iff & \alpha > 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} < \infty & \iff & \alpha > 0, \end{array}$$

weil die Drift der banachbarten Glieder die Ordnung $\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ haben.

Wann (für welche $\alpha > 0$) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n^{\alpha}}$, wobei δ_n u.i.v. Zufallsvariablen sind mit $\mathsf{E}\delta_n = 0$, z.B. $\mathsf{P}(\delta_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$?

Allgemeinere Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert (f.s.) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, wobei X_n unabhängig sind?

Man weiss, dass für eine Folge von Zufallsvariablen $\{Y_n\}$ aus $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} Y$ gilt, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} Y$. Das Gegenteil gilt im Allg. nicht.

Theorem 6.1.1
Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen. Falls $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} S$, dann $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} S$.

Ohne Beweis

Folgerung 6.1.1
Falls die Folgen X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind, $\operatorname{var} X_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}X_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var} X_n < \infty$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ f.s.

Beweis $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, $m < n$,

$$\mathsf{E}(S_n - S_m)^2 = \|S_n - S_m\|_{L^2}^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \operatorname{var} X_i \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

weil $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{var} X_i < \infty \Rightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$

$$\Rightarrow \exists S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} S \overset{\text{Theorem 6.1.1}}{\Rightarrow} S_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} S.$$

□

Folgerung 6.1.2
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, wobei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine deterministische Folge ist, und $\{\delta_n\}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen ist mit $\mathsf{E}\delta_n = 0$, $\operatorname{var} \delta_n = \sigma^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n$ f.s.

Aufgabe 6.1.1
Leiten Sie die Folgerung 6.1.2 aus dem Theorem 6.1.1 ab.

Bei uns: δ_n u.i.v., $\mathsf{E}\delta_n = 0$, $\operatorname{var}\delta_n = \sigma^2 > 0$ (z.B. $\delta_n \sim \mathit{Bernouli}(\frac{1}{2})$), $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, falls $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2\alpha}} < \infty$, d.h. für $\alpha < \frac{1}{2}$.

Folgerung 6.1.3
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\sum_{n=1}^\infty \mathsf{E}X_n$, $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} X_n < \infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty X_n \overset{f.s.}{<} \infty$.

Beweis Sei $Y_n = X_n - \mathsf{E}X_n$, daher ist $X_n = \underbrace{\mathsf{E}X_n}_{=a_n} + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\mathsf{E}Y_n = 0$, $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$ nach Voraussetzung. $\sum_{n=1}^\infty Y_n \overset{f.s.}{<} \infty$ nach Folgerung 6.1.1, weil $\operatorname{var} X_n = \operatorname{var} Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} X_n < \infty \Rightarrow \sum_n X_n = \sum_n a_n + \sum_n Y_n \overset{f.s.}{<} \infty$. □

6.2 Stationarität im engeren Sinne und Ergodentheorie

6.2.1 Grundbegriffe

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein stationäre im engeren Sinne Folge von Zufallsvariablen, d.h. für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Verteilung von $(X_n, \ldots, X_{n+k})^\top$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ ist. Insbesondere heißt es, dass alle X_n identisch verteilt sind. In der Sprache des Theorems von Kolmogorov:

$$\mathsf{P}((X_n, X_{n+1}, \ldots) \in B) = \mathsf{P}((X_1, X_2, \ldots) \in B),$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, $R^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \ldots$.

Beispiel 6.2.1 (von stationären Folgen von Zufallsvariablen):

1. Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, dann ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stationär.
2. Sei $Y_n = a_0 X_n + \ldots + a_k X_{n+k}$, k – fixierte Zahl aus $\mathbb{N}$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus 1), $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ (fixiert), $n \in \mathbb{N}$. Y_n sind nicht mehr unabhängig, aber identisch verteilt. Die Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist stationär.
3. Sei $Y_n = \sum_{j=0}^\infty a_j X_{n+j}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Zahlenfolge aus $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\sum_{j=1}^\infty |a_j| < \infty$ und $\mathsf{E}X_n = 0$, $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} X_n < \infty$, $\sum_{j=1}^\infty a_j^2 < \infty$ (vgl. Folgerung 6.1.2).
   Es ist offensichtlich, dass $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine stationäre Folge ist. (Diese Konstruktion ist wichtig für die autoregressiven Zeitreihen (AR-Prozesse), z.B. in der Ökonometrie).
4. Sei $Y_n = g(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ meßbar, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus 1). Dann ist $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stationär.

Bemerkung 6.2.1

1. Eine beliebige stationäre Folge von Zufallsvariablen $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann man erweitern zu einer stationären Folge $\bar{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Tatsächlich kann die endlich dimensionale Verteilung von $\bar{X}$ nach dem Satz von Kolmogorov durch die von X definiert werden:
   $$(X_n, \ldots, X_{n+k}) \overset{d}{=} (X_1, \ldots, X_{k+1}), \quad n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}.$$
   Deshalb (nach dem Satz von Kolmogorov) existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum und eine Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit der obigen Verteilung. Wir setzen $\bar{X} = \{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ und daraus folgt, dass $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{d}{=} \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Wir definieren eine Koordinatenverschiebung. Sei $x \in \mathbb{R}^{\infty}_{-\infty}$, $x = (x_k, k \in \mathbb{N})$, $x = (x_k, k \in \mathbb{Z})$. Definiere die Abbildung $\theta : \mathbb{R}^{\infty}_{-\infty} \to R^{\infty}_{-\infty}$, $(\theta x)_k = x_{k+1}$ (Verschiebung der Koordinaten um 1), $k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Falls θ auf $\mathbb{R}^{\infty}_{-\infty}$ betrachtet wird, so ist sie bijektiv und die Umkehrabbildung wäre $(\theta^{-1}x)_k = x_{k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Sei nun $X = \{X_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ eine stationäre Folge von Zufallsvariablen. Sei $\bar{X} = \theta X$. Es ist offensichtlich, dass $\bar{X}$ wieder stationär ist und $\bar{X} \stackrel{d}{=} X$. Daraus folgt, dass
   $$\mathsf{P}(\theta X \in B) = \mathsf{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}_{-\infty}).$$
   θ wird eine *maßerhaltende Abbildung* genannt. Es gibt aber auch andere Abbildungen, die maßerhaltend wirken.

Definition 6.2.1
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ heißt *maßerhaltend*, falls

1. T meßbar ist, d.h. $T^{-1}A \in \mathcal{F}$ für alle $A \in \mathcal{F}$,
2. $\mathsf{P}(T^{-1}A) = \mathsf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$.

