Thesen zur Dissertation

Selected topics in the theory of spatial stationary flat processes

vorgelegt von Dipl. Math. Evgueni Spodarev

1 Einführung

Es sei Φ_k^d ein stationärer Prozess von k–Ebenen in $\mathbb{R}^d$, also eine zufällige höchstens abzählbare Ansammlung von k–dimensionalen Ebenen in $\mathbb{R}^d$. Ferner wird die Stationarität von Φ_k^d vorausgesetzt, also die Invarianz des Verteilungsgesetzes des Prozesses gegenüber Verschiebungen in $\mathbb{R}^d$. Die wichtigsten Charakteristiken von Φ_k^d sind seine *Intensität* λ, *Richtungsverteilung* θ und *Schnittzahlrose* $(T_{kr}\theta)(\eta)$ mit r–Ebenen η, $k+r \geqslant d$. So nennt man den mittleren Volumeninhalt der k–Ebenen des Prozesses in einem Einheitsbeobachtungsfenster, das Verteilungsgesetz der Richtung der "typischen" k–Ebene aus Φ_k^d, und die Intensität des Schnittprozesses $\Phi_k^d \cap \eta$ der $(k+r-d)$–Ebenen in η. Folglich ist λ eine nicht negative Zahl, $\theta(\cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge aller Richtungen der k–Ebenen $G(k,d)$ und $(T_{kr}\theta)(\eta)$ eine Funktion der r–Testebene η. Hier ist $G(k,d)$ die sogenannte *Graßmannsche Mannigfaltigkeit*, d.h. die Menge aller k–Ebenen aus $\mathbb{R}^d$ durch den Ursprung. Die folgende Integraldarstellung der Schnittzahlrose ist wohlbekannt: für $\eta \in G(r,d)$ gilt

$$(T_{kr}\theta)(\eta) = \lambda \int\limits_{G(k,d)} [\xi,\eta]\,\theta(d\xi).$$

Hierbei bezeichnet $[\xi,\eta]$ das Volumen des Parallelepipeds, das von orthonormalen Basen in $\xi^\perp$ und $\eta^\perp$ aufgespannt wird. Um die größere Übersichtlichkeit der Formeln zu erreichen, wird manchmal λ gleich eins gesetzt.

2 Inverse Probleme für die Schnittzahlrosen

In der Arbeit werden die Eigenschaften der Schnittzahlrose von Φ_k^d untersucht. Es werden Formeln gefunden, die für festes λ die Richtungsverteilung

θ aus $T_{kr}\theta$ berechnen. Nicht für alle Dimensionen k und r ist dieses Umkehrungsverfahren eindeutig (Goodey, Howard). Die sogenannte *verallgemeinerte Kosinustransformation* T_{kr} auf Wahrscheinlichkeitsmaßen ist nämlich dann und nur dann injektiv, wenn $k = d-1$, r beliebig oder $k = 1$, $r = d-1$. Für Dimensionen $d = 2$, $k = r = 1$ und $d = 3$, $k = 1$, $r = 2$ sind die Umkehrformeln längst bekannt (Mecke, Nagel). In der Dissertation werden für beliebiges d alle anderen Eindeutigkeitsfälle untersucht. Auch der Fall $d = 4$, $k = r = 2$ wird betrachtet, wo die eindeutige Wiedergewinnung von θ aus $T_{kr}\theta$ nicht möglich ist. Die meisten Formeln werden in der Integralform gegeben; außerdem werden für einige Fälle (d beliebig, $k = d-1$, $r = 1$ und $r = d-1$; $d = 4$, $k = r = 2$) auch Reihenentwicklungen in Kugelfunktionen auf der Sphäre $\mathbf{S}^{d-1}$ (bzw. auf dem Produkt der Sphären $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$) benutzt.

In den Beweisen werden die Umkehrformeln für die sphärischen Radon – Transformationen und die Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen benutzt.

Um die Umkehrung von T_{kr} zu ermöglichen, werden die Integralformeln vom *Cauchy – Kubota – Typ* bewiesen, die aus der Schnittzahlrose T_{ki} von Φ_k^d mit i–Testebenen die Schnittzahlrose T_{kj} desselben Prozesses mit j-Testebenen, $i < j$ durch die entsprechende Integration ergeben.

