

# Berechnung der Minkowski–Funktionale von deterministischen und zufälligen Mengen

Evgueni Spodarev

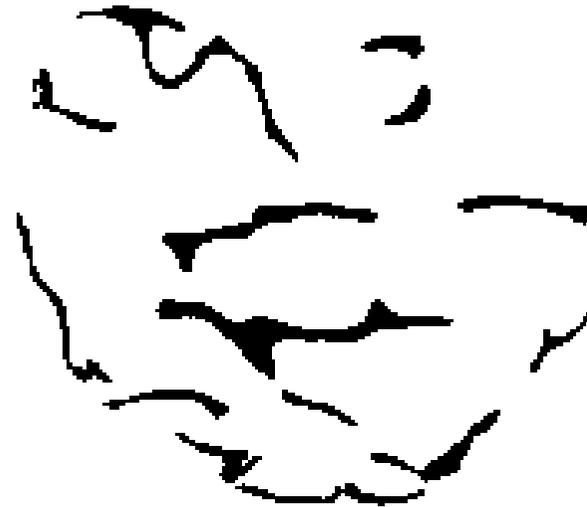


# Bildklassifikation

- Automatisierte Diagnostik von Krankheiten (Osteoporose)



Gesunder Knochen

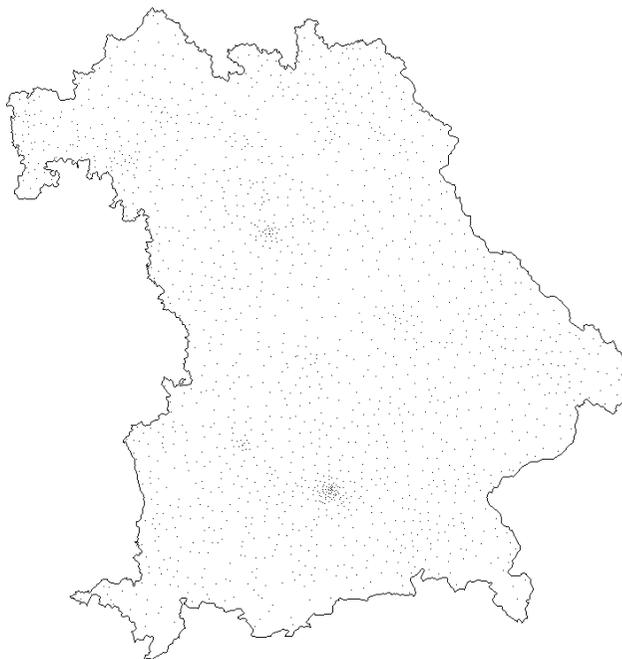


Erkrankter Knochen

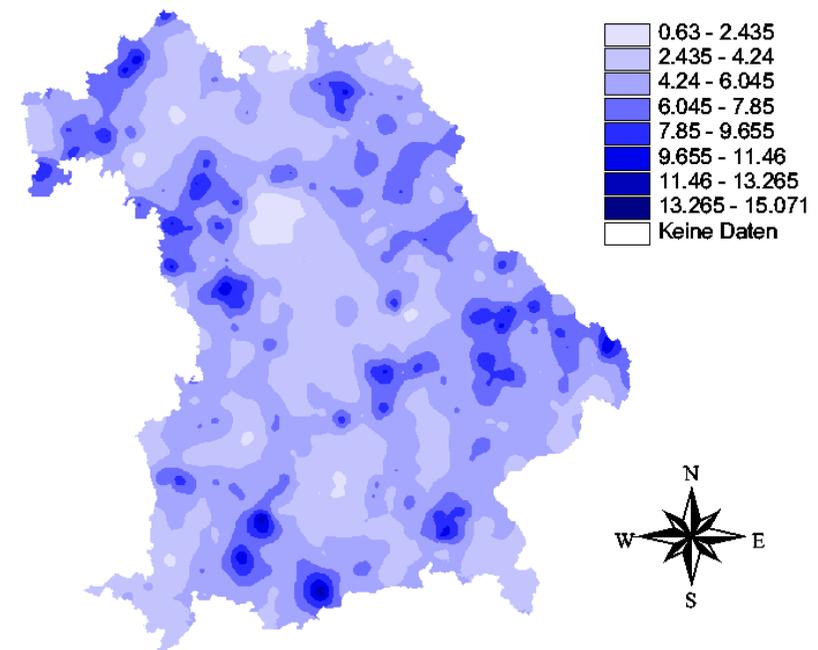
Kalzium-Phase der Knochenstruktur

# Bildklassifikation

- Kfz-Versicherung (Quelle: Versicherungskammer Bayern)  
Signifikante Änderungen von Stornozahlen



Messstellen: Zentren von  
PLZ-Gebieten in Bayern



Flächige Darstellung von  
Stornozahlen des Jahres 1998

# Überblick

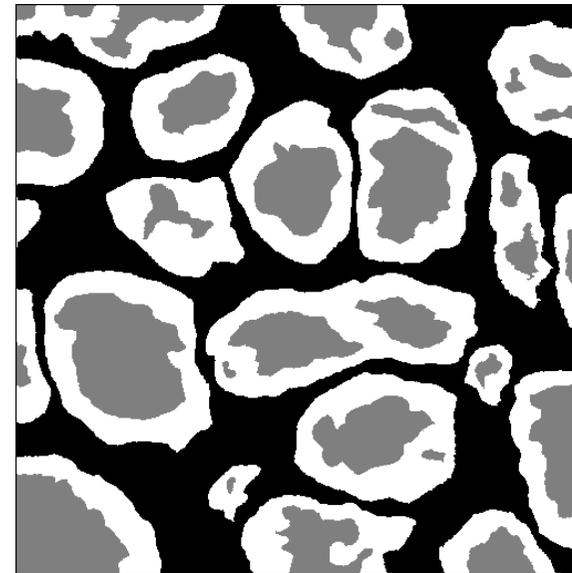
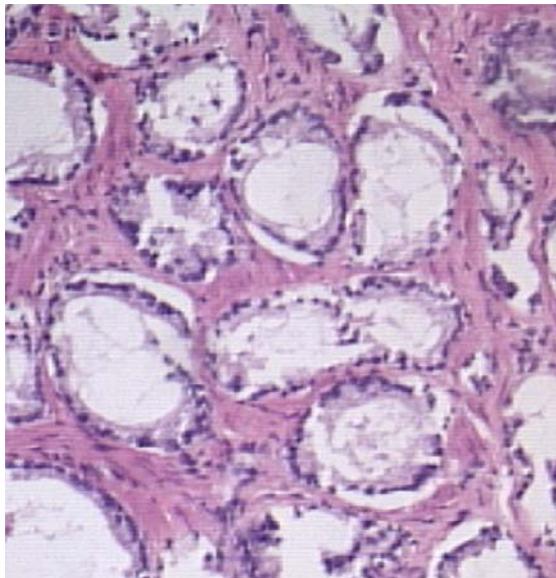
- Erkennung von Bildunterschieden: Graustufenbilder
- Morphologische Bildcharakteristiken
- Berechnung der inneren Volumina
- Algorithmen