Lemma 6.2.1
Sei T eine maßerhaltende Abbildung und X_0 – eine Zufallsvariable. Wir definieren eine Folge von Zufallsvariablen X_n. Sei Abbildung $UY(\omega) = Y(T(\omega))$, $\omega \in \Omega$, für eine beliebige Zufallsvariable Z auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Definiere $X_n(\omega) = U^n X_0(\omega) = X_0(T^n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge von Zufallsvariablen $X = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ stationär.

Beweis Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$, $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, $A_1 = \{\omega \in \Omega : \theta X(\omega) \in B\}$.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= (X_0(\omega), X_0(T(\omega)), X_0(T^2(\omega)), \ldots) \\ \theta X(\omega) &= (X_0(T(\omega)), X_0(T^2(\omega)), \ldots) \end{aligned}$$

Deshalb $\omega \in A_1 \Leftrightarrow T(\omega) \in A$. Weil $\mathsf{P}(T^{-1}A) = \mathsf{P}(A)$, gilt $\mathsf{P}(A_1) = \mathsf{P}(A)$. Für $A_n = \{\omega \in \Omega : \theta^n X(\omega) \in B\}$ gilt dasselbe, $\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(A)$, $n \in \mathbb{N}$ (Induktion). Und daraus folgt, dass die Folge X stationär ist. □

Die Folge X in Lemma 6.2.1 wird die *Folge, die von T erzeugt wird*, genannt.

Definition 6.2.2
Eine Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ heißt *maßerhaltend in beide Richtungen*, falls

1. T bijektiv ist und $T(\Omega) = \Omega$,
2. T und T^{-1} meßbar sind,
3. $\mathsf{P}(T^{-1}A) = \mathsf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, und, folglich, $\mathsf{P}(TA) = \mathsf{P}(A)$.

Somit können wir genau wie in Lemma 6.2.1 stationäre Folgen von Zufallsvariablen mit Zeitparameter $n \in \mathbb{Z}$ konstruieren:

$$X(\omega) = \{X_0(T^n(\omega))\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \omega \in \Omega,$$

wobei T eine maßerhaltende Abbildung (in beide Richtungen) ist, $X_0(T^0(\omega)) = X_0(\omega)$, $(T^0 = Id)$.

Lemma 6.2.2
Für eine beliebige stationäre Folge von Zufallsvariablen $X = (X_0, X_1, \ldots)$ existiert eine maßerhaltende Abbildung T und eine Zufallsvariable Y_0, so dass $Y(\omega) = \{Y_0(T^n(\omega))\}_{n\in\mathbb{N}}$ dieselbe Verteilung wie X besitzt: $X \stackrel{d}{=} Y$. Dieselbe Aussage gilt für Folgen mit dem Zeitparameter $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis Betrachten wir den kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), \mathsf{P}_X)$, $Y(\omega) = \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, $T = \theta$. Damit ist Y konstruiert, weil $\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}_Y(A) = \mathsf{P}_X(Y \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. □

Beispiel 6.2.2 (Maßerhaltende Abbildungen): 1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$, $k \geq 2$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathsf{P}(\omega_i) = \frac{1}{k}$, $i = 1, \ldots, k$, ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum. $T\omega_i = \omega_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, k-1$, $T\omega_k = \omega_1$.

2. Sei $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$, $\mathsf{P} = \nu_1$ – Lebesgue-Maß auf $[0,1)$. $T\omega = (\omega + s) \mod 1$, $s \geq 0$. T ist maßerhaltend in beide Richtungen.

Folgen von Zufallsvariablen, die in diesen Beispielen durch die Abbildung T erzeugt werden können, sind meistens deterministisch bzw. zyklisch. Im Beispiel 1) können wir eine Zufallsvariable $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachten, so dass $X(\omega_i) = x_i$ alle von einander verschieden sind. Deswegen $X_n(\omega) = X_0(T^n(\omega))$ wird eindeutig den Wert von $X_{n+1}(\omega) = X_0(T^{n+1}(\omega))$ definieren, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 6.2.2
Maßerhaltende Abbildungen spielen eine große Rolle auch in der Physik. Dort wird T als die Veränderung des Zustandes von einem physikalischem System interpretiert und das Maß kann z.B. das Volumen sein. (Bsp.: T – Veränderung der Temperatur, Maß P – Volumen vom Gas.) Deswegen ist die zu entwickelte Ergodentheorie auf manche physikalische Vorgänge übertragen.

Theorem 6.2.1 (Poincarè):
Falls T eine maßerhaltende Abbildung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ist, $A \in \mathcal{F}$, dann für fast alle $\omega \in A$ die Relation $\{T^n(\omega) \in A\}$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Das heißt, dass die Trajektorie $\{T^n(\omega),\ n \in \mathbb{N}\}$ kehrt unendlich oft zu A zurück, falls $\omega \in \Omega$, $\mathsf{P}(A) > 0$.

Beweis Es ist zu zeigen, dass $A \in \mathcal{F}$, $T : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend. Zeige, dass für fast alle $\omega \in \Omega$, $T^(\omega) \in A$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Sei $N = \{\omega \in A : T^n(\omega) \notin A \forall n \geq 1\}$. Es ist klar, dass $N \in \mathcal{F}$, weil $\{\omega \in \Omega : T^n(\omega) \notin A\} \in \mathcal{F}$ für alle $n \geq 1$. $N \cap T^(- n)N = \emptyset$ für alle $n \geq 1$. Tatsächlich, falls $\omega \in N \cap T^(- n)N$, dann $\omega \in A$, $T^(n)(\omega) \notin A$ für alle $n \geq 1$, $\omega_1 = T^n(\omega)$, $\omega_1 \in N$. Daraus folgt, dass $\omega_1 \in A$ und $T^n(\omega) \in A$. Das ist Widerspruch.
$T^(- n)N = \{\omega \in \Omega : T^n(\omega) \in N\}$. Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$T^(- m)N \cap T^(- (n+m))N = T^(- m)(N \cap T^(- n)N) = T^(- m)(\emptyset) = \emptyset.$$

Daraus folgt, dass die Mengen $T^(- n)N$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind, zu $\mathcal{F}$ gehören und $\mathsf{P}(T^(- n)N) = \mathsf{P}(A) = a \geq 0$ haben.

$$1 \geq \mathsf{P}(\cup_n T^(- n)N) = \sum \mathsf{P}(T^(- n)N) = \sum_{n=0}^{\infty} a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \mathsf{P}(N) = 0.$$

Daraus folgt, dass für fast alle $\omega \in A$ ($\omega \in A\{\}N$) ein $n_1 = n_1(\omega)$ existiert, so dass $T^(m)(\omega) \in A$. Sei nun T^k an Stelle von T, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $\mathsf{P}(N_k) = 0$ und für alle $\omega \in A\{\}N_k$ existiert

$n_k = n_k(\omega)$, so dass $(T^k)^(n_k)(\omega) \in A$. Da $kn_k \geq k$ folgt für fast alle $\omega \in A$, dass $T^(n)(\omega) \in A$ für unendlich viele n. $\square$

Folgerung 6.2.1
Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable, $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\}$. Dann für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} X(T^(n)(\omega)) = +\infty$, wobei T eine maßerhaltende Abbildung ist.

