
Geometrie und Zufall

Evgueni Spodarev



Inhalt

- Was ist Zufall?
- Was ist stochastische Geometrie?
- Geometrische Wahrscheinlichkeiten
 - Buffonsches Nadelproblem
 - Paradoxon von Bertrand
- Zufällige geometrische Objekte
- Geometrie, Zufall und Alltag

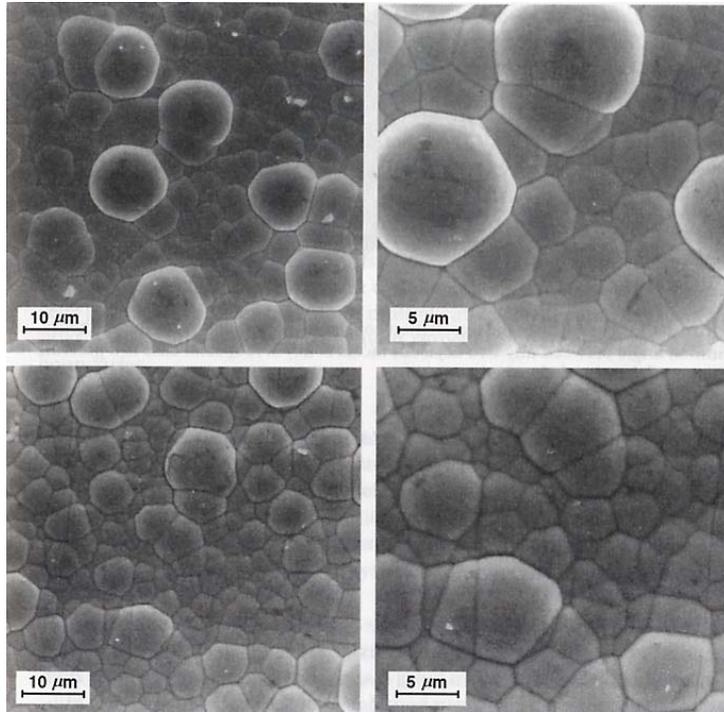
Was ist Zufall?

- Gibt es tatsächlich Zufälle im Leben?

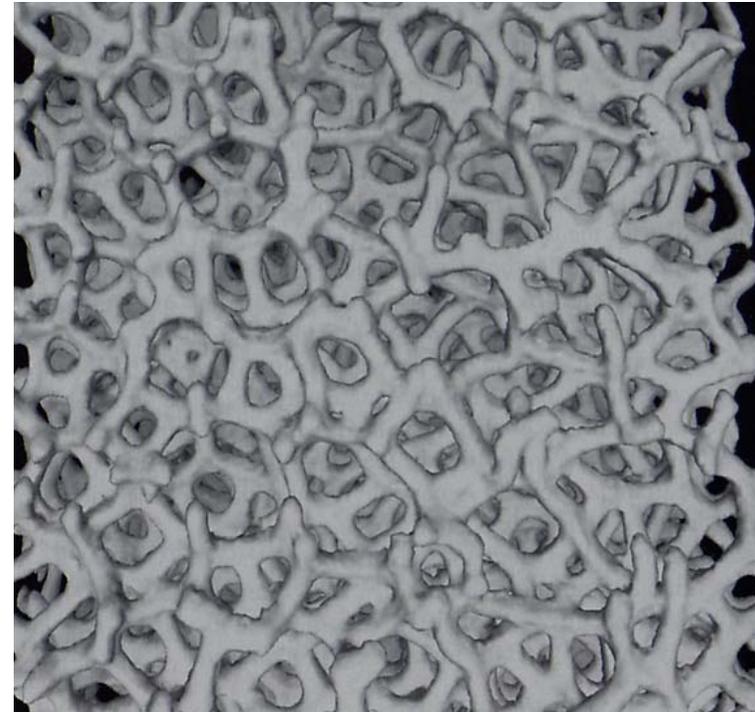


A. T. Fomenko (1985) "Random processes in probability"

Was ist stochastische Geometrie?



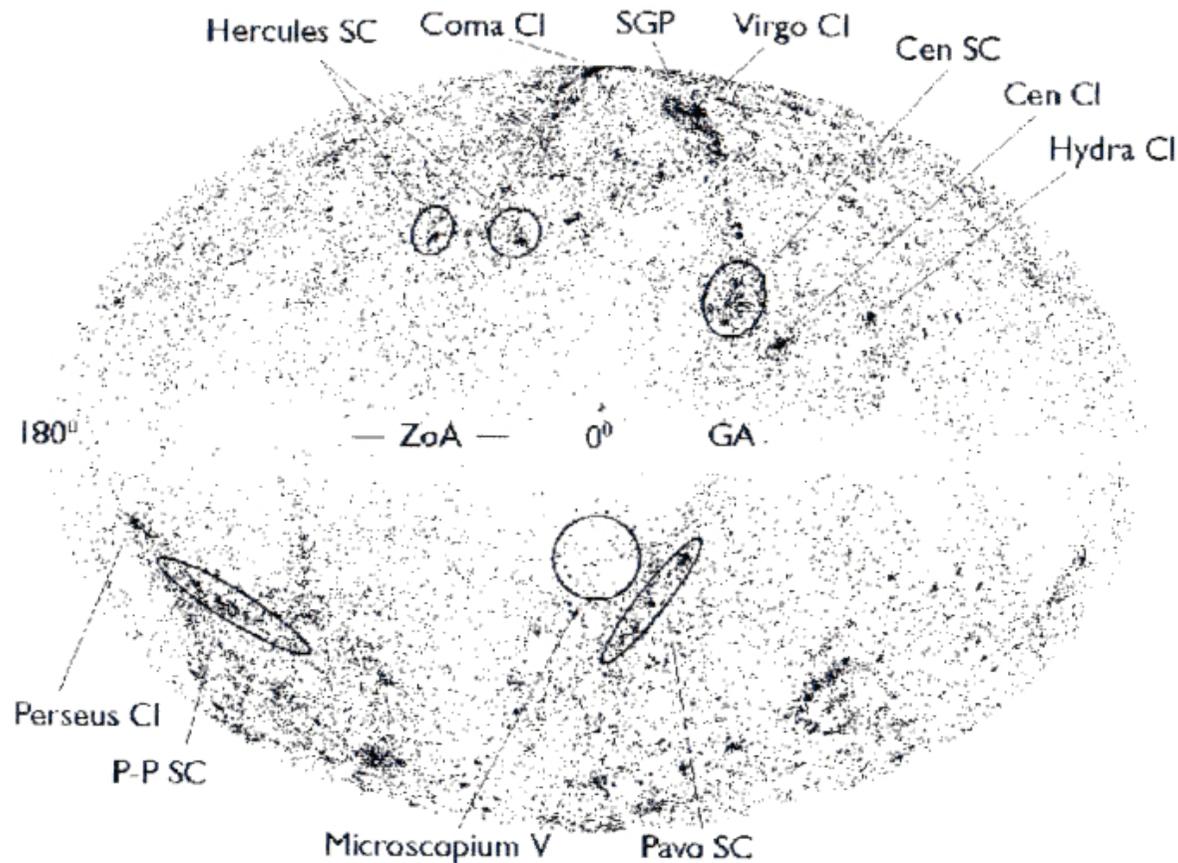
Zink–Nickel–Schicht auf Stahl



Nickel–Schaum

Ein **Teilgebiet der modernen Mathematik**, das sich mit zufälligen geometrischen Objekten im Euklidischen Raum beschäftigt.

Was ist stochastische Geometrie?