# Überblick

- Erkennung von Bildunterschieden: Graustufenbilder
- Morphologische Bildcharakteristiken
- Berechnung der inneren Volumina
- Algorithmen
- Stationäre zufällige Mengen
- Schätzung der spezifischen inneren Volumina
- Güte–Eigenschaften der Schätzer
- Numerische Beispiele

# Graustufenbilder

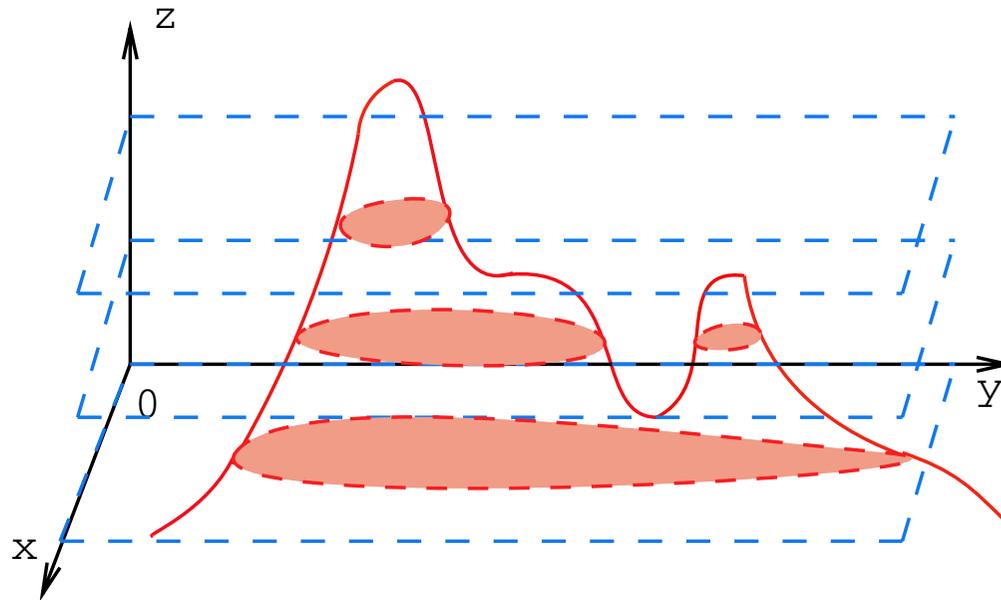
- Vergleich der einzelnen Graustufenphasen



Histologischer Schnitt durch Prostatagewebe: Krebsdiagnostik

# Graustufenbilder

- Graustufenbild  $\mapsto$  Familie von Binärbildern



Die Graustufen werden durch Binärbilder dargestellt, die im folgenden analysiert werden. Die rote Phase kann durch die Vereinigung konvexer Mengen approximiert werden.

# Grundlagen der Morphologie

## ● Grundbegriffe

$\mathcal{K}$  Klasse der kompakten konvexen Mengen in  $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n K_i : K_i \in \mathcal{K}, i = 1, \dots, n, \forall n \right\}$  **Konvexring**

$\mathcal{S} = \{K : K \cap W \in \mathcal{R} \ \forall W \in \mathcal{K}\}$  **erweiterter Konvexring**

$B_r(a)$  Kugel mit Mittelpunkt in  $a$  und Radius  $r$

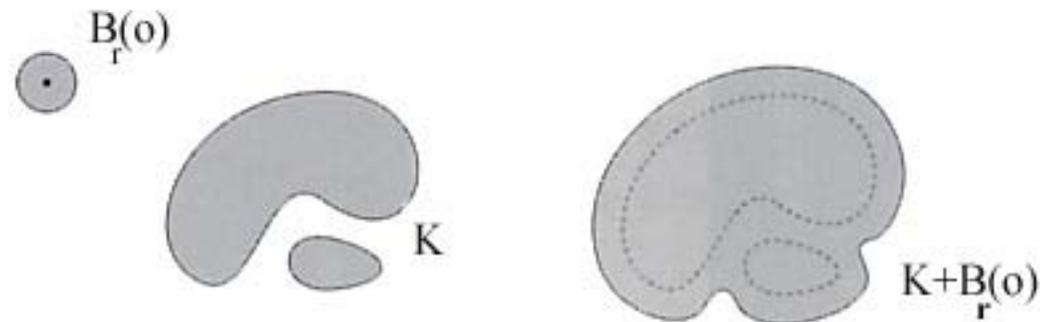
$k_j$  Volumen von  $B_1(o)$  in  $\mathbb{R}^j$ ,  $j = 0, \dots, d$

$K_1 \oplus K_2 = \bigcup_{x \in K_2} (K_1 + x)$  **Minkowski-Addition**

$K_1 \ominus K_2 = \bigcap_{x \in K_2} (K_1 + x)$  **Minkowski-Subtraktion**

# Grundlagen der Morphologie

## ● Bildoperationen



Dilatation: Parallelmenge  $K \oplus B_r(o)$  von  $K$

- Dilatation:  $K \mapsto K \oplus (-B)$
- Erosion:  $K \mapsto K \ominus (-B)$
- Schwellenwertbildung:  $f(x) \mapsto \mathbf{1}(x : f(x) \geq a), x \in W$

# Innere Volumina

Steiner–Formel in  $\mathbb{R}^2$

Für  $K \in \mathcal{K}$  und  $r > 0$

$$A(K \oplus B_r(o)) = A(K) + rS(K) + \pi r^2 \chi(K),$$

wobei

- $A(K)$  die Fläche,
- $S(K)$  die Randlänge und
- $\chi(K) = 1$  die **Euler–Zahl** („Porosität“)

von  $K$  sind.

# Innere Volumina

## Steiner–Formel in $\mathbb{R}^d$

- Es existieren Funktionale  $V_j, W_j : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $j = 0, \dots, d$ , (Minkowski–Funktionale, Quermaßintegrale bzw. innere Volumina), so dass für alle  $r > 0$  und  $K \in \mathcal{K}$  gilt

$$V_d(K \oplus B_r(o)) = \sum_{j=0}^d r^{d-j} k_{d-j} V_j(K) = \sum_{j=0}^d r^j \binom{d}{j} W_j(K)$$

- $W_j(K) = \frac{k_j}{\binom{d}{j}} V_{d-j}(K)$ ,  $K \in \mathcal{K}$
- $V_0, \dots, V_d$  sind additiv, stetig, bewegungsinvariant, monoton bzgl. der Inklusion und lokal beschränkt

# Innere Volumina

In  $\mathbb{R}^3$ : Für alle  $K \in \mathcal{K}$ ,  $\partial K \in C^2$  gilt

- $V_3(K) = |K|$  das Volumen
- $2V_2(K) = S(K)$  die Oberfläche
- $\pi V_1(K) = (1/2) \int_{\partial K} (1/R_1 + 1/R_2) d\sigma$  das **Integral der mittleren Krümmung** von  $\partial K$  oder  $2\pi \times$  **mittlere Breite** von  $K$
- $4\pi V_0(K) = 4\pi = \int_{\partial K} (1/R_1 \cdot 1/R_2) d\sigma$  das **Integral der Gaußschen Krümmung** von  $\partial K$  ( $4\pi \times$  Euler-Zahl),

wobei  $R_1$  und  $R_2$  die Hauptkrümmungsradien von  $\partial K$  sind.