Aufgabe 6.2.1
Beweisen Sie es.

Bemerkung 6.2.3
Der Beweis des Theoremes 6.2.1 gilt für Mengen $A \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(A) \geq 0$. Falls jedoch $\mathsf{P}(A) = 0$, kann es sein, dass $A\{\}N = \emptyset$ und somit ist die Aussage des Theoremes trivial.
Als Beispiel betrachten wir $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_([0,1))$, $\mathsf{P} = \nu_1$ – Lebesgue-Maß, $T(\omega) = \omega + s \mod 1$, $s \in \mathbb{Q}$. Als Menge A betrachten wir $A = \omega_0$, $\omega_0 \in \Omega$. Dann gilt $T^n(\omega_0) \neq \omega_0$ für alle n, denn sonst existiert $k, m \in \mathbb{N}$, so dass $\omega_0 + ks - m = \omega_0$ und daraus folgt $s = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Somit bekommen wir einen Widerspruch.

6.2.2 Mischungseigenschaften und Ergodizität

Hier studieren wir die Abhängigkeitsstruktur in einer stationären Folge von Zufallsvariablen, die durch eine maßerhaltende Abbildung T erzeugt wird.

Sei $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine stationäre Folge (im engen Sinne) von Zufallsvariablen. Dann existiert eine maßerhaltende Abbildung $T : \Omega \to \Omega$, so dass $X_n(\omega) \stackrel{d}{=} X_0(T^(n)(\omega))$ und $X_n \stackrel{d}{=} X_0$, und somit gibt X_s die Randverteilung der Folge X an. Dafür ist die Abbildung T für die Abhängigkeiten innerhalb von X zuständig (sie gibt Eigenschaften von mehrdimensionalen Verteilungen an). Deshalb werden wir jetzt die Abhängigkeitseigenschaften untersuchen, die von T erzeugt werden.

Definition 6.2.3
1. Ereignis $A \in \mathcal{F}$ heißt invariant bzgl. (einer maßerhaltenden Abbildung) $T : \Omega \to \Omega$, falls $T^{-1}A = A$.

2. Ereignis $A \in \mathcal{F}$ heißt fast invariant bzgl. T, falls $\mathsf{P}(T^{-1}A \triangle A) = 0$. $\triangle$ bedeutet die symmetrische Differenz.

Aufgabe 6.2.2
Zeigen Sie, dass die Menge aller (fast) invarianten Ereignisse bzgl. T eine σ-Algebra $J(J^*)$ ist.

Lemma 6.2.3
Sei $A \in J^*$. Dann existiert $B \in J^*$, so dass $\mathsf{P}(A \triangle B) = 0$

Beweis Sei $B = \limsup_{n\to\infty} T^n A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} T^{-k} A$. Es ist zu zeigen, dass $B \in J$, $\mathsf{P}(A \triangle B) = 0$. Es ist klar, dass $T^{-1}(B) = \limsup_{n\to\infty} T^{-(n+1)} A = B$ und daraus folgt, dass $B \in J$.
Es ist leicht zu sehen, dass $A \triangle B \subset \cup_{k=0}^{\infty} (T^{-k} A \triangle T^{-(k+1)} A)$. Da $\mathsf{P}(T^{-k} A \triangle T^{-(k+1)} A) = 0$ für alle $k \geq 1$ wegen $A \in J^*$, folgt, dass $\mathsf{P}(A \triangle B) = 0$. $\square$

Definition 6.2.4
1. Die maßerhaltende Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ heißt ergodisch, falls für jedes $A \in J$

$$\mathsf{P}(A) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

2. Die stationäre Folge von Zufallsvariablen $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ergodisch, falls die maßerhaltende Abbildung $T : \Omega \to \Omega$, die X erzeugt, ergodisch ist.

Lemma 6.2.4
Die maßerhaltende Abbildung T ist ergodisch genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit beliebiger fast invarianten Mengen

$$\mathsf{P}(A) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{für alle } A \in J^*.$$

Beweis „ $\Leftarrow$ “
Klar, weil beliebige invariante Menge auch fast invariant ist, d.h. $J \subset J^*$
„ $\Rightarrow$ “
T – ergodisch. Sei $A \in J^*$. Es folgt, dass es $B \in J$ existiert, so dass $\mathsf{P}(A \triangle B) = 0$ nach Lemma 6.2.3. T – ergodisch und daraus folgt

$$\mathsf{P}(B) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathsf{P}(A) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

□

Definition 6.2.5
Eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ heiß (fast) invariant bzgl. $T : \Omega \to \Omega$ (maßerhaltende Abbildung), falls $Y(\omega) = Y(T(\omega))$ für (fast) alle $\omega \in \Omega$.

Theorem 6.2.2
Sei $T : \Omega \to \mathbb{R}$ eine maßerhaltende Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. T – ergodisch
2. Falls Y invariant bzgl. T ist, dann $Y = const$ f.s.
3. Falls Y fast invarinat bzgl. T ist, dann $Y = const$ f.s.

Beweis $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$
$1) \Rightarrow 2)$
T – ergodisch, Y – fast invariant. Es ist zu zeigen, dass $Y(\omega) = const$ für fast alle $\omega \in \Omega$. $Y(T(\omega)) = Y(\omega)$ fast sicher. Sei $A_v = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le \omega\}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $A_v \in J^*$ für alle $v \in \mathbb{R}$ und nach dem Lemma 6.2.4

$$\mathsf{P}(A_v) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{für alle } v.$$

Sei $c = \sup\{v : \mathsf{P}(A_v) = 0\}$. Zeige, dass $\mathsf{P}(Y = c) = 1$.
$A_v \uparrow \Omega$, $v \to \infty$, $A_v \downarrow \emptyset$, $v \to -\infty \Rightarrow |c| < \infty$.

$$\mathsf{P}(Y < c) = \mathsf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} \left\{Y \le c - \frac{1}{n}\right\}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(A_{c-\frac{1}{n}}\right) = 0.$$

Genauso $\mathsf{P}(Y > c) = 0$ und $\mathsf{P}(Y = c) = 1$.
$2) \Rightarrow 3)$
Offensichtlich.