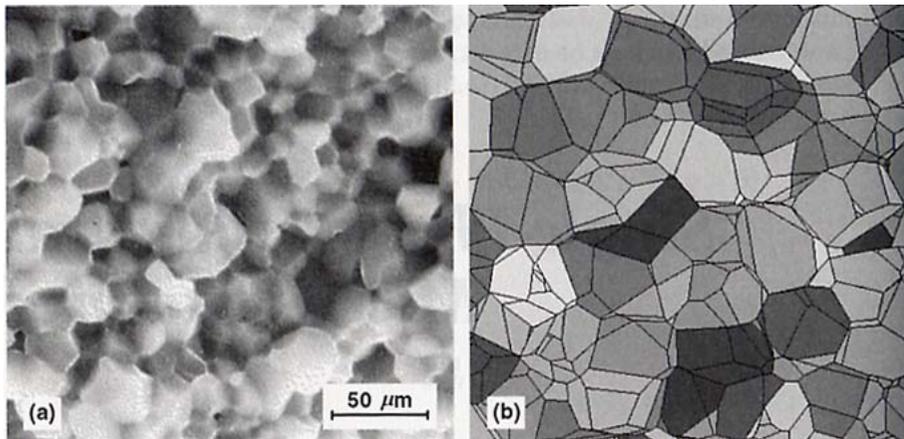
Verteilung der Galaxien im Raum (Hammer–Aitoff Projektion)

Typische Problemstellungen

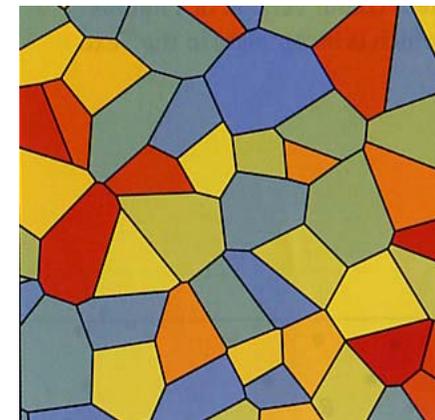
- Stochastische Modellierung und Simulation der geometrischen Objekte
- Statistische Auswertung der Charakteristiken:
Größe und Form der Partikel, Volumenanteil, Oberfläche, Porosität, Ausrichtung, usw.
- Bildverarbeitung
- Bildrekonstruktion

Typische Problemstellungen

● Modellierung von Material-Strukturen



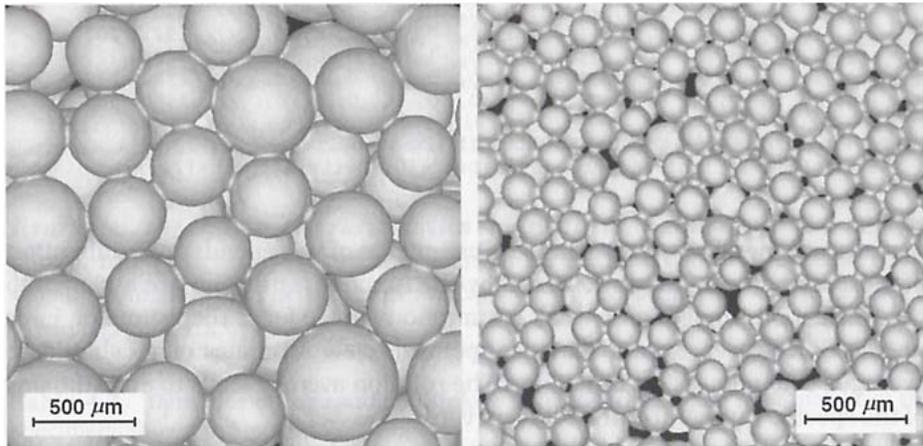
Modellierung von Al_2O_3 durch
Voronoi-Mosaik



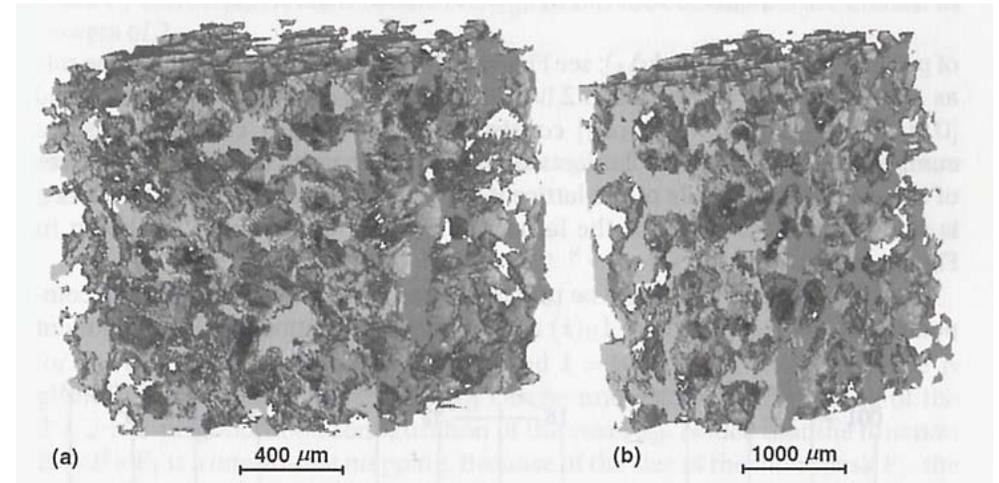
Simuliertes 2D-Voronoi-Mosaik

Typische Problemstellungen

- Schätzung der Bildcharakteristiken



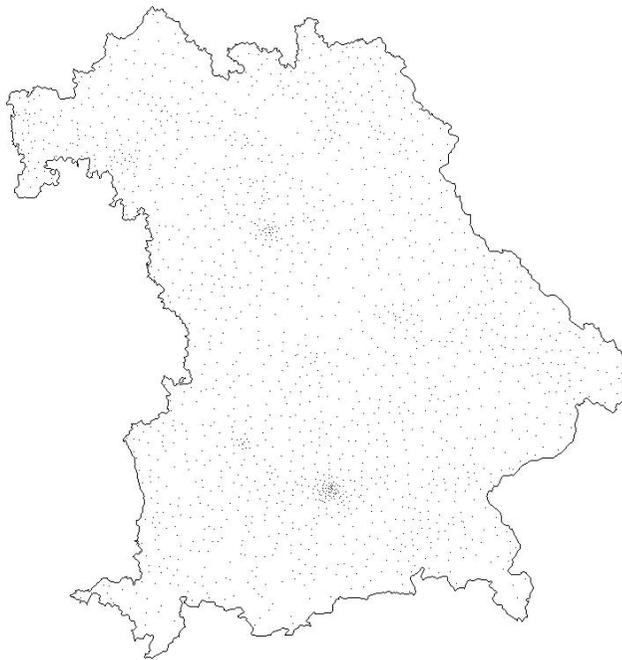
Mikroskopische Struktur von Kupfer-Pulver: Partikelform und -größe



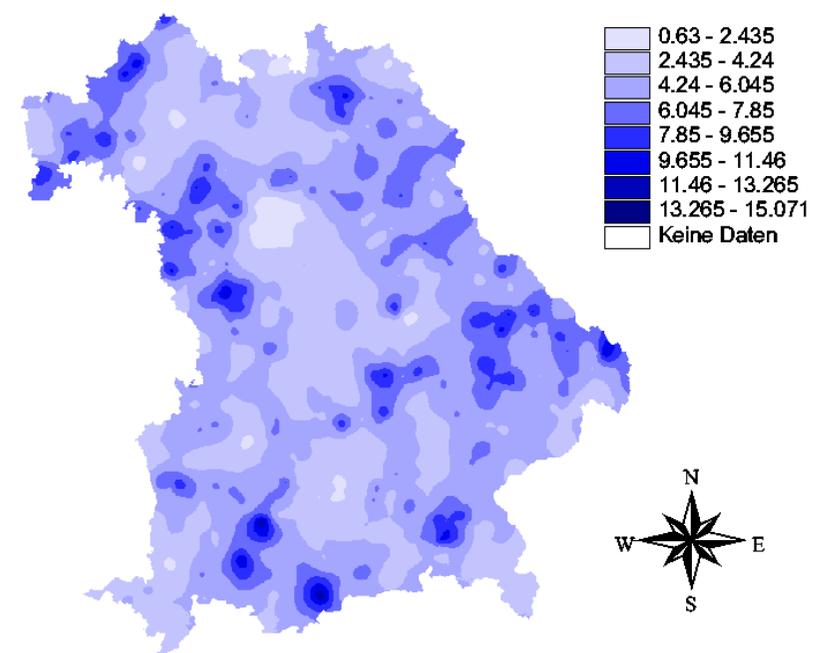
Poröse Struktur von Sandstein – Perkolationsfragen

Typische Problemstellungen

- Bildrekonstruktion: Kfz-Versicherung (VK Bayern)



Meßstellen: Zentren von
PLZ-Gebieten in Bayern



Flächige Darstellung von
Stornozahlen 1998

Geometrische Wahrscheinlichkeiten

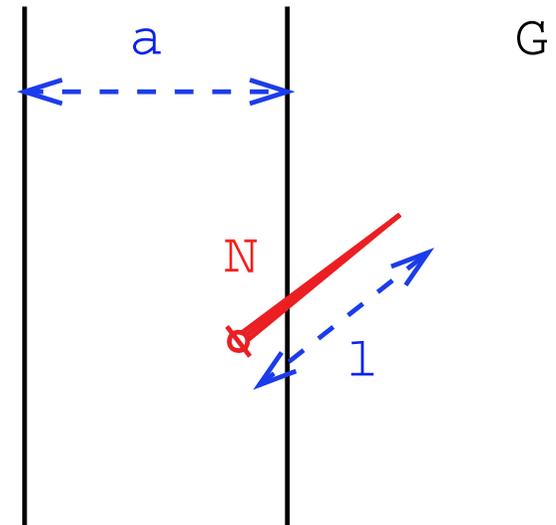
- Buffonsches Nadelproblem (1733)



Georges Louis Leclerc, comte de Buffon

(1707–1788)

- Geradengitter G mit dem Gitterabstand a
- Die Nadel N der Länge l , $l < a$, wird **zufällig** auf G geworfen
- $P(N \cap G \neq \emptyset) = \frac{2l}{a\pi}$
- Was bedeutet „**zufällig**“?