# Innere Volumina

**Theorem 1** (Hadwiger (1957)) *Jedes additive, stetige und bewegungs-invariante Funktional  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung in der Form*

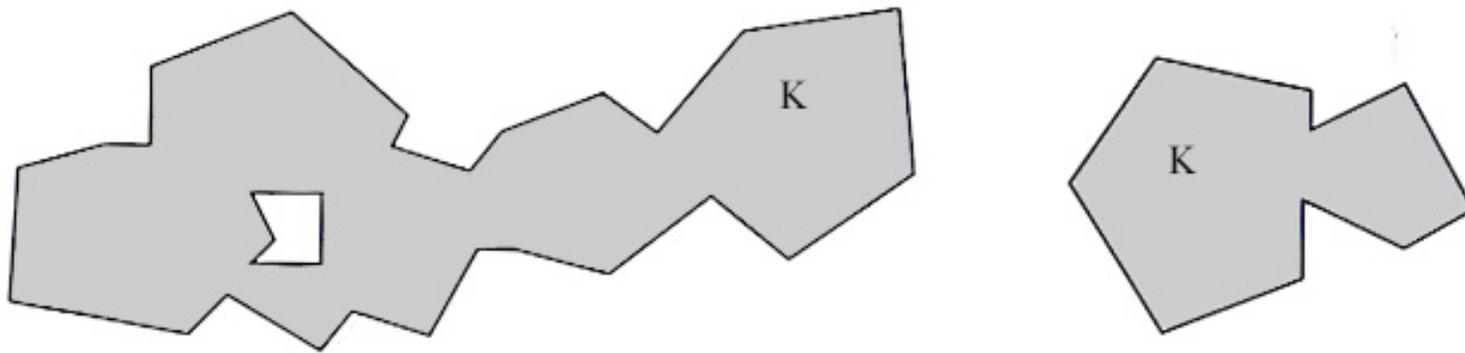
$$F = \sum_{j=0}^d a_j V_j$$

*für gewisse reelle Konstanten  $a_0, \dots, a_d$ .*

Die inneren Volumina  $V_0, \dots, V_d$  bilden somit eine Basis!

# Innere Volumina

Additive Fortsetzung auf den Konvexring  $\mathcal{R}$



Für jedes  $j = 0, \dots, d$  existiert genau eine additive Fortsetzung von  $V_j : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  auf  $\mathcal{R}$ , die durch die **Siebformel** gegeben ist:

$$V_j(K_1 \cup \dots \cup K_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{j_1 < \dots < j_i} V_j(K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_i}), \quad K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$$

# Innere Volumina

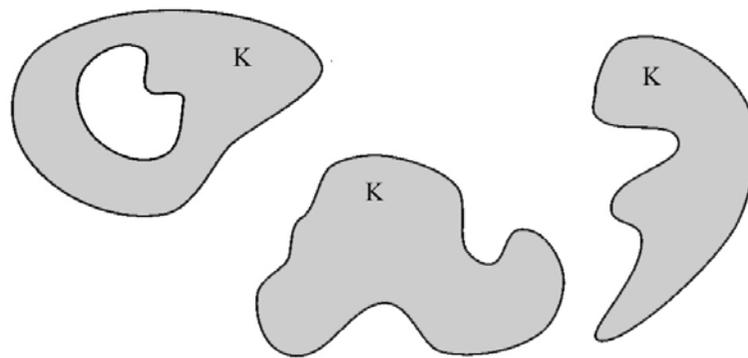
Geometrische Deutung: Für  $K \in \mathcal{R}$ ,  $K \neq \emptyset$  ist

$V_d(K) = |K|$  das Volumen

$2V_{d-1}(K) = S(K)$  die Oberfläche

$V_0(K) = \chi(K)$  die Euler-Zahl

In  $\mathbb{R}^2$ :  $\chi(K) = \#\{\text{Klumpen}\} - \#\{\text{Löcher}\}$



# Innere Volumina

Steiner–Formel auf  $\mathcal{R}$  (Schneider (1980))

- Das Funktional  $\rho_r : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$\rho_r(K) = \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} k_{d-j} V_j(K), \quad K \in \mathcal{R}$$

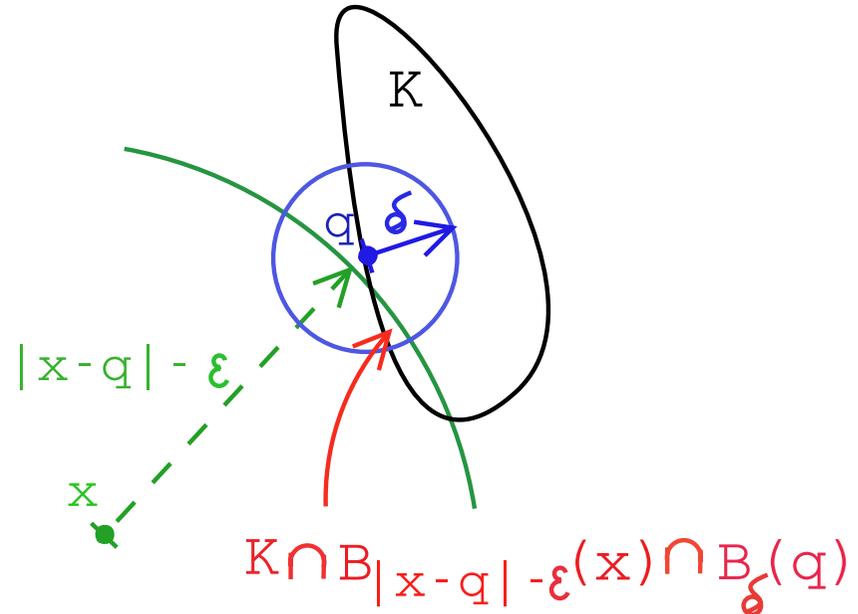
- Falls  $K \in \mathcal{K}$ , dann gilt  $\rho_r(K) = V_d((K \oplus B_r(o)) \setminus K)$
- Geometrische Interpretation von  $\rho_r(K)$  für beliebiges  $K \in \mathcal{R}$ ?