3) $\Rightarrow$ 1) Es ist zu zeigen, dass T ergodisch ist, d.h. für alle $A \in J$ $\mathsf{P}(A) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right.$.

Sei $Y = 1_A$ – invariant bzgl. T, folgt daraus, dass $1_A = const = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right.$ und $\mathsf{P}(A) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right.$. □

Bemerkung 6.2.4 1. Die Aussage des Theorems 6.2.2 bleibt gültig, wenn man 3) für f.s. beschränkte Zufallsvariablen Y fordert.

2. Falls Y invariant bzgl. T ist, dann ist $Y_n = \min\{Y, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, auch invariant bzgl. T.

Beispiel 6.2.3 1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{d}$, $i = 1, \ldots, d$. Sei $T(\omega_i) = \omega_{i+1} \mod d$, d.h. $\omega_d \overset{T}{\longmapsto} \omega_1$. T ist offensichtlich ergodisch und jede invariante Zufallsvariable ist konstant.

2. Sei $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1)}$, $\mathsf{P} = \nu_1$, $T(\omega) = (\omega + s) \mod 1$. Zeige, dass T ergodisch $\Longleftrightarrow$ $s \notin \mathbb{Q}$.

Beweis „ $\Leftarrow$ “
Sei $s \notin \mathbb{Q}$, Y – eine beliebige invariante Zufallsvariable. Sei $EY^2 < \infty$. Zerlegen wir die Zufallsvariable Y in eine Furier-Reihe. Die Furier-Reihe von Y ist $Y(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n w}$. Wir wollen zeigen, dass $a_n = 0$, $n > 0$, und daraus folgt dann, dass $Y(\omega) = a_0$ f.s.. Dann ist T ergodisch nach dem Theorem 6.2.2.

$$a_n =< Y(\omega), e^{2\pi i n w} >_{L^2} = \mathsf{E}(Y(\omega)e^{-2\pi i n w}) = \mathsf{E}(Y(T(\omega))e^{-2\pi i n w})e^{-2\pi i n s} = e^{-2\pi i n s} a_n,$$

$s \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a_n = 0$.
„ $\Rightarrow$ “
Falls $s = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, dann ist T nicht ergodisch, d.h. existiert $A \in J$, so dass $0 < P(A) < 1$. Sei $A = \cup_{k=0}^{n-1} \left\{ \omega \in \Omega : \frac{2k}{2n} \leq \omega < \frac{2k+1}{2n} \right\}$ und $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}$. A ist invariant, weil $T(A) = \left(A + \frac{2m}{2n}\right) \mod 1 = A$. □

Definition 6.2.6 1. Die maßerhaltende Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ heißt *mischend*, falls für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ gilt: $\mathsf{P}(A_1 \cap T^{-n} A_2) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)$, d.h. bei wiederholten Anwendungen von T auf A_2 werden A_1 und A_2 asymptotisch unabhängig.

2. Sei $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine stationäre Folge von Zufallsvariablen die von Zufallsvariable X_0 und einer maßerhaltenden Abbildung T erzeugt wird. X heißt *schwach abhängig*, falls Zufallsvariable X_k und X_{k+n} für $n \to \infty$ asymptotisch unabhängig werden, d.h. für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$
$$\mathsf{P}(X_k \in B_1, X_{k+n} \in B_2) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathsf{P}(X_0 \in B_1)\mathsf{P}(X_0 \in B_2).$$

Theorem 6.2.3
Eine stationäre Folge von Zufallsvariablen $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, erzeugt durch die maßerhaltende Abbildung T, ist schwach abhängig im Mittel genau dann, wenn T mischend im Mittel ist.

Aufgabe 6.2.3
Beweisen Sie das Theorem.

Theorem 6.2.4
Sei T eine maßerhaltende Abbildung. Sie ist ergodisch genau dann, wenn sie mischend im Mittel ist.

Beweis „ $\Leftarrow$ “
Es ist zu zeigen, dass wenn T mischend im Mittel ist, folgt daraus, dass T ergodisch ist, d.h. für alle $A \in J$ gilt $\mathsf{P}(A) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 = A = J$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_1 \cap \underbrace{T^{-n}(A_2)}_{=A_2}) = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)$. $\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)$ für $A_1 = A$, $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}^2(A)$ und $\mathsf{P}(A) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

„ $\Rightarrow$ “
Später. □

Jetzt geben wir die Motivation die Motivation an für den Begriff „mischende Abbildung“.

Theorem 6.2.5
Sei $A \in \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(A) > 0$. Die maßerhaltende Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ ist ergodisch (d.h. mischend im Mittel) genau dann, wenn

$$\mathsf{P}\left(\cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A\right) = 1.$$

D.h. die Urbilder $T^{-n}A$, $n \in \mathbb{N}_0$, decken fast das ganze Ω ab.

Beweis „ $\Leftarrow$ “
Sei $B = \cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A$. Offensichtlich, $T^{-1}B = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A \subset B$. Da T maßerhaltend ist, d.h. $\mathsf{P}(T^{-1}B) = \mathsf{P}(B)$, folgt, dass $\mathsf{P}(T^{-1}B \triangle B) = 0$, $B \in J^*$ (B – fast invariant bzgl. T) und $\mathsf{P}(B) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. $\mathsf{P}(B) \geq \mathsf{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathsf{P}(B) = 1$.

„ $\Rightarrow$ “
Sei T nicht ergodisch. Es ist zu zeigen, dass $\mathsf{P}(B) < 1$.
Wenn T nicht ergodisch ist, dann existiert $A \in J$, so dass $0 < \mathsf{P}(A) < 1$. $B = \cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A = A$ und $\mathsf{P}(B) < 1$. □

Bemerkung 6.2.5
Bisher wurde niemals explizit die Tatsache genutzt, dass die Zufallsvariablen X reellwertig sind. Deshalb kann man die obigen Betrachtungen ohne Veränderung auf Folgen von Zufallselementen mit Werten in einem bel. meßbaren Raum $\mathcal{M}$ übertragen.

6.2.3 Ergodensatz

Sei $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Falls X_n u.i.v. sind, dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathsf{E}X_0, \quad \mathsf{E}|X_0| < \infty.$$

Wir wollen eine ähnliche Aussage über stationäre Folgen beweisen.