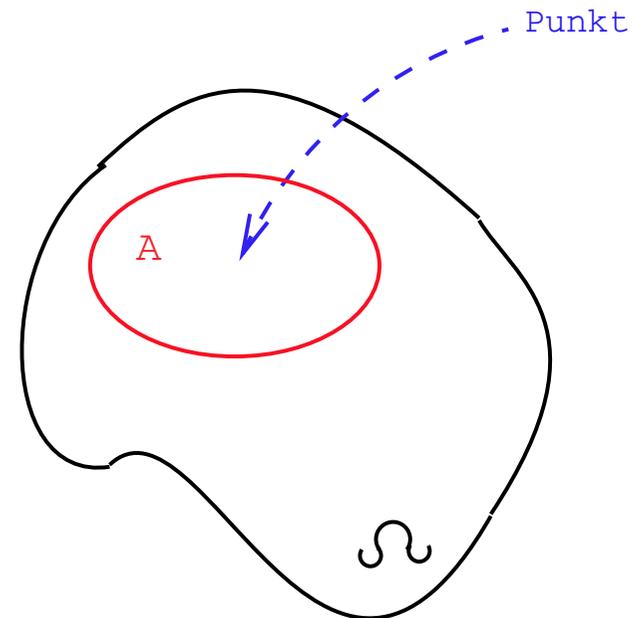
Geometrische Wahrscheinlichkeiten

● Klassischer Ansatz

- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – Menge der Elementarereignisse
- $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = |A|/n$ für eine Untermenge $A \subset \Omega$

● Geometrischer Ansatz

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – eine planare Menge mit endlicher Fläche $Fl(\Omega)$
- $P(A) = \frac{Fl(A)}{Fl(\Omega)}$ für eine Untermenge $A \subset \Omega$

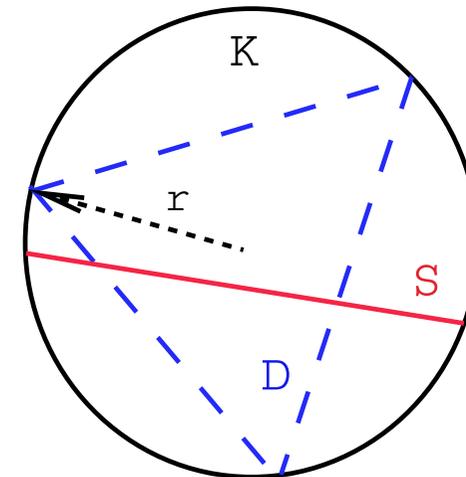


Geometrische Wahrscheinlichkeiten

- Paradoxon von J. Bertrand
 - Auf gut Glück wird in einem Kreis K vom Radius r eine Sehne S gezogen
 - D das einbeschriebene gleichseitige Dreieck
 - $|S|$ die Länge der Sehne
 - $a_D = \sqrt{3}r$ die Länge der Seite von D
 - $P(|S| > a_D) = ?$

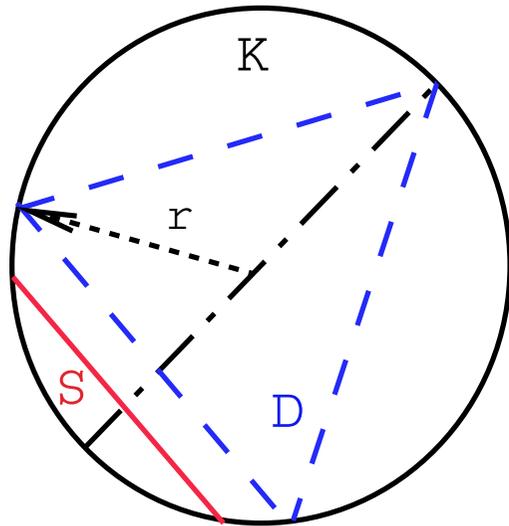


Joseph Louis Francois Bertrand (1822–1900)

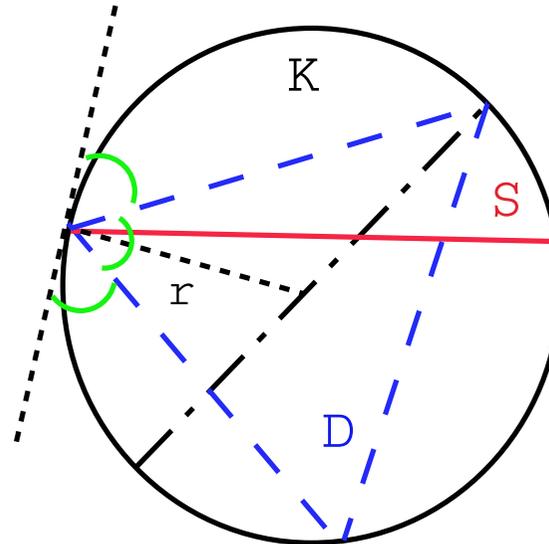


Geometrische Wahrscheinlichkeiten

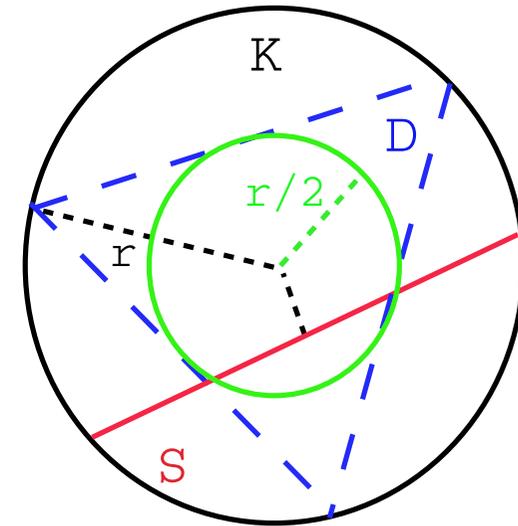
- 3 Lösungsansätze \Leftarrow 3 Definitionen des Zufalls