# Innere Volumina

## ● Index-Funktion $J$

Für alle  $q, x \in \mathbb{R}^d$

- sei  $J(\emptyset, q, x) = 0$ .
- Für  $K \in \mathcal{R}$ ,  $K \neq \emptyset$ , sei



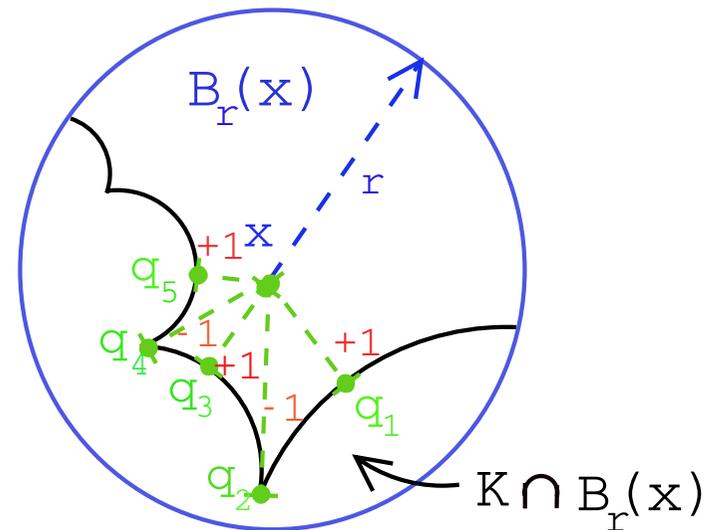
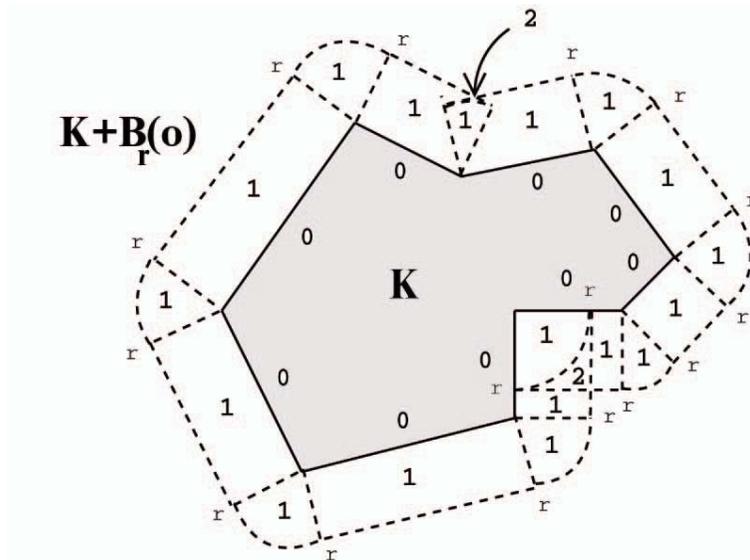
$$J(K, q, x) = \begin{cases} 1 - \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_0 \left( K \cap B_{|x-q|-\varepsilon}(x) \cap B_\delta(q) \right), & q \in K, \\ 0, & q \notin K. \end{cases}$$

# Innere Volumina

- Für  $r > 0$  und beliebige  $K \in \mathcal{R}$  gilt dann

$$\rho_r(K) = \int_{\mathbb{R}^d} I_r(K, x) dx,$$

$$I_r(K, x) = \sum_{q \neq x} J(K \cap B_r(x), q, x).$$



$\rho_r(K) =$  gewichtetes Volumen von  $(K \oplus B_r(o)) \setminus K$  mit Mehrfachheiten

# Berechnung der inneren Volumina

- Ansätze zur Berechnung einzelner  $V_j(K)$ 
  - Serra (1982)
  - Nagel, Ohser et al. (1996, 2000, 2002, 2003)
  - Robins (2002)
  - Rataj et al. (2002, 2004, 2005)

# Berechnung der inneren Volumina

- Simultane Berechnung sämtlicher  $V_0(K), \dots, V_d(K)$ 
  - Seien  $F_i : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, d$  additive, stetige und bewegungsinvariante Funktionale. Nach dem Satz von Hadwiger gilt dann  $F_i(K) = \sum_{j=0}^d a_{ij} V_j(K) \quad \forall K \in \mathcal{R}$
  - Falls  $F = (F_0(K), \dots, F_d(K))^{\top}$  leicht berechenbar und  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^d$  invertierbar ist,
  - dann kann  $V = (V_0(K), \dots, V_d(K))^{\top}$  als Lösung des Gleichungssystems  $F = AV$  berechnet werden:

$$V = A^{-1}F$$

# Berechnung der inneren Volumina

- Bestimmung der Koeffizientenmatrix  $A = (a_{ij})$

Seien  $K_0, \dots, K_d$  einfache konvexe Körper (z.B., eine Kugel, ein Segment, ein Würfel, usw.) mit bekannten  $F_i(K_n), V_j(K_n)$ ,  $i, j, n = 0, \dots, d$  und  $\det(V_j(K_n)) \neq 0$ . Dann kann  $(a_{ij})$  als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} F_i(K_0) \\ F_i(K_1) \\ \dots \\ F_i(K_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0(K_0) & \dots & V_d(K_0) \\ V_0(K_1) & \dots & V_d(K_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_0(K_d) & \dots & V_d(K_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{id} \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, d$$

bestimmt werden.

# Berechnung der inneren Volumina

## ● Beispiel: Steiner–Formel auf $\mathcal{R}$

●  $F_i(K) = \rho_{r_i}(K)$ ,  $r_i > 0$ ,  $r_i \neq r_j$  für  $i = 0, \dots, d - 1$

●  $F_d(K) = V_d(K)$

●  $V = (V_0(K), \dots, V_d(K))^T$  und  $A = A_{r_0 \dots r_{d-1}}$ , wobei

$$A_{r_0 \dots r_{d-1}} = \begin{pmatrix} r_0^d k_d & r_0^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_0^2 k_2 & r_0 k_1 & 0 \\ r_1^d k_d & r_1^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_1^2 k_2 & r_1 k_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{d-1}^d k_d & r_{d-1}^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_{d-1}^2 k_2 & r_{d-1} k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Berechnung der inneren Volumina

• In  $\mathbb{R}^2$

• Für  $r_0, r_1 > 0, r_0 \neq r_1$  gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_0(K) \\ V_1(K) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi r_0^2 & 2r_0 \\ \pi r_1^2 & 2r_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_{r_0}(K) \\ \rho_{r_1}(K) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\pi r_0 r_1 (r_0 - r_1)} \begin{pmatrix} 2r_1 & -2r_0 \\ -\pi r_1^2 & \pi r_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{r_0}(K) \\ \rho_{r_1}(K) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

•  $V_2(K) = A(K)$  muß extra berechnet werden

# Berechnung der inneren Volumina

- **Beispiel:** Kinematische Hauptformel auf  $\mathcal{R}$

$$\int_{K \oplus B_r(o)} V_0(K \cap B_r(x)) dx = \sum_{j=0}^d r^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K), \quad K \in \mathcal{R}$$

- $F_i(K) = \int_{K \oplus B_{r_i}(o)} V_0(K \cap B_{r_i}(x)) dx, \quad r_i > 0, \quad r_i \neq r_j \text{ for}$   
 $i = 0, \dots, d$