Theorem 6.2.6 (Ergodensatz, Birkkoff-Kchintchin):
Sei $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine stationäre Folge von Zufallsvariablen, erzeugt von der Zufallsvariable

X_0 und einer maßerhaltenden Abbildung $T : \Omega \to \Omega$. Sei J die σ-Algebra der invarianten Mengen von T, d.h. $\mathsf{E}|X_0| < \infty$. Dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathsf{E}(X_0 \mid J).$$

Falls X schwach abhängig im Mittel ist (d.h. T – ergodisch), dann $\mathsf{E}(X_0 \mid J) = \mathsf{E}(X_0)$.

Lemma 6.2.5
Seien $\{X_n\}$, T wie oben. Sei $S_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_0(T^k(\omega))$, $M_k(\omega) = \max\{0, S_1(\omega), \dots, S_k(\omega)\}$. Unter der Bedingung des Theorems 6.2.6 gilt

$$\mathsf{E}(X_0 1(M_n > 0)) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis Für alle $k \leq n$ gilt $\underbrace{S_k(\omega)}_{S_k(T(\omega))} \leq \underbrace{M_n(\omega)}_{M_n(T(\omega))}$. Wir können noch X_0 hinzuaddieren und bekommen

$$X_0(\omega) + M_n(T(\omega)) \geq X_0(\omega) + S_k(T(\omega)) = S_{k+1}(\omega).$$

Für $k = 0$ gilt $X_0(\omega) \geq S_1(\omega) - M_n(T(\omega))$. Dasselbe gilt für $k = 0, \dots, n-1$. Daraus folgt, dass $X_0(\omega) \geq \underbrace{\max\{S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\}}_{=M_n(\omega)} - M_n(T(\omega))$. Da $M_n(\omega) > 0$, dann $M_n = \max\{S_1, \dots, S_n\}$.
Es folgt, dass

$$\mathsf{E}(X_0 1(M_n > 0)) \geq \mathsf{E}((M_n - M_n(T))1(M_n > 0)) \geq \mathsf{E}(M_n - M_n(T\omega)) = 0.$$

$\square$

Beweis des Ergordensatzes Die Aussage $\mathsf{E}(X_0 \mid J) = \mathsf{E}(X_0)$ ist trivial, weil für ergodische T gilt $J = \{\emptyset, \Omega\}$. O.B.d.A. sei $\mathsf{E}(X_0 \mid J) = 0$, sonst betrachte $X_0 = \mathsf{E}(X \mid J)$.
Es ist zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \overset{f.s.}{=} 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. Es genügt zu zeigen, dass

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 0.$$

Zunächst zeigen wir, dass $\overline{S} = \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 0$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathsf{P}(\underbrace{\overline{S} > \varepsilon}_{A_\varepsilon}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Seien $X_0^* = (X_0 - \varepsilon)1_{A_\varepsilon}$, $S_k^* = \sum_{j=0}^{k-1} X_0^*(T^j(\omega))$, $M_k^* = \max\{0, S_1^*, \dots, S_k^*\}$. Aus Lemma 6.2.5 folgt $\mathsf{E}(X_0^* 1(M_n^* > 0)) \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Aber,

$$\{M_n^* > 0\} = \left\{\max_{1\leq k\leq n} S_k^* > 0\right\} \uparrow_{n\to\infty} \left\{\sup_{k\geq 1} S_k^* > 0\right\} = \left\{\sup_{k\geq 1} \frac{S_k^*}{k} > 0\right\} = \left\{\sup_{k\geq 1} \frac{S_k}{k} > \varepsilon\right\} \cap A_\varepsilon = A_\varepsilon,$$

weil $\left\{\sup_{k\geq 1} \frac{S_k}{k} > \varepsilon\right\} \supset \left\{\overline{S} > \varepsilon\right\} = A_\varepsilon$. Nach dem Lebesgue-Satz: $0 \leq \mathsf{E}(X_0^* 1(M_n^* > 0)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{E}(X_0^* 1_{A_\varepsilon})$, weil $\mathsf{E}|X_0^*| \leq \mathsf{E}|X_0| + \varepsilon$. Deshalb $0 \leq \mathsf{E}(X_0^* 1_{A_\varepsilon}) = \mathsf{E}((X_0 - \varepsilon)1_{A_\varepsilon}) = \mathsf{E}(X_0 1_{A_\varepsilon}) - \varepsilon\mathsf{P}(A_\varepsilon) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_0 1_{A_\varepsilon} \mid J)) - \varepsilon\mathsf{P}(A_\varepsilon) = \mathsf{E}(1_{A_\varepsilon} \underbrace{\mathsf{E}(X_0 \mid J)}_{=0}) - \varepsilon\mathsf{P}(A_\varepsilon) = -\varepsilon\mathsf{P}(A_\varepsilon)$ und daraus folgt $\mathsf{P}(A_\varepsilon) \leq 0$ und $\mathsf{P}(A_\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.
Um $0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \underline{S}$ zu zeigen genügt es $-X_0$ statt X_0 zu betrachten, denn $\limsup_{n\to\infty}(-\frac{S_n}{n}) = \liminf_{n\to\infty}(\frac{S_n}{n})$. Da $\mathsf{P}(-\underline{S} \leq 0) = 1$ gilt $\mathsf{P}(\underline{S} \geq 0) = 1$. $\square$

Bemerkung 6.2.6
Die Besonderheit des Ergordensatzes 6.2.6 liegt, im Vergleich zu dem üblichen Gesetz der großen Zahlen, in der Tatsache, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{f.s.} \mathsf{E}(X_0 \mid J)$ zufällig ist.

Beispiel 6.2.4
Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum aus dem Beispiel 6.2.3 a). $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$, $d = 2l \in \mathbb{N}$. $T : \Omega \to \Omega$ sei definiert durch

$$\begin{cases} T(\omega_i) & = & \omega_{i+2} & , & i = 1, \ldots, d-2, \\ T(\omega_{d-1}) & = & \omega_1 & , & \\ T(\omega_d) & = & \omega_2 & . & \end{cases}$$

Seien $A_1 = \{\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2l-1}\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2l}\}$. Da $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum ($\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{d}$, für alle i) folgt, dass $\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Andererseits, $A_1, A_2 \in J$ bzgl. T und deswegen ist T nicht ergodisch. Für eine beliebige Zufallsvariable $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (T^n(\omega)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{2}{d}\sum_{j=0}^{l-1} X_0(\omega_{2j+1}), & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}, \text{ falls } \omega \in A_1, \\ \frac{2}{d}\sum_{j=1}^{l} X_0(\omega_{2j}) \quad , & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}, \text{ falls } \omega \in A_2. \end{cases}$$

Beweis des Theorems 6.2.4 Es ist zu zeigen: Falls $T : \Omega \to \Omega$ ergodisch, dann ist T mischend im Mittel, d.h. für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}(A_1 \cap T^{-k}A_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2).$$

Sei $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1(T^{-k}A_2) \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Thoerem } 6.2.6} \mathsf{P}(A_2)$, weil T ergodisch ist, somit auch die Folge $\left\{1(T^{-k}A_2)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Nach dem Satz von Lebesgue aus $1(A_1)Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1(A_1)\mathsf{P}(A_2)$ folgt

$$\mathsf{E}(1(A_1)Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}(A_1 \cap T^{-k}A_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2).$$

□

Lemma 6.2.6
Falls $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichgradig integrierbare Folge von Zufallsvariablen ist und $p_{n,i} \geq 0$, so dass $\sum_{i=1}^{n} p_{n,i} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch die Folge von Zufallsvariablen $Y_n = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i}\,|X_i|$, $n \in \mathbb{N}$, gleichgradig integrierbar.