3 Variationsprobleme für die Schnittintensität

Ferner wird der Zusammenhang zwischen der Schnittzahlrose und den sogenannten *Variationsproblemen für Ebenenprozesse* betrachtet. Bei den Schnitten von jeweils zwei k–Ebenen von Φ_k^d in allgemeiner Lage ergibt sich ein neuer $(2k-d)$–Ebenenprozess $X_2(\Phi_k^d)$. Dessen Intensität $\lambda_{X_2(\Phi_k^d)}$ heißt die *Schnittintensität von Φ_k^d zweiter Ordnung*. Nun sei λ fest. Es wird nach solchen Richtungsmaßen θ gefragt, bei denen $\lambda_{X_2(\Phi_k^d)}$ maximal ist.

Für die Hyperebenenprozesse ist die Lösung schon längst bekannt: es ist das einzige rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf $G(d-1,d)$, die *isotrope Verteilung* (Davidson, Janson & Kallenberg, Thomas). Für $k < d-1$ ist das Problem teilweise noch offen, und in den gelösten Fällen kennt man die gesamten Klassen der maximalen Richtungsmaße θ (Mecke, Thomas).

Hier werden notwendige Bedingungen für ein Maximum angegeben. Dabei stellt es sich heraus, dass die Schnittzahlrose des "maximalen" Prozesses Φ_k^d fast sicher konstant sein muss. Hierbei werden Methoden der Variationsrechnung auf dem Raum der signierten Maße benutzt (Molchanov, Zuev). Der Zusammenhang mit den klassischen isoperimetrischen Problemen für zentralsymmetrische konvexe Körper wird diskutiert.

4 Nachbarschaftsrosen

Für k, r mit $k+r < d$ schneiden sich eine k–Ebene und eine r–Ebene in $\mathbb{R}^d$ in allgemeiner Lage nicht. Deshalb wird bei der Einführung der Schnittzahlrose die Forderung $k + r \geqslant d$ gestellt. Wir sind in der Lage, ein Analogon der Schnittzahlrose für den Fall $k + r < d$ zu definieren.

Es sei η eine r–dimensionale Testebene in $\mathbb{R}^d$. Für jede k–Ebene ξ aus Φ_k^d mit dem Abstand von η nicht größer als eins wird in ξ der Punkt markiert, der den Abstand zwischen ξ und η realisiert. Die Menge aller solchen Punkte in $\mathbb{R}^d$ ist ein Punktprozess, dessen Intensität Wert der *Nachbarschaftsrose von* Φ_k^d *für* η genannt und mit $N_{kr}(\eta)$ bezeichnet wird. Weiter werden die Eigenschaften der Nachbarschaftsrosen N_{kr} und deren Zusammenhang mit den Schnittzahlrosen der *dualen Prozesse* untersucht.

5 Charakteristische Eigenschaften der Schnittzahlrosen

Es sei f eine Funktion auf $G(1, d)$. Ambartzumian und Matheron haben die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gefunden, dass f die Schnittzahlrose eines Hyperebenenprozesses Φ_{d-1}^d mit Geraden ist. Hier werden weitere ähnlichen Kriterien bewiesen. Die Beweise lassen sich auf die Charakterisierungssätze für Zonoide zurückführen (Goodey, Weil).

6 Hauptergebnisse

Im folgenden werden nur ausgewählte Hauptresultate erwähnt. Mit $\sigma(\cdot)$ bezeichnen wir jeweils das einzige rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem entsprechenden Integrationsraum.

Satz 1 (Umkehrformel für die Schnittzahlrose).
Es sei Φ_{d-1}^d *ein stationärer Hyperebenenprozess mit Intensität* $\lambda = 1$, *Richtungsverteilung* θ *und Schnittzahlrose mit* r*–Ebenen* $T_{d-1,r}\theta$, $1 < r \leqslant d-1$, $d \geqslant 3$. *Es werde die Funktion* $l(v)$, $v \in \mathbf{S}^{d-1}$ *durch die Formel*

$$l(v) = \frac{2^{r+1}k_{r-1}}{\omega_r (r-2)!} \times$$
$$\times \left(\frac{d}{d(x^2)}\right)^{r-1} \left[\int_0^x y^{r-1}(x^2 - y^2)^{\frac{r-3}{2}} \int_{d(\mathbf{S}_\eta^{r-1}, v) = \arccos y} (T_{d-1,r}\theta)(\eta)\, \sigma(d\eta)\, dy \right] \Bigg|_{x=1}$$

definiert, wobei $d(\cdot,\cdot)$ *den geodätischen Abstand auf* $\mathbf{S}^{d-1}$, $\mathbf{S}_\eta^{r-1}$ *die Untersphäre* $\mathbf{S}^{d-1} \cap \eta$, *und* ω_i (k_i) *die Oberfläche (bzw. das Volumen) der Einheitskugel in* $\mathbb{R}^i$ *bezeichnen. Ist* g *eine beliebige gerade* m*–mal differenzierbare*