- $A = A_{r_0 \dots r_d} = \begin{pmatrix} r_0^d \kappa_d & r_0^{d-1} \kappa_{d-1} & \dots & r_0^2 \kappa_2 & r_0 \kappa_1 & 1 \\ r_1^d \kappa_d & r_1^{d-1} \kappa_{d-1} & \dots & r_1^2 \kappa_2 & r_1 \kappa_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_d^d \kappa_d & r_d^{d-1} \kappa_{d-1} & \dots & r_d^2 \kappa_2 & r_d \kappa_1 & 1 \end{pmatrix}$

# Berechnung der inneren Volumina

- In  $\mathbb{R}^2$

Für unterschiedliche  $r_0, r_1, r_2 > 0$  gilt

$$\begin{pmatrix} V_0(K) \\ V_1(K) \\ V_2(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi r_0^2 & 2r_0 & 1 \\ \pi r_1^2 & 2r_1 & 1 \\ \pi r_2^2 & 2r_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_0(K) \\ F_1(K) \\ F_2(K) \end{pmatrix}$$

# Wahl der Radien $r_i$

- Großer Diskretisierungsfehler für kleine  $r_i$  (und umgekehrt)
- Für größere Werte  $r_i$  immer noch akzeptable Laufzeiten
- Stabilere Ergebnisse für  $n$  Paare von Radien

$$(r_0, r_1), (r_2, r_3), \dots, (r_{2n-2}, r_{2n-1})$$

bei anschließender Berechnung der Stichprobenmittel für  $V_0(K_{\mathfrak{F}(G)})$  bzw.  $V_1(K_{\mathfrak{F}(G)})$

- Rationale Radien  $r_i$  liefern bessere Ergebnisse, z.B.,  $r_0 = 5000$  und  $r_{i+1} = r_i + 20.3, i = 0, \dots, 2n - 1$

# Wahl der Radien $r_i$

- Methode der kleinsten Quadrate

Betrachtung von  $n > 2$  Radien  $r_0, \dots, r_{n-1}$  führt zu überbestimmtem System linearer Gleichungen:

$$F' = \begin{pmatrix} \rho_{r_0}(K_{\mathfrak{F}(G)}) \\ \dots \\ \rho_{r_{n-1}}(K_{\mathfrak{F}(G)}) \end{pmatrix} = A'x = \begin{pmatrix} \pi r_0^2 & 2r_0 \\ \dots & \dots \\ \pi r_{n-1}^2 & 2r_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Dabei liefert die Lösung  $V^*(K_{\mathfrak{F}(G)}) = (A'^T A')^{-1} A'^T F'$  des Minimierungsproblems  $\left| F' - A' V^*(K_{\mathfrak{F}(G)}) \right| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \left| F' - A' x \right|$  eine gute Approximierung von  $(V_0(K_{\mathfrak{F}(G)}), V_1(K_{\mathfrak{F}(G)}))^T$

# Pixelbasierte Binärbilder

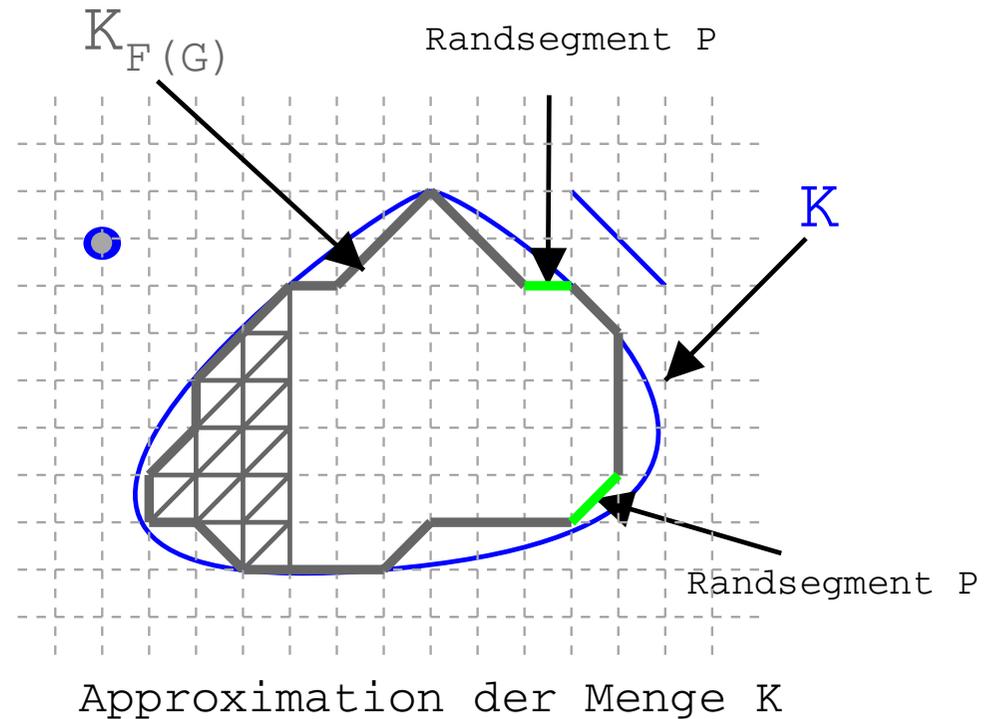
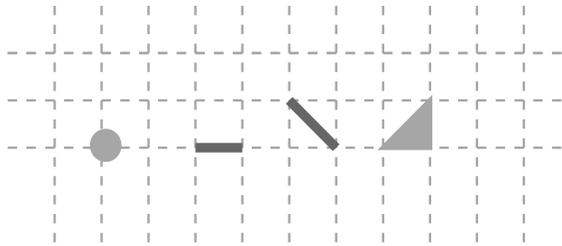


Binärbild  $\{\mathbf{1}_K(x), x \in \mathbb{L}^2 \cap W\}$   
im Beobachtungsfenster  $W$

- Die Menge  $K \in \mathcal{R}$ ,  $K \subset W \subset \mathbb{R}^2$  sei auf quadratischem Gitter  $\mathbb{L}^2$  mit Gitterweite  $\Delta$  gegeben
- Berechne  $(A(K), L(K), \chi(K)) = (V_2(K), 2V_1(K), V_0(K))$ .
- $A(K) \approx \#(K \cap \mathbb{L}^2)$
- **Berechnung von  $L(K)$  und  $\chi(K)$ ?**  
Approximiere  $K$  durch Polygon-System  $\mathfrak{F}(G)$ , das durch eine Familie von Elementar-Polygonen  $G$  erzeugt wird:  $K \mapsto K_{\mathfrak{F}(G)}$

# Approximation $K_{\mathfrak{F}(G)}$

Familie von Polygonen  $G$



# Algorithmus

- Diskretisierung des Integrals  $\rho_r(K_{\mathfrak{F}(G)}) = \int_{\mathbb{R}^d} I_r(K_{\mathfrak{F}(G)}, x) dx$