Ohne Beweis

Folgerung 6.2.2
Unter den Voraussetzungen des Theorems 6.2.6 gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathsf{E}(X_0 \mid J)$$

bzw.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathsf{E}(X_0)$$

im ergodischen Fall.

Beweis Falls $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ stationär, dann gilt $\sup_n \mathsf{E}(|X_n|1(|X_n|>\varepsilon)) = \mathsf{E}(|X_0|1(|X_0|>\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, weil $\mathsf{E}|X_0| < \infty$. Sei $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i} X_{i-1}$, $p_{n,i} = \frac{1}{n}$, $\tilde{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i}|X_{i-1}|$. Aus dem Lemma 6.2.6 ist auch $\left\{\tilde{S}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ gleichgradig integrierbar und nach dem Lemma 5.3.2 aus $S_k \xrightarrow[k\to\infty]{f.s.} 0$ folgt $\mathsf{E}|S_n| \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}|X_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

6.3 Stationarität im weiteren Sinne

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die stationär im weiteren Sinne ist: $\mathsf{E}|X_n|^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. $\mathsf{E}|X_n| = const$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{cov}(X_n, X_m) = C(n-m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

6.3.1 Korrelationstheorie

Theorem 6.3.1 (Herglotz):
Sei $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine positiv semi-definite Funktion. Dann existiert ein endliches Maß μ auf $(-\pi, \pi)$, so dass

$$C(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\mu(dx), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

μ heißt *Spektralmaß* von C.

Bemerkung 6.3.1
Da die Kovarianzfunktion einer stationären Folge positiv semi-definit ist, gilt die obige Darstellung für eine beliebige Kovarianzfunktion C.

Definition 6.3.1
Eine Familie $\{Q_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen heißt *schwach relativ kompakt*, falls eine beliebige Folge von Maßen $\{Q_{\lambda n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\{Q_{\lambda n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt, die schwach konvergiert.

Definition 6.3.2
Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $Q = \{Q_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ – Borelsche σ-Algebra auf einem metrischen Raum $\mathcal{S}$ heißt *dicht*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum existiert, so dass $K_\varepsilon \in \mathcal{B}$ und $Q_\lambda(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Theorem 6.3.2 (Prokhorov):
Falls die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $Q = \{Q_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ auf dem metrischen messbaren Raum $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ dicht ist, dann ist sie schwach relativ kompakt. Falls $\mathcal{S}$ ein Banachraum ist, dann ist jede schwach relativ kompakte Familie $Q = \{Q_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ von Maßen auch dicht.

Ohne Beweis

Der Satz von Prokhorov wird verwendet um die schwache Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu beweisen, indem man unter anderem ihre Dichtheit prüft. Insbesondere, falls $\mathcal{S}$ kompakt ist, ist jede Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ dicht, denn $K_\varepsilon = \mathcal{S}$ für alle $\varepsilon > 0$.

Beweis des Theorems 6.3.2 „ $\Leftarrow$ “

Falls $C(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\mu(dx)$, $n \in \mathbb{Z}$, dann für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_j \bar{z}_j C(t_i - t_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{i=1}^{n} z_i e^{iz_i x} \right|^2 \mu(dx) \geq 0.$$

Daraus folgt, dass C positiv semi-definit ist.

„ $\Rightarrow$ “

Für alle $N \geq 1$, $x \in [-\pi, \pi]$, definiere die Funktion $g_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,j=1}^{N} C(k-j) e^{-ikx} e^{ijx} \geq 0$, die stetig in x ist, weil C positiv semi-definit ist. Es gilt

$$g_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|<N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) C(n) e^{-inx},$$

weil es $N - |n|$ Paare $(k,j) \in \{1, \ldots, N\}^2$ gibt, so dass $k - j = n$. Definiere Maß μ_N auf $([-\pi, \pi], \mathcal{B}_{[-\pi,\pi]})$ durch $\mu_N(B) = \int g_N(x)dx$, $B \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} Q_N(dx) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} g_N(x)dx = \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) C(n), & |n| < N, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

weil $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein orthogonales System in $L^2[-\pi, \pi]$ ist. Für $n = 0$ gilt $Q_N([-\pi, \pi]) = C(0) < \infty$, deshalb ist $\left\{\frac{Q_N}{C(0)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die dicht ist. Nach dem Theorem 6.3.2 existiert eine Teilfolge $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $Q_N \xrightarrow[k\to\infty]{\omega} \mu$. μ – endliches Maß auf $[-\pi, \pi]$ und daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} g_N(x)dx = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) C(n) = C(n), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

□

Sei $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre im weiten Sinne Folge von Zufallsvariablen. Dann gilt folgende Spektraldarstellung:

$$X_n \stackrel{d}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} Z(dx), \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei Z ein orthogonales Zufallsmaß auf $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ ist. Daher soll sowohl Z als auch $I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)Z(dx)$ für deterministische Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eingeführt werden.

6.3.2 Orthogonale Zufallsmaße

Konstruktionsschema von Z bzw. $I(\cdot)$:

1. Z wird auf einem Simering $\mathcal{K}$ (der Teilmengen von Λ) definiert.

2. Z wird erweitert auf die Algebra A, die von $\mathcal{K}$ erzeugt wird.

3. Definiere das Integral I bzgl. Z für einfache Funktionen auf $\sigma(A)$, wenn das Maß $\mu(\Lambda) < \infty$, μ – gegebenes Maß.

4. Definiere I als $\lim_{n\to\infty} I(f_n)$ für beliebige meßbare Funktionen f, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, f_n einfach, $\mu(\Lambda) < \infty$.