Funktion auf $\mathbf{S}^{d-1}$ für $m \geqslant (d+5)/2$, so gilt

$$\int\limits_{\mathbf{S}^{d-1}} g(v)\,\theta^{\perp}(dv) = \frac{(-1)^{d-2}2^{d-4}}{(d-3)!\,\omega_{d-1}^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbf{S}^{d-1}} l(u)(\triangle_0+d-1)\left(\frac{d}{d(\mu^2)}\right)^{d-2}\left[\int\limits_{<u,v>^2>\mu^2}\frac{g(v)\;|<u,v>|\;\omega_d(dv)}{(<u,v>^2-\mu^2)^{2-\frac{d}{2}}}\right]\Bigg|_{\mu=0}\omega_d(du),$$

wobei $\triangle_0$ der Beltrami – Laplace Operator ist, und mit $\theta^{\perp}$ das Maß $\theta^{\perp}(dv) = \theta(dv^{\perp})$ auf $\mathbf{S}^{d-1}$ bezeichnet wird.

Die *Radon – Transformation* R_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant d-1$ auf $L^1(G(i,d))$ wird durch die Gleichung

$$(R_{ij}f)(\xi) = \int\limits_{\eta\in G(i,d):\,\eta\subset\xi} f(\eta)\,\sigma(d\eta)$$

bestimmt. Für $\alpha > 0$, $i+j \geqslant d$ sei T_{ij}^{α} ein Operator auf dem Raum $\tilde{\mathbf{M}}(G(i,d))$ der signierten Maße auf $G(i,d)$, der durch die Gleichung

$$\left(T_{ij}^{\alpha}\theta\right)(\xi) = \int\limits_{G(i,d)} [\xi,\eta]^{\alpha}\,\theta(d\eta)$$

definiert ist. Falls $\alpha = 1$, ist $T_{ij}^{1}\theta$ die gewöhnliche Schnittzahlrose $T_{ij}\theta$.

Satz 2 (Die Formel vom Cauchy – Kubota – Typ).
Für alle $\alpha > 0$ und Dimensionen i, j, k mit $i+k \geqslant d$, $i<j$ gilt

$$R_{ij}T_{ki}^{\alpha} = c(\alpha)T_{kj}^{\alpha}$$

auf $\tilde{\mathbf{M}}(G(i,d))$, wobei

$$c(\alpha) = \prod_{l=0}^{d-k-1}\frac{\Gamma\left(\frac{j-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i-l+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j-l+\alpha}{2}\right)}.$$

Satz 3 (Notwendige Bedingungen für ein Maximum).
Es sei θ_0 die Richtungsverteilung von Φ_k^d mit Intensität $\lambda = 1$, die die Schnittintensität zweiter Ordnung $\lambda_{X_2(\Phi_k^d)}$ maximisiert. Ist c_{max} der maximale Wert von $\lambda_{X_2(\Phi_k^d)}$, so gilt für die Schnittzahlrose $T_{kk}\theta_0$:

(i) $(T_{kk}\theta_0)(\eta) = 2c_{max}$ *θ_0–f.s.;*

(ii) $(T_{kk}\theta_0)(\eta) \leqslant 2c_{max}$ *für alle $\eta \in G(k,d)$.*

Satz 4 (Eigenschaften der Nachbarschaftsrosen).
Ist N_{kr} die Nachbarschaftsrose von Φ_k^d für $k+r<d$, so gilt

$$N_{kr}(\eta) = k_{d-k-r}\left(T_{d-k,d-r}\theta^{\perp}\right)(\eta^{\perp}), \quad \eta \in G(r,d),$$

wobei $T_{d-k,d-r}\theta^{\perp}$ die Schnittzahlrose der dualen $(d-k)$–Ebenenprozesse Φ_{d-k}^d (d.h. mit Intensität λ und Richtungsverteilung $\theta^{\perp}$) mit $(d-r)$–Ebenen ist.