Um  $(V_0(K_{\mathfrak{F}(G)}), V_1(K_{\mathfrak{F}(G)}))$  berechnen zu können, approximiere das Integral

$$\begin{aligned} \rho_r(K_{\mathfrak{F}(G)}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{q \neq x} J(K_{\mathfrak{F}(G)} \cap B_r(x), q, x) dx \\ &\approx \Delta^2 \sum_{x \in (\partial K_{\mathfrak{F}(G)} \oplus B_r(o)) \cap \mathbb{L}^2} \sum_{q \in \partial K_{\mathfrak{F}(G)} \setminus \{x\}} J(K_{\mathfrak{F}(G)} \cap B_r(x), q, x) \\ &= \Delta^2 \sum_{x \in \dots} \left( \sum_{q \in \partial K_{\mathfrak{F}(G)} \cap \mathbb{L}^2 \setminus \{x\}} + \sum_{q \in \partial K_{\mathfrak{F}(G)} \setminus (\mathbb{L}^2 \cup \{x\})} \right) J(K_{\mathfrak{F}(G)} \cap B_r(x), q, x) \end{aligned}$$

# Algorithmus

## • Vertauschung der Summationsreihenfolge

$$\rho_r(K_{\mathfrak{F}(G)}) \approx \Delta^2 \sum_{q \in \partial K_{\mathfrak{F}(G)} \cap \mathbb{L}^2} S_r(q) + \Delta^2 \sum_{P \subset \partial K_{\mathfrak{F}(G)}} M_r(P), \quad \text{wobei}$$

$$S_r(q) = \sum_{x \in \mathbb{L}^2, 0 < |x - q| \leq r} J(K_{\mathfrak{F}(G)} \cap B_r(x), q, x),$$

$$M_r(P) = \sum_{x \in D_r(P)} J(K_{\mathfrak{F}(G)} \cap B_r(x), \tau_P(x), x) = \#D_r(P)$$

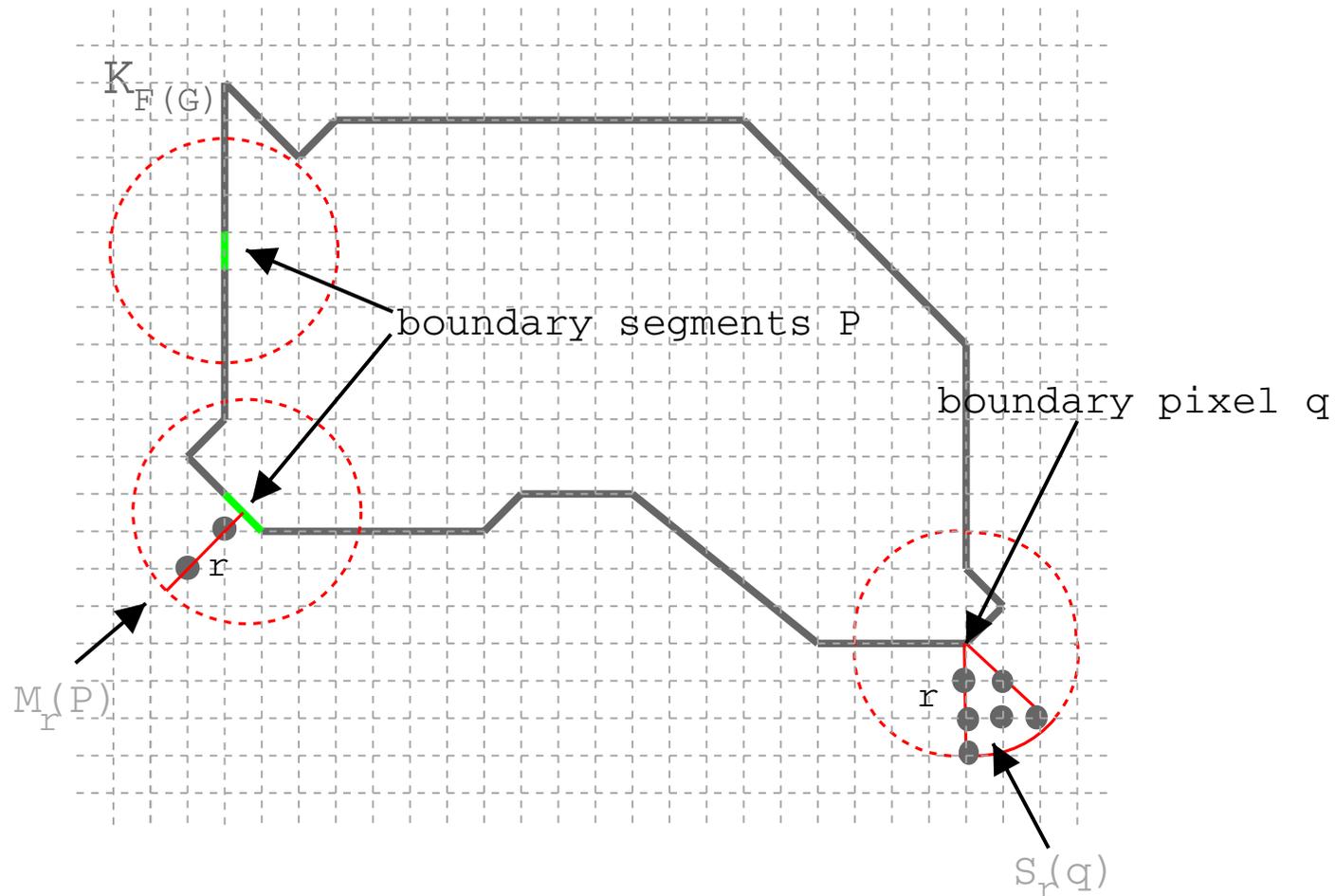
und

$$D_r(P) = \{x \in \mathbb{L}^2 : \tau_P(x) \in \text{int}(P), 0 < |x - \tau_P(x)| \leq r\},$$

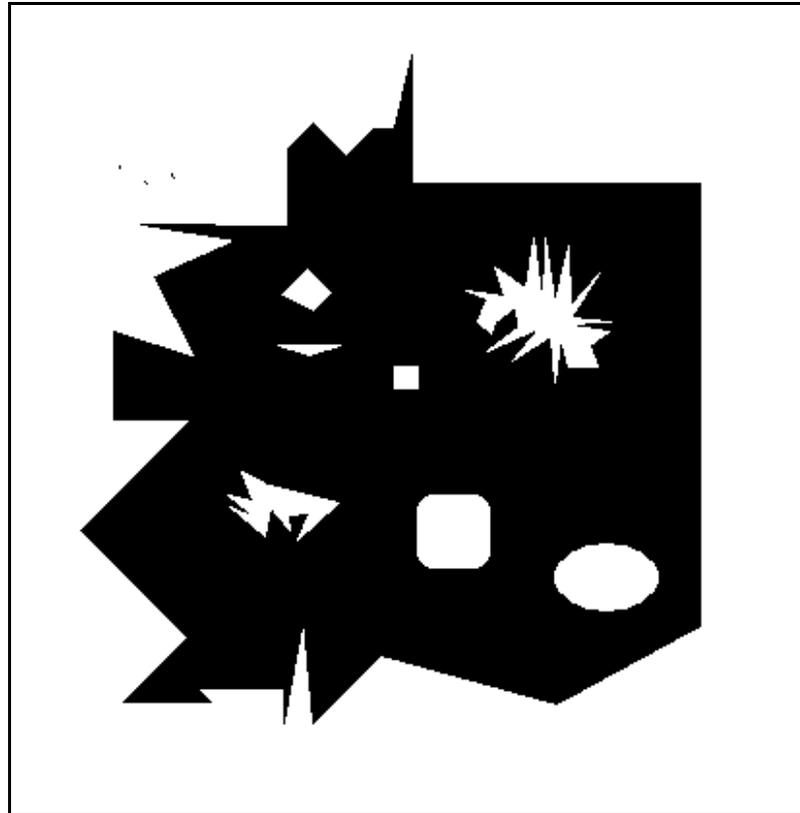
$\tau_P(x)$  ist die orthogonale Projektion von  $x$  auf das Segment  $P$