$$P(|S| > a_D) = 1/2$$



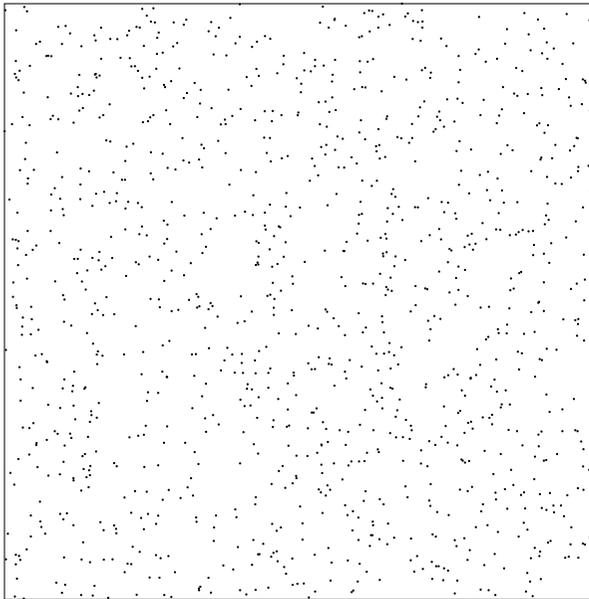
$$P(|S| > a_D) = 1/3$$



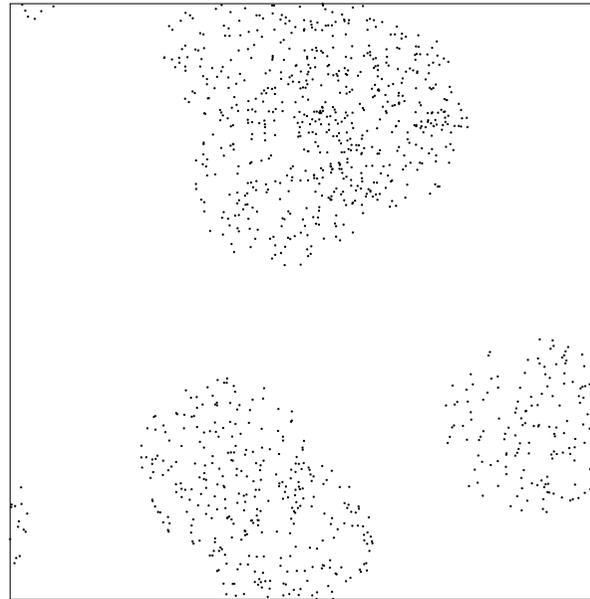
$$P(|S| > a_D) = 1/4$$

Zufällige geometrische Objekte

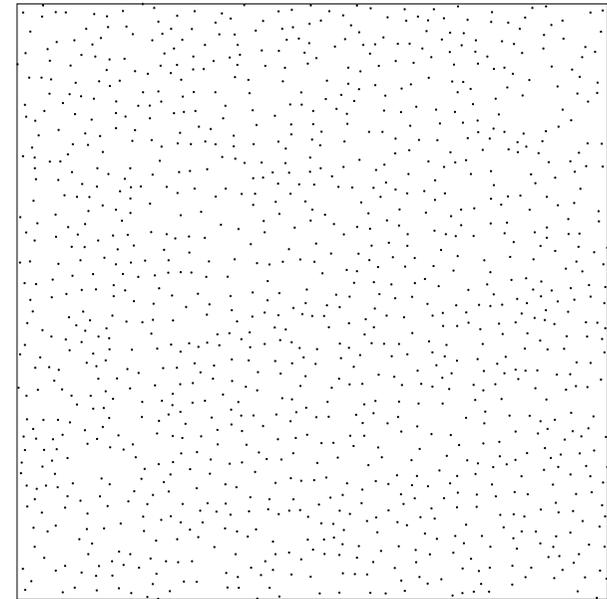
● Planare Punktprozesse



Poisson-Prozess



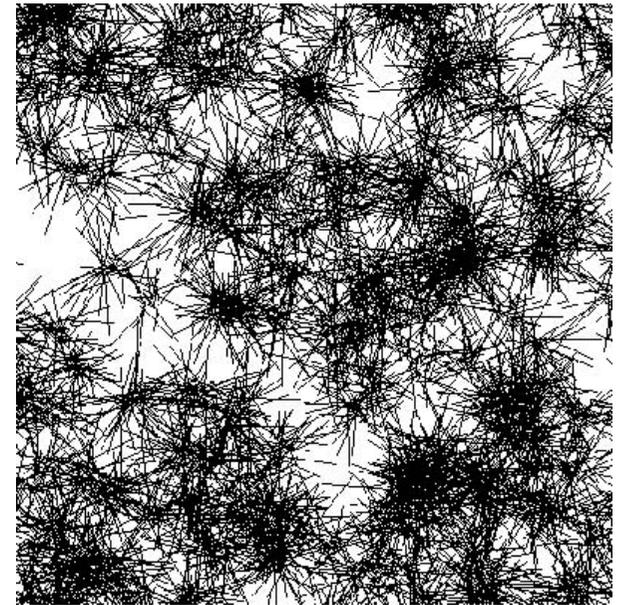
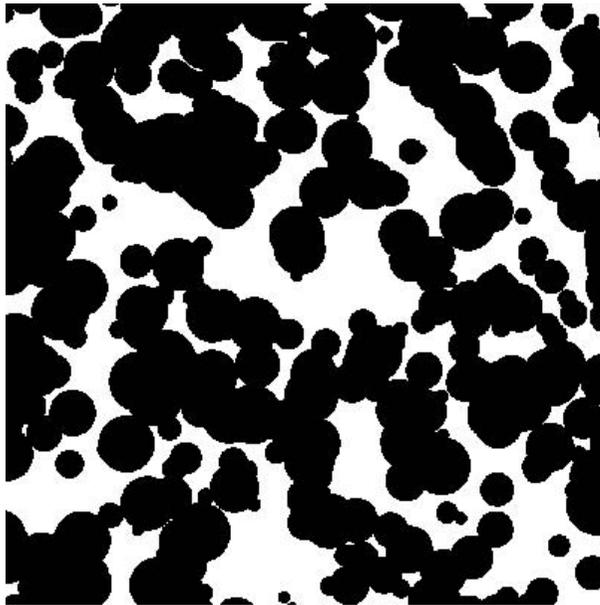
Cluster-Prozess



Hard-Core-Prozess

Zufällige geometrische Objekte

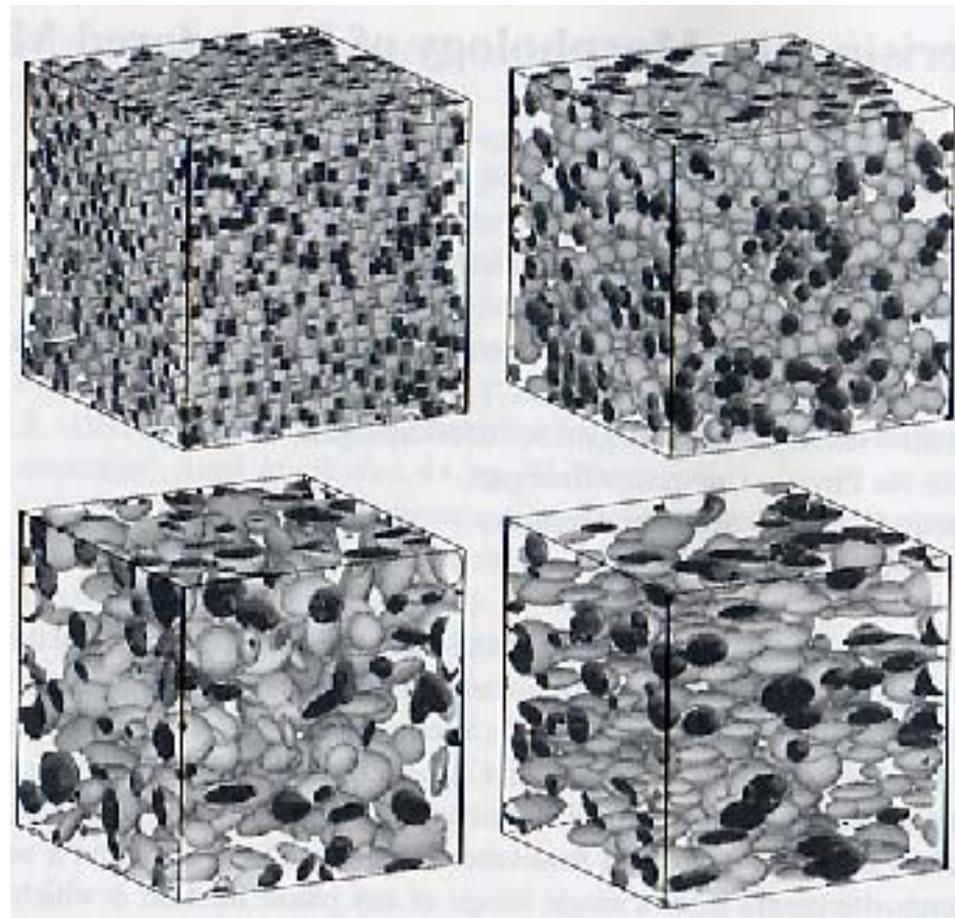
- Planare Keim–Korn–Modelle



Drei Realisierungen von Keim–Korn–Modellen: Boolesche Modelle mit sphärischen und polygonalen Körnern und ein Cluster–Prozess von Segmenten