5. Definiere I auf einem σ-endlichem Raum $\Lambda = \cup_n \Lambda_n$, $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \emptyset$, $n \neq m$, als $I(f) = \sum_n I(f \mid \Lambda_n)$, I_n – Integral bzgl. Z auf Λ_n. Dadurch sind Z auf $\{A \in \sigma(A) : \mu(A) < \infty\}$ erweitert als $Z(A) = I(1(A))$.

Schritt 1

Sei $\mathcal{K}$ ein Semiring der Teilmengen von Λ (Λ – beliebiger Raum), d.h. für alle $A, B \in \mathcal{K}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{K}$; falls $A \subset B$, dann existieren $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, so dass $B = A \cup \cup_{i=1}^n A_i$.

Definition 6.3.3 1. Ein komplexwertiges signiertes Zufallsmaß $Z = \{Z(B),\ B \in \mathcal{K}\}$, gegeben auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, heißt orthogonal, wenn

a) alle $Z(B) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $B \in \mathcal{K}$,

b) $A, B \in \mathcal{K}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \langle Z(A), Z(B)\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})} = \mathsf{E}(Z(A), \overline{Z(B)}) = 0$,

c) als Zufallsmaß gilt die σ-Additivität von Z: Falls $B, B_1, \ldots, B_n, \ldots \in \mathcal{K}$, $B = \cup_n B_n$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $Z(B) \overset{f.s.}{=} \sum_n Z(B_n)$, wobei die Konvergenz dieser Reihe im $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$-Sinne zu verstehen ist.

2. Die Größe $\mu = \{\mu(B),\ B \in \mathcal{K}\}$ definiert durch $\mu(B) = \mathsf{E}|Z(B)|^2 = \langle Z(B), Z(B)\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})}$, $B \in \mathcal{K}$, heißt Strukturmaß von Z. Es ist leicht zu sehen, dass μ tatsächlich ein Maß auf $\mathcal{K}$ ist. Falls $\Lambda \in \mathcal{K}$, dann ist μ endlich, ansonsten σ-endlich, $\Lambda = \cup_n \Lambda_n$, $\Lambda_n \in \mathcal{K}$, $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \emptyset$, so dass $\mu(\Lambda_n) < \infty$.

3. Das orthogonale Zufallsmaß Z heißt *zentriert*, falls $\mathsf{E}Z(B) = 0$, $B \in \mathcal{K}$.

Beispiel 6.3.1
Sei $\Lambda = [0, \infty)$, $\mathcal{K} = \{[a, b),\ 0 \leq a < b < \infty\}$, $Z([a, b)) = W(b) - W(a)$, $0 \leq a < b < \infty$, wobei $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ der Wiener-Prozess ist. Z ist ein orthogonales Zufallsmaß auf $\mathcal{K}$, weil W unabhängige Zuwächse hat. Analog kann diese Definition auf einem beliebigen quadratisch integrierbaren stochastischen Prozess X mit unabhängigen Zuwächsen an Stelle von W übertragen werden.

Schritt 2

Theorem 6.3.3
Sei μ ein σ-endliches Maß auf der Algebra A, die von $\mathcal{K}$ erzeugt wird (nach dem Theorem von Caratheodon wird μ eindeutig auf $\sigma(A)$ fortgesetzt). Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ und ein zentriertes orthogonales Zufallsmaß Z auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, definiert auf $\{B \in A : \mu(B) < \infty\}$, mit Strukturmaß (oder Kontrollmaß) μ.

Ohne Beweis

Zur Definition von Z auf A: für $B \in A$, $B = \cup_{i=1}^n B_i$, $B_i \in \mathcal{K}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, wird $Z(B) = \sum_{i=1}^n Z(B_i)$ gesetzt.

6.3.3 Integral bezüglich eines orthogonalen Zufallsmaßes

Schritt 3

Sei $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ eine einfache Funktion, d.h. $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i 1(x \in B_i)$, für $c_i \in \mathbb{C}$ und $B_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, \ldots, n$, so dass $\cup_{i=1}^n B_i = \Lambda$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, und $(\Lambda, \mathcal{E}, \mu)$ ein meßbarer Raum mit $\mu(\Lambda) < \infty$.

Definition 6.3.4
Das Integral von f bezüglich eines orthogonalen Zufallsmaßes Z definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ist gegeben durch $I(f) := \int_\Lambda f(x) Z(dx) = \sum_{i=1}^n c_i Z(B_i)$.

Aufgabe 6.3.1
Zeigen Sie, dass die Definition korrekt ist, d.h. $I(f)$ hängt nicht von der Darstellung von f als einfache Funktion ab.

Lemma 6.3.1 (Eigenschaften von I):
Sei $I(\cdot)$ das Integral bzgl. des orthogonalen Zufallsmaßes, definiert auf einer einfachen Funktion $\Lambda \to \mathbb{C}$ wie oben. Es gelten folgende Eigenschaften:

1. *Isometrie*: $\langle I(t), I(g) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)}$, wobei f und g einfache Funktionen $\Lambda \to \mathbb{C}$ sind, $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Lambda f(x) \overline{g(x)} \Lambda(dx)$.
2. *Linearität*: Für jede einfache Funktion $f, g : \Lambda \to \mathbb{C}$ gilt $I(f+g) \overset{f.s.}{=} I(f) + I(g)$.

Aufgabe 6.3.2
Beweisen Sie es.

Schritt 4
Sei nun $f \in L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$. Dann existiert eine Folge von einfachen Funktionen $f_n : \Lambda \to \mathbb{C}$, so dass $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Lambda)} f$ (einfache Funktion ist dicht im $L^2(\Lambda)$). Dann definiere $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$, wobei dieser Grenzwert in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$-Sinne zu verstehen ist. Man kann zeigen, dass die Definition von $I(f)$ unabhängig von der Wahl der Folge $\{f_n\}$ ist.

Lemma 6.3.2
Die Aussagen des Lemmas 6.3.1 gelten im allgemeinen Fall.

Beweis Benutze die Stetigkeit $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Bemerkung 6.3.2
Falls Z zentriert ist, dann gilt $\mathsf{E} I(f) = 0$ für beliebige Funktionen $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{E}, \mu)$.

Schritt 5
Sei nun Λ σ-endlich, d.h. $\Lambda = \cup_n \Lambda_n$, $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \emptyset$, $n \neq m$. Dann für alle $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{E}, \mu)$ gilt $f = \sum_n f|_{\Lambda_n}$. Auf $L^2(\Lambda_n, \mathcal{E} \cap \Lambda_n, \mu)$ wird das Integral I_n bzgl. Z wie im 1)-4) definiert. Dann setze $I(f) := \sum_n I_n(f|_{\Lambda_n})$.