# Algorithmus

Berechnung von  $\rho_r(K_{\mathfrak{F}(G)})$



# Numerisches Beispiel



$2V_1(K)$	$V_0(K)$	$2V_1(K_{\mathfrak{F}(G)})$	$V_0(K_{\mathfrak{F}(G)})$
2970.584053	-5	2970.586176	-5.0

# Zufällige Mengen

Sei

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum
- $\mathcal{C}$  die Familie aller kompakten Mengen in  $\mathbb{R}^d$
- $\mathfrak{F}$  die Familie aller abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^d$
- $\sigma(\mathfrak{F})$  die von den Mengen  $F_C = \{F \in \mathfrak{F} : F \cap C \neq \emptyset\}$ ,  $C \in \mathcal{C}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra in  $\mathfrak{F}$

Eine  $(\mathcal{F}, \sigma(\mathfrak{F}))$ -messbare Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathfrak{F}$  heißt **zufällige abgeschlossene Menge (ZAM)**. Ihre Verteilung wird durch das **Kapazitätsfunktional**  $T_\Xi(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset)$ ,  $C \in \mathcal{C}$  festgelegt.

# Zufällige Mengen

## Stationarität und Isotropie

Eine ZAM  $\Xi$  heißt **stationär**, falls  $\Xi \stackrel{d}{=} \Xi + x, \forall x \in \mathbb{R}^d$ , und **isotrop**, falls  $\Xi \stackrel{d}{=} g\xi, \forall g \in SO(d)$ .

## Theorem 2 (Matheron (1975))

- *Eine ZAM  $\Xi$  ist stationär bzw. isotrop  $\iff T_\Xi(C + x) = T_\Xi(C) \forall x \in \mathbb{R}^d$  bzw.  $T_\Xi(gC) = T_\Xi(C) \forall g \in SO(d)$ .*
- *Eine stationäre ZAM  $\Xi \neq \emptyset$  ist f.s. unbeschränkt.*
- *Für eine stationäre konvexe ZAM  $\Xi$  gilt  $\Xi \in \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$  f.s.*

# Beispiele

- **Punktprozesse in  $\mathbb{R}^d$ :** ZAM  $\Xi = \{X_1, X_2, \dots\}$ , deren Realisierungen lokal endliche Punktmuster in  $\mathbb{R}^d$  sind, d.h.,  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathfrak{N} \subset \mathfrak{F}$ , wobei

$$\mathfrak{N} = \{\xi = (x_1, x_2, \dots) : x_i \neq x_j, \quad \#(\xi \cap B) < \infty \quad \forall B \in \mathfrak{B}\},$$

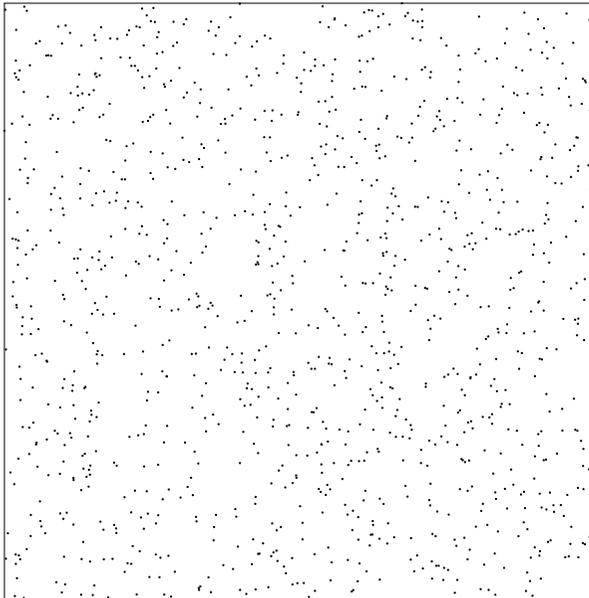
und  $\mathfrak{B} =$  Familie aller beschränkten Borel-Mengen des  $\mathbb{R}^d$

## Stationäre Poissonsche Punktprozesse:

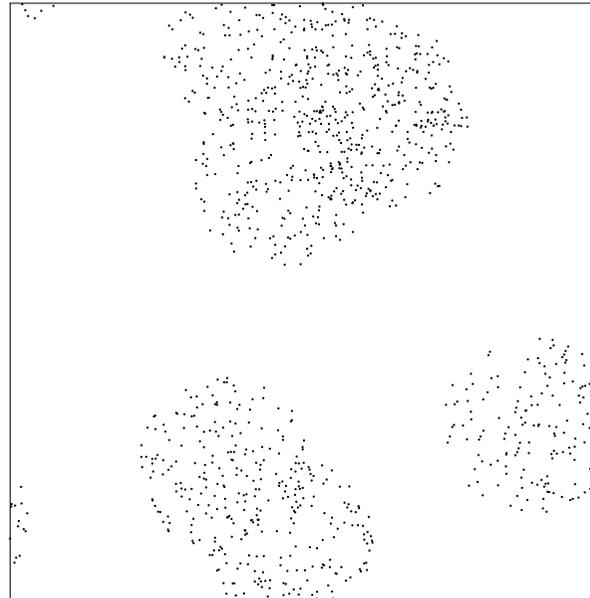
- $\#(\Xi \cap B) \sim \text{Poi}(\lambda|B|) \quad \forall B \in \mathfrak{B}$
- Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und disjunkte  $B_1, \dots, B_k \in \mathfrak{B}$  sind die Zufallsvariablen  $\#(\Xi \cap B_1), \dots, \#(\Xi \cap B_k)$  unabhängig.