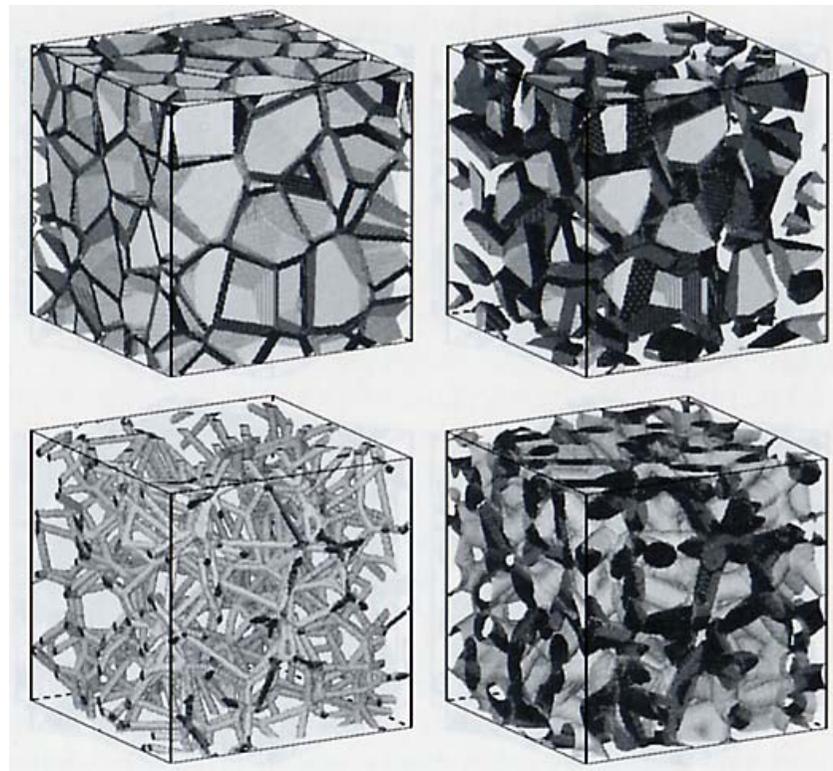
Zufällige geometrische Objekte

- Drei-dimensionale Boolesche Modelle



Zufällige geometrische Objekte

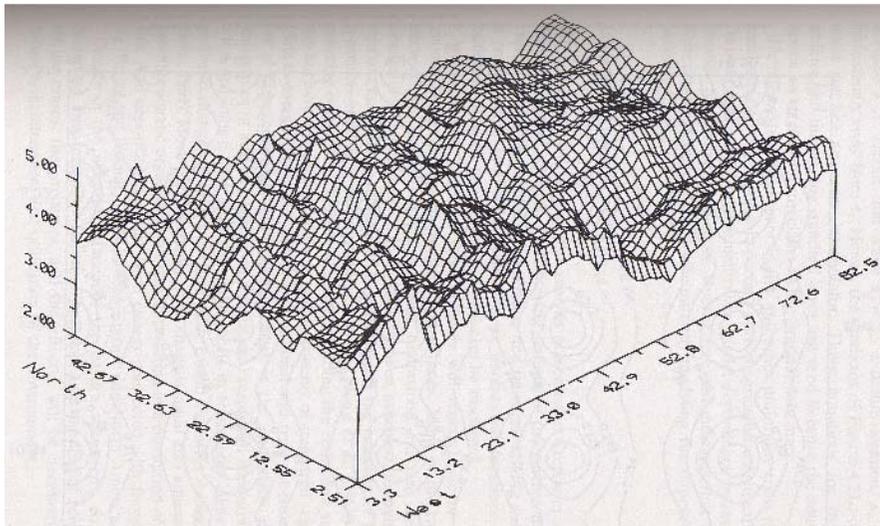
● Mosaike



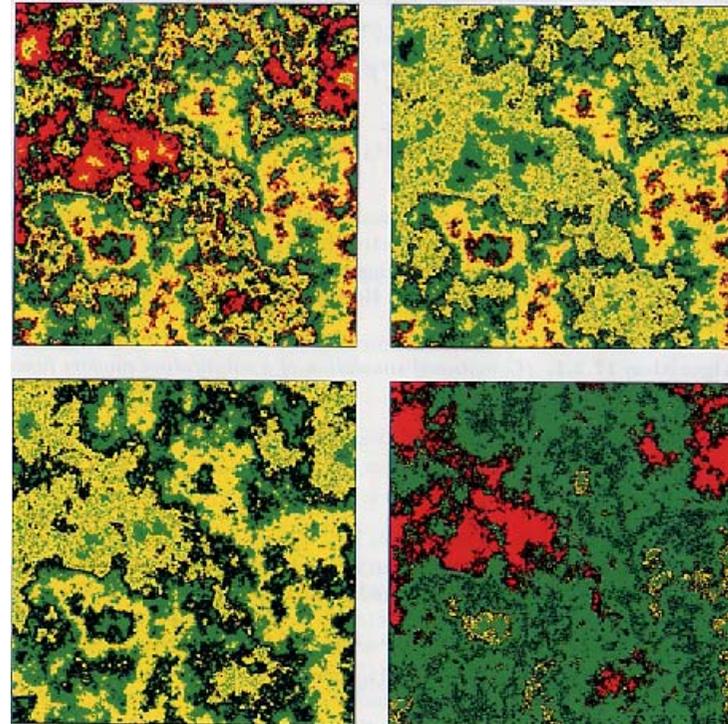
3D-Voronoi-Mosaik

Zufällige geometrische Objekte

● Zufällige Felder



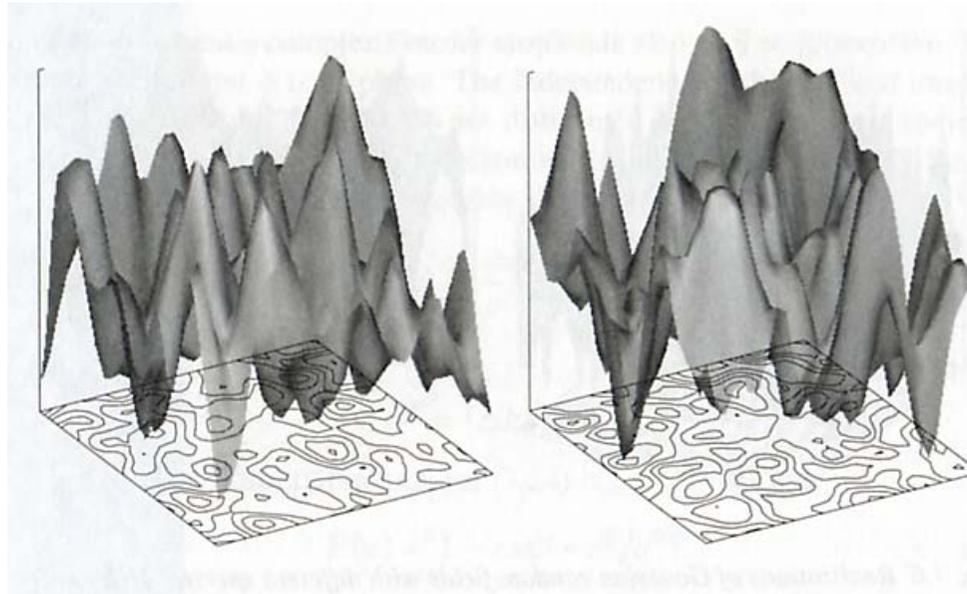
Zufallsfeld $\{z(x)\}_{x \in \mathbb{R}^2}$ $z(x) =$
Weizen-Erträge in Pfund an Stelle x