Theorem 6.3.4
Die Abbildung $g : L^2(\Lambda, \mathcal{E}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ist eine Isometrie. Insbesondere kann dadurch das Zufallsmaß Z auf $\{B \in \varepsilon : \mu(B) < \mathcal{E}\}$ fortgesetzt werden als $Z(B) := I(1_B)$, $B \in \mathcal{E} : \mu(B) < \infty$.

6.3.4 Spektraldarstellung

Sei $X = \{X(t),\ t \in T\}$ ein beliebiger komplexwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, T – eine beliebige Indexmenge, $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$, $\mathsf{E}X(t) = 0$, $t \in T$ (o.B.d.A., sonst betrachte $\tilde{X}(t) = X(t) - \mathsf{E}X(t)$), $t \in T$, mit $C(s,t) = \mathsf{E}(X(s), \overline{X(t)})$, $s, t \in T$).

Theorem 6.3.5 (Karhunen):
X hat die Spektraldarstellung $X(t) = \int_\Lambda f(t,x)Z(dx)$, $t \in T$ (d.h., es existiert ein zentriertes orthogonales Zufallsmaß auf $\{B \in \mathcal{E} : \mu(B) < \infty\}$, wobei $L^2(\Lambda, \mathcal{E}, \mu)$ ein wie oben definierter Raum ist), genau dann, wenn es ein System der Funktionen $f(t,\cdot) \in L^2(\Lambda, \mathcal{E}, \mu)$, $t \in T$, existiert, so dass $C(s,t) = \int_\Lambda f(s,x)f(t,x)\mu(dx)$, $s,t \in T$, und dieses System F vollständig in $L^2(\Lambda, \mathcal{E}, \mu)$ ist (d.h. $\langle f(t,\cdot), \psi\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$, $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, für alle $t \in T$ und $\psi \equiv 0$, μ fast überall).

Ohne Beweis

Theorem 6.3.6
Sei $\{X_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ eine zentrierte komplexwertige stationäre im weiten Sinne Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Dann existiert ein orthogonales zentriertes Zufallsmaß auf $([-\pi,\pi], \mathcal{B}([-\pi,\pi]))$ (definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$), so dass $X_n \overset{f.s.}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} Z(dx)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis Sei $F = \{e^{inx},\ x \in [-\pi,\pi],\ n \in \mathbb{Z}\}$. Dieses System ist vollständig auf $L^2([-\pi,\pi])$ (vgl. die Theorie der Fourier-Reihen). Aus dem Theorem von Herglotz folgt, dass

$$C(n,m) = \mathsf{E}(X_n \overline{X}_m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{imx} \mu(dx),$$

wobei μ das Spektralmaß von X ist, also ein endliches Maß auf $([-\pi,\pi], \mathcal{B}([-\pi,\pi]))$. Nach dem Theorem 6.3.5 existiert ein orthogonales Zufallsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, so dass $X_n \overset{f.s.}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} Z(dx)$, $n \in \mathbb{Z}$. □

Theorem 6.3.7 (Ergodensatz für stationäre (im weiten Sinne) Folgen von Zufallsvariablen):
Unter den Voraussetzungen des Theorems 6.3.6 gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(\{0\}).$$

Insbesondere wenn X nicht zentriert ist, d.h. $\mathsf{E}X_n = a$, $n \in \mathbb{Z}$, dann konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} a$ dann, wenn $\underbrace{\mathsf{E}|Z(\{0\})|^2}_{\mu(\{0\})} = 0$, also Z und somit μ hat kein Atom im Null.

Beweis $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \int \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}}_{\psi_n(x)} Z(dx)$. $\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. $S_n - Z(\{0\}) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(\psi_n(x) - 1(x=0))}_{\varphi_n(x)} Z(dx) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) Z(dx)$. $\|S_n - Z(\{0\})\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\varphi_n(x)\|^2_{L^2([-\pi,\pi],\mu)} = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2 \mu(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ nach dem Theorem von Lebesgue, weil $|\varphi_n(x)| \leq \frac{2}{n|1-e^{ix}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$. □

6.4 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 6.4.1
Sei $Z_1, Z_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i$ fast sicher konvergiert.

Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine monoton wachsende Folge positiver (deterministischer) Zahlen mit $a_n \to \infty$, $n \to \infty$. Zeige, dass

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} a_k Z_k \stackrel{f.s.}{\to} 0, \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 6.4.2
Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ und $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Abbildung. Zeige, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(T^k(\omega)) = \infty \quad f.s.$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ mit $X(w) > 0$.

Aufgabe 6.4.3
Sei X eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ und $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Abbildung. Zeige, dass $\mathsf{E}X = \mathsf{E}(X \circ T)$, d. h.

$$\int_\Omega X(T(\omega))\mathsf{P}(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)\mathsf{P}(d\omega).$$

(Hinweis: algebraische Induktion)

Aufgabe 6.4.4
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$ und P das Lebesguemaß ist. Sei $\lambda \in (0,1)$.

(a) Zeige, dass $T(x) = (x + \lambda) \bmod 1$ eine maßerhaltende Abbildung ist, wobei $a \bmod m = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor m$ für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{Z}$ und $\lfloor\rfloor$ die Gaußklammer bezeichnet.

(b) Zeige, dass $T(x) = \lambda x$ und $T(x) = x^2$ keine maßerhaltende Abbildungen sind.

Literaturverzeichnis

[1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] A. A. Borovkov. *Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einfürung.* Birkhäuser, Basel, 1976.

[3] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I/II.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1970/71.

[4] P. Gänssler and W. Stute. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, Berlin, 1977.

[5] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and random processes.* Oxford University Press, New York, 2001.

[6] C. Hesse. *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

[7] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability.* Springer, New York, 2002.

[8] J. F. C. Kingman. *Poisson processes.* Oxford University Press, New York, 1993.

[9] N. Krylov. *Introduction to the theory of random processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[10] S. Resnick. *Adventures in stochastic processes.* Birkhäuser, Boston, MA, 1992.

[11] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes.* Chapman & Hall, New York, 1994.

[12] K.-I. Sato. *Lévy Processes and Infinite Divisibility.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[13] A. N. Shiryaev. *Probability.* Springer, New York, 1996.

[14] A. V. Skorokhod. *Basic principles and applications of probability theory.* Springer, Berlin, 2005.

[15] J. Stoyanov. *Counterexamples in probability.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.

[16] A. D. Wentzel. *Theorie zufälliger Prozesse.* Birkhäuser, Basel, 1979.