Vier simulierte Realisierungen eines
Zufallsfeldes

Zufällige geometrische Objekte

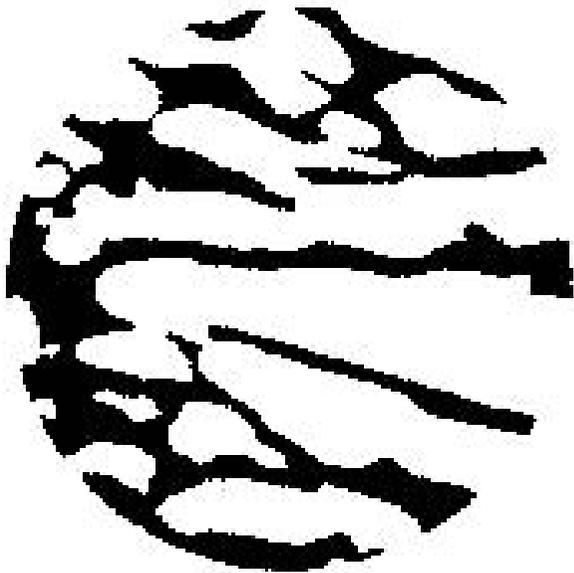
- Zufällige Felder



Zwei Realisierungen eines Gaußschen Zufallfeldes

Geometrie, Zufall und Alltag

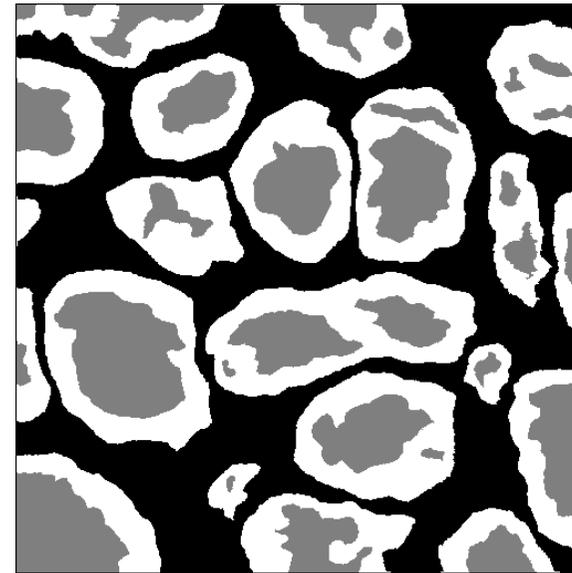
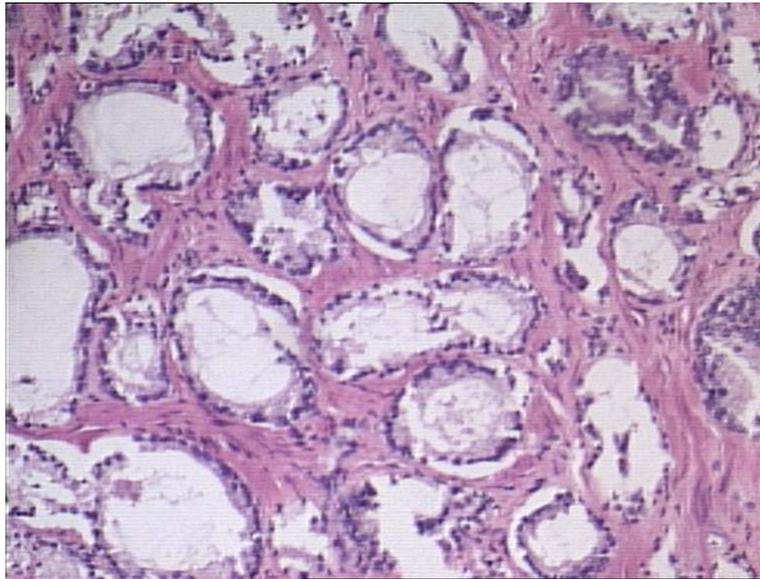
- Medizin: Automatisierte Diagnose von Krankheiten



Knochenstruktur: Calcium-Phase von gesundem und erkranktem Knochen (Osteoporose)

Geometrie, Zufall und Alltag

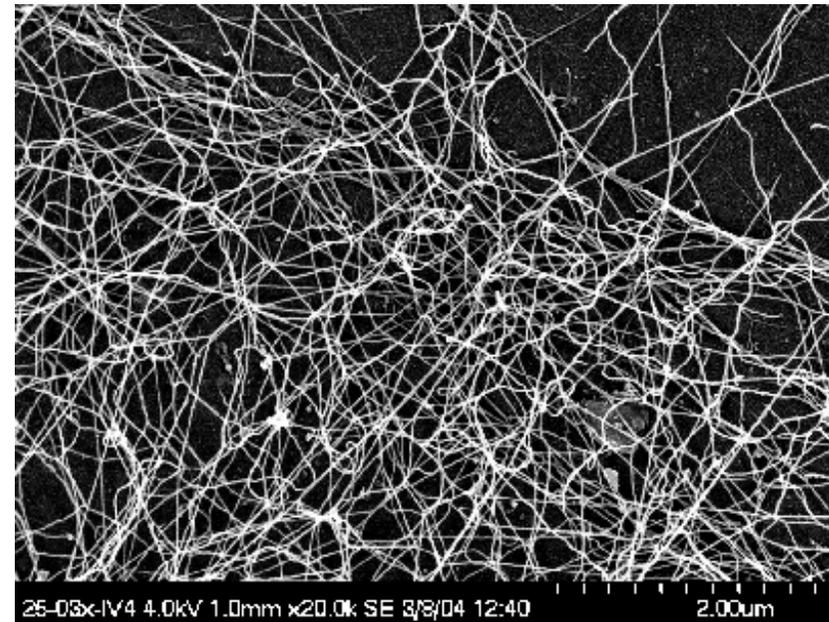
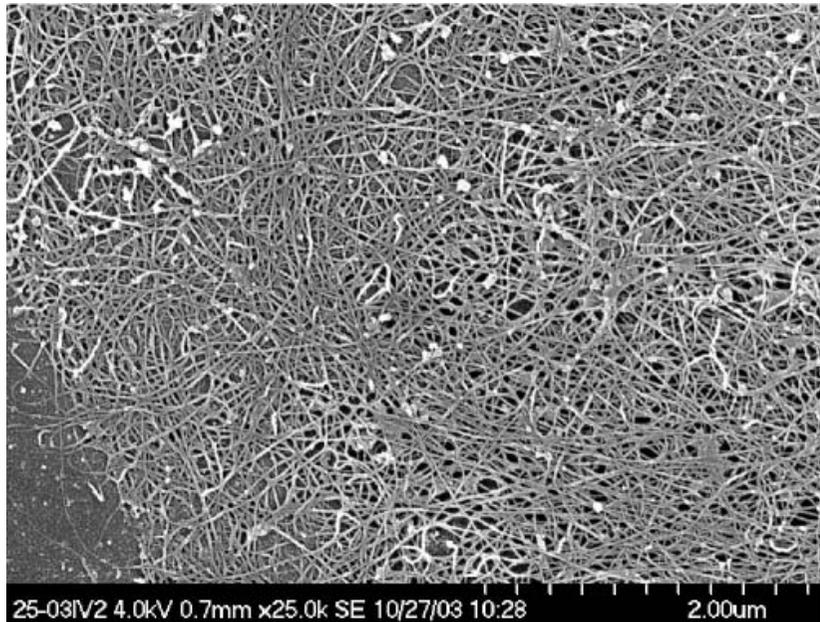
- Medizin: Krebsforschung



Krebsdiagnostik: histologischer Schnitt durch Prostatagewebe

Geometrie, Zufall und Alltag

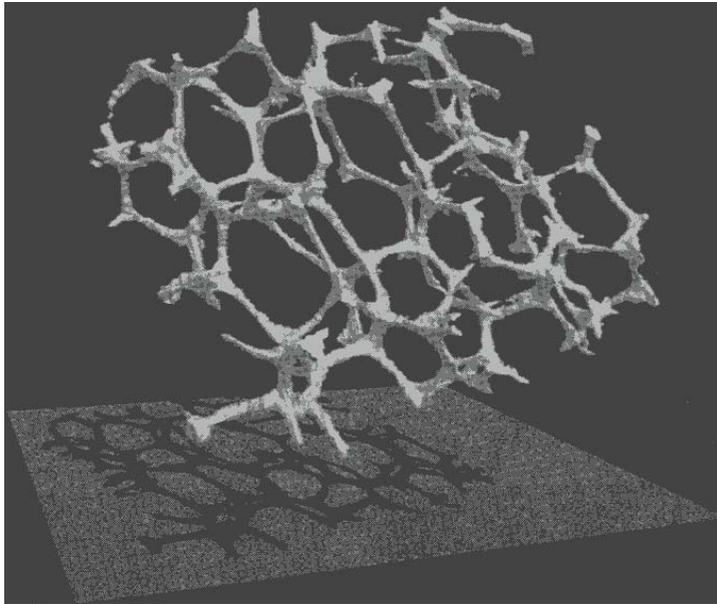
- Biologie: Morphologische Analyse der Zellstruktur



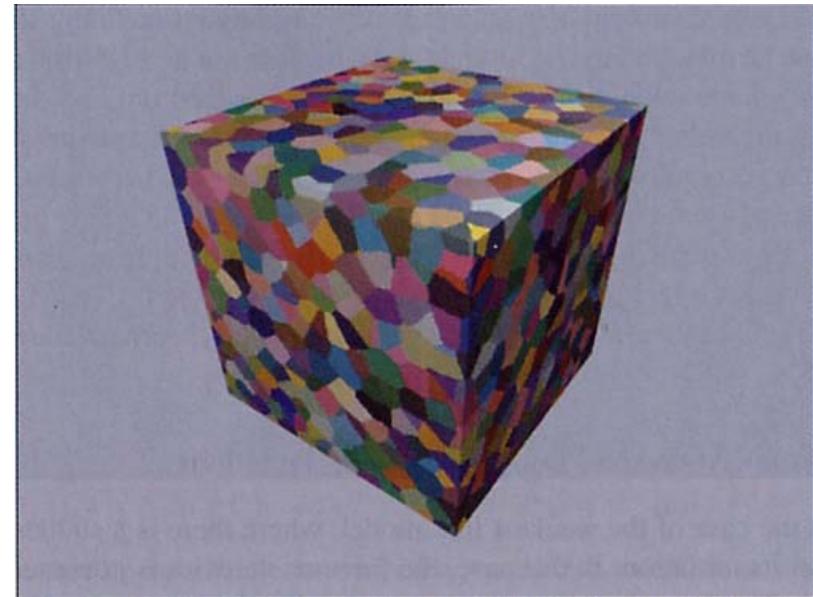
Zytoskelett einer Zelle: im Zentrum und am Rande

Geometrie, Zufall und Alltag

- Materialwissenschaften: Modellierung von Schäumen



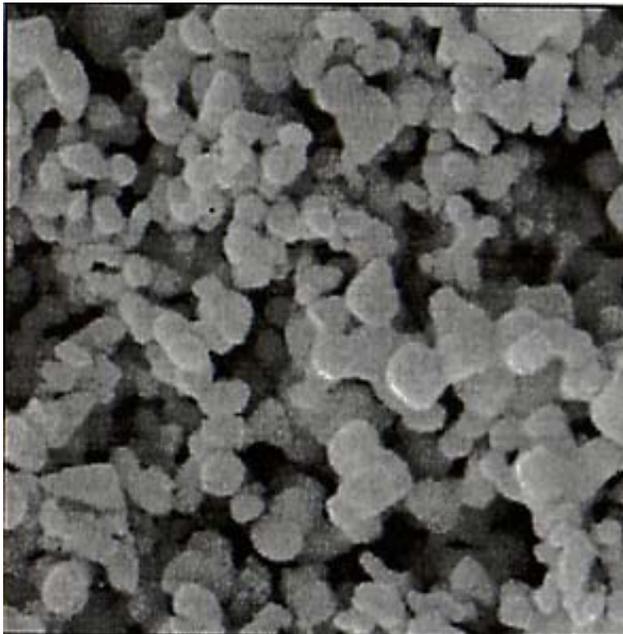
Polyurethan-Schaum



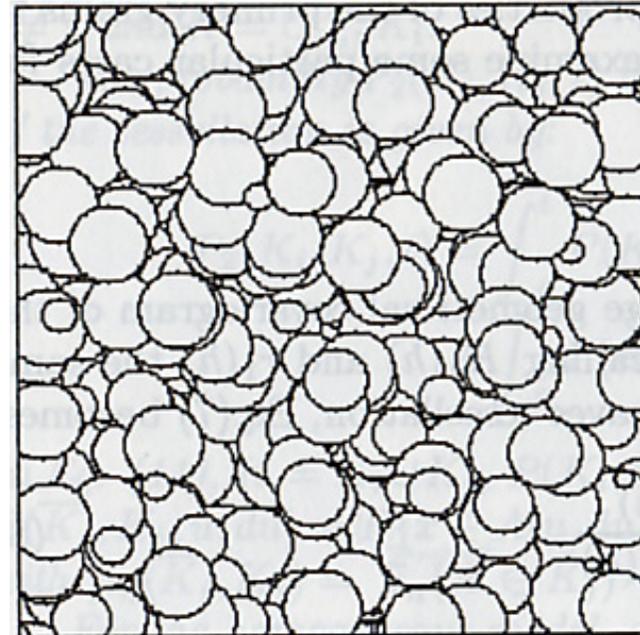
Modellansatz: Kantennetz eines
3D-Voronoi-Mosaiks

Geometrie, Zufall und Alltag

- Materialwissenschaften: Modellierung der Oberfläche von Materialien



UO_2 -Pulver



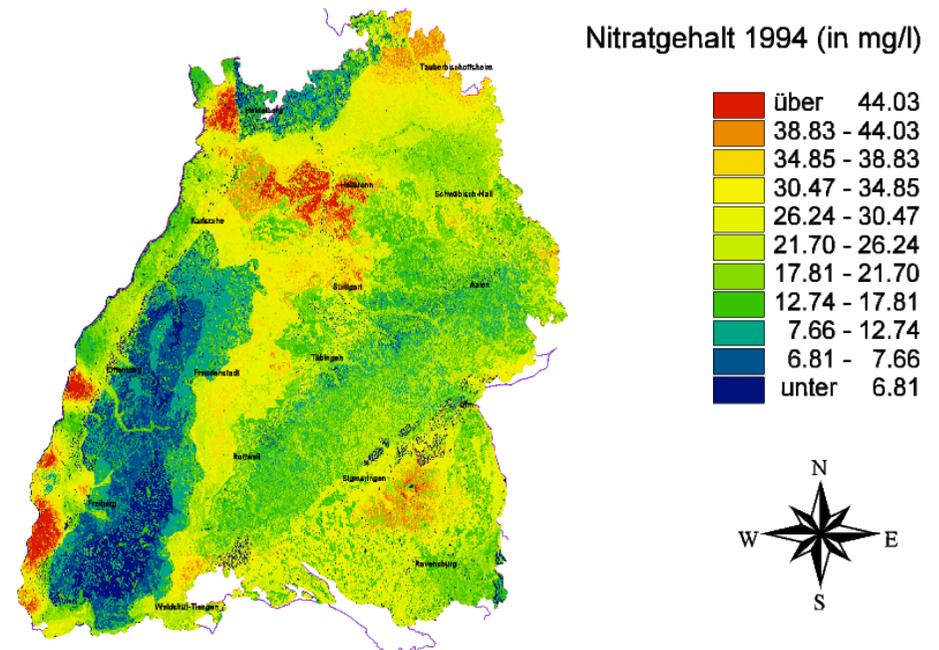
Modell fallender Blätter

Geometrie, Zufall und Alltag

- Geowissenschaften: Kartografische Darstellung von Messdaten



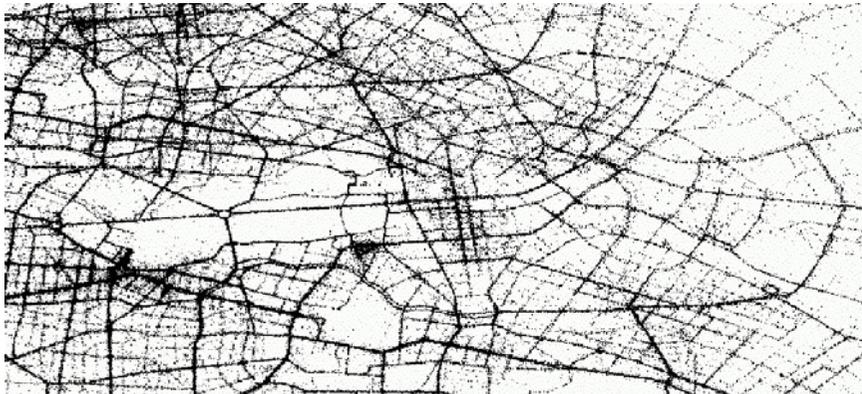
Bohrstellen in Baden-Württemberg



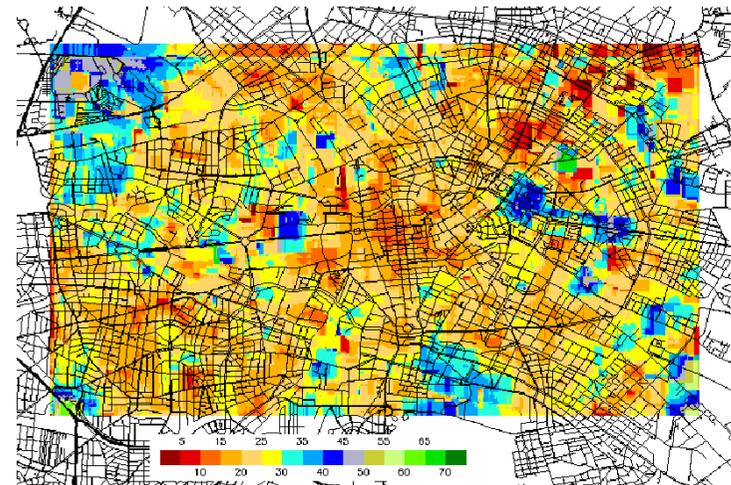
Nitrat-Konzentrationen im
Grundwasser: 1994

Geometrie, Zufall und Alltag

- Verkehrsforschung: schlaue Navigationssysteme



Taxenpositionen in Berlin-Mitte



Fahrgeschwindigkeiten: 13.02.2002,
18.00–18.30 Uhr

Geometrie, Zufall und Alltag

- Verkehrsforschung: Staugebiete

13.02.2002



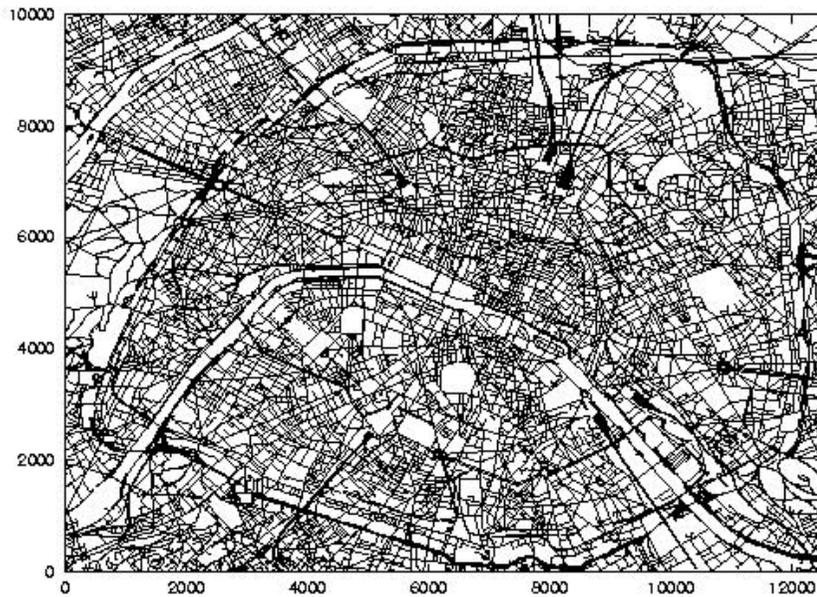
Schwellenwertbild $v(x) \leq 10$ km/h



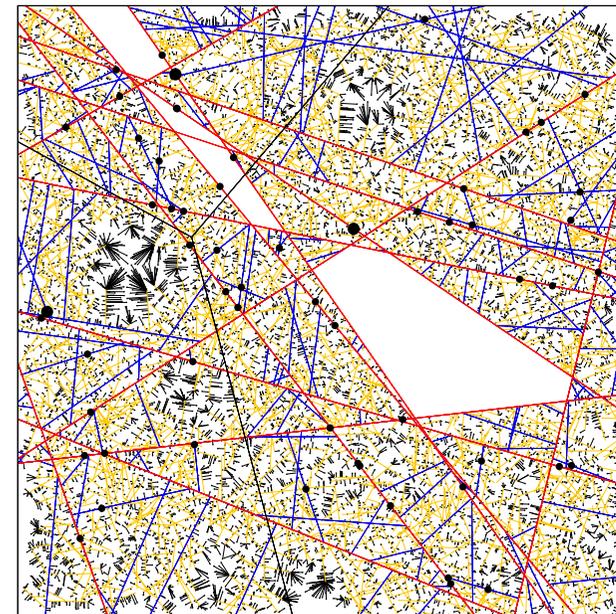
Schwellenwertbild $v(x) \leq 20$ km/h

Geometrie, Zufall und Alltag

- Kostenberechnung im Telefon-Festnetz von Paris



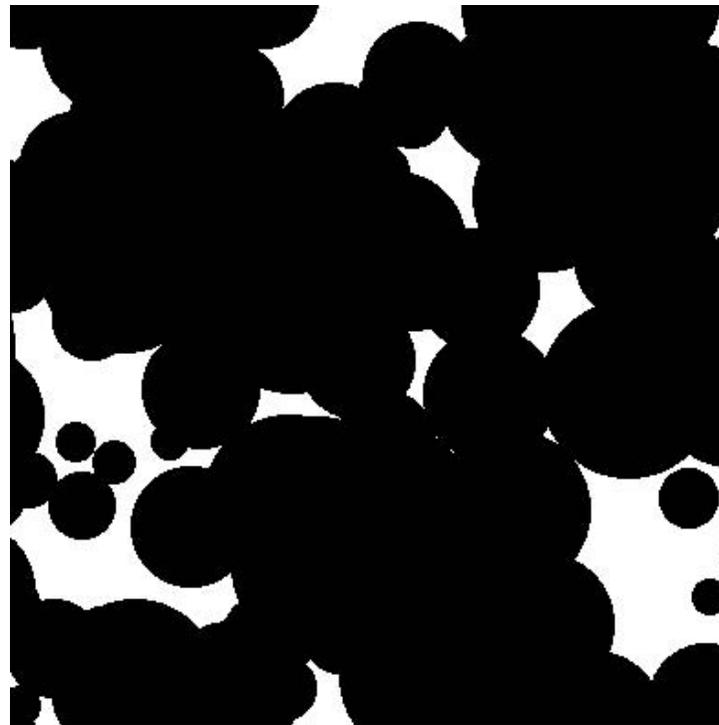
Straßennetz von Paris



Simuliertes Telefon-Festnetz

Geometrie, Zufall und Alltag

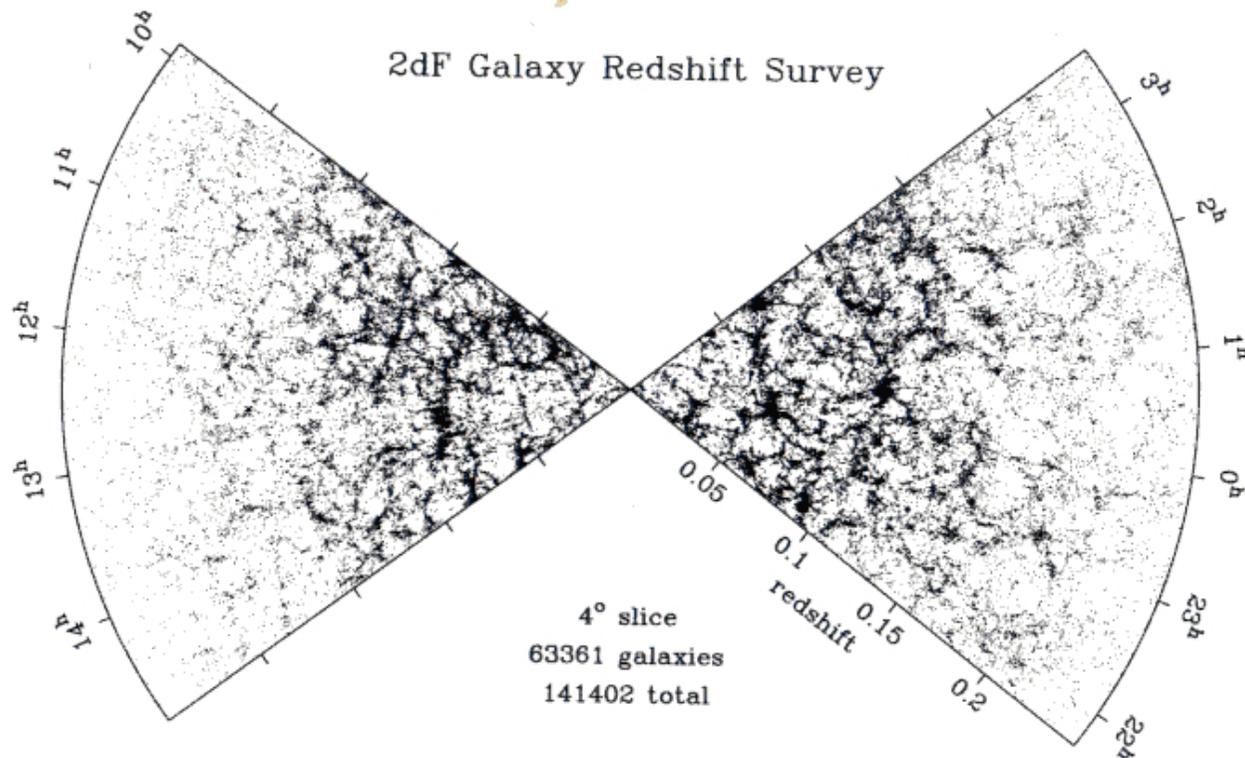
- Mobilfunknetze: Untersuchung der Empfangsqualität



Empfangsbereiche von Funkstationen

Geometrie, Zufall und Alltag

- Kosmologie: geometrische 3D–Struktur des Universums



Rekonstruktion von Galaxieclustern aus Rotverschiebungsuntersuchungen

Mehr darüber..

...erfahren Sie unter

<http://www.geostoch.de>