# Beispiele

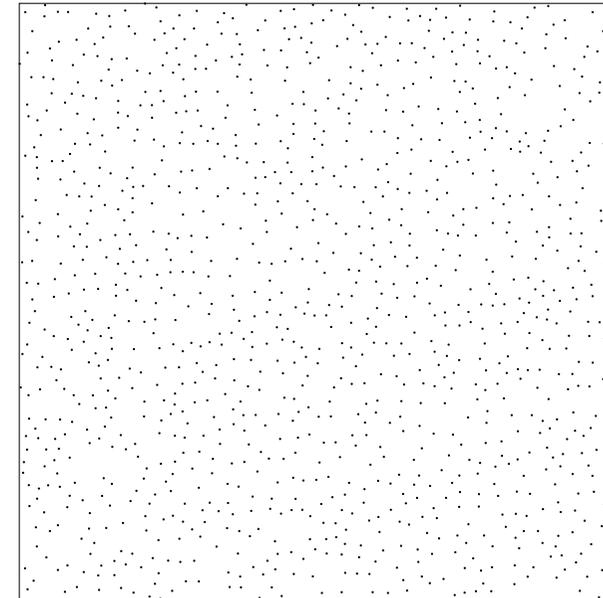
## Stationäre Punktprozesse in $\mathbb{R}^2$



Poisson-Prozess



Cluster-Prozess



Hard-Core-Prozess

# Beispiele

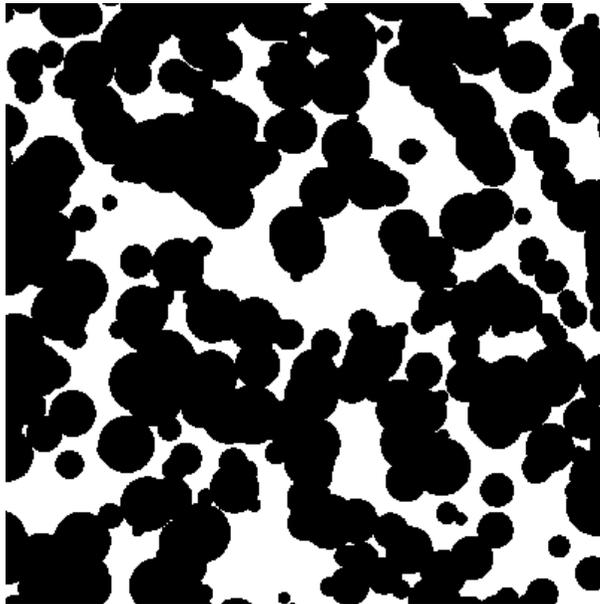
- **Keim–Korn–Modelle:**  $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Xi_i + X_i)$ , wobei
  - $\{X_1, X_2, \dots\}$  = Punktprozess (von **Keimen**) und
  - $\{\Xi_1, \Xi_2, \dots\}$  = Folge von nichtleeren kompakten ZAM (zufällige **Körner**)

## Theorem 3

*Jede ZAM  $\Xi$  kann als Keim-Korn-Modell  $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Xi_i + X_i)$  dargestellt werden.*

# Beispiele

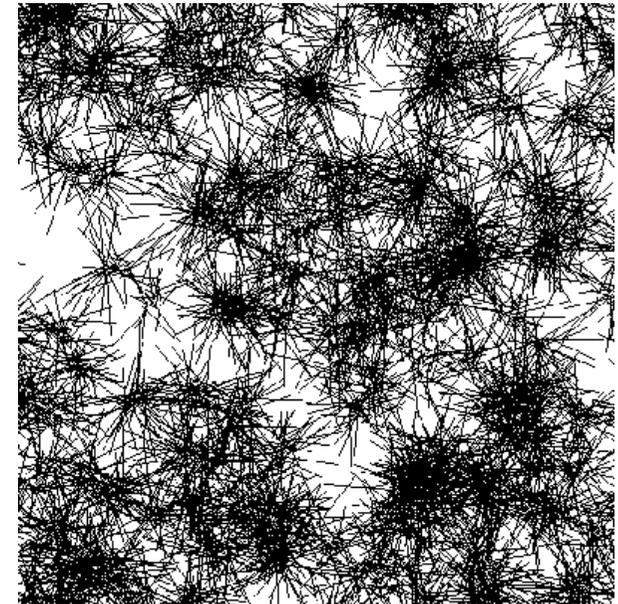
## Stationäre Keim–Korn–Modelle in $\mathbb{R}^2$



Boolesches Modell mit  
sphärischen Körnern



Boolesches Modell mit  
polygonalen Körnern



Cluster–Prozess von  
Segmenten

# Beispiele

## Boolesches Modell

Das Keim–Korn–Modell  $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Xi_i + X_i)$  heißt **Boolesches Modell**, falls

- der Punktprozess der Keime  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ein stationärer Poisson–Prozess in  $\mathbb{R}^d$  ist (mit Intensität  $\lambda$ )
- die Körner  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  iid und von  $\{X_1, X_2, \dots\}$  unabhängig sind;  
 $\Xi_i \stackrel{d}{=} \Xi_0$
- $E |\Xi_0 \oplus K| < \infty, \quad \forall K \in \mathcal{K}.$

**Kapazitätsfunktional:**  $T_{\Xi}(C) = 1 - e^{-\lambda E |(-\Xi_0) \oplus C|}, \quad \forall C \in \mathfrak{C}$

# Spezifische innere Volumina

## • Voraussetzungen

•  $\Xi$  sei stationär,  $\Xi \in \mathcal{S}$  f.s.

•  $E 2^{N(\Xi \cap [0,1]^d)} < \infty$ , wobei  $N(\emptyset) = 0$  und

$$N(K) = \min\{m \in \mathbb{N} : K = \bigcup_{i=1}^m K_i, K_i \in \mathcal{K}\} \text{ für } K \in \mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}.$$

• **Spezifische innere Volumina:** Sei  $\bar{V}_j(\Xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E V_j(\Xi \cap W_n)}{|W_n|}$

für  $j = 0, \dots, d$ , wobei  $\{W_n\} =$  Folge von monoton wachsenden Beobachtungsfenstern  $W_n = nW$  mit  $W \in \mathcal{K}$  und  $|W| > 0$ .

Insbesondere gilt:  $\bar{V}_d(\Xi) = P(o \in \Xi) = E|\Xi \cap W|/|W|$

# Schätzung von $(\bar{V}_0(\Xi), \dots, \bar{V}_d(\Xi))^T$

**Zielstellung:** Schätze  $\bar{V}(\Xi) = (\bar{V}_0(\Xi), \dots, \bar{V}_d(\Xi))^T$  aus einer Realisierung von  $\Xi \cap W$

**Lösungsansatz:** Für jedes  $i = 0, \dots, d$  betrachten wir ein Zufallsfeld  $Y_i = \{Y_i(x), x \in \mathbb{R}^d\}$  mit den Eigenschaften:

- $Y_i$  sei **stationär 2. Ordnung**, d.h.  $E Y_i(x) = \mu_i$ ,  
 $Cov(Y_i(x), Y_i(x+h)) = Cov_{Y_i}(h) \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^d$ .
- Es gelte  $\mu_i = E Y_i(o) = \sum_{j=0}^d a_{ij} \bar{V}_j(\Xi)$ , wobei  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^d$  invertierbar sei.

Dann gilt  $\bar{V}(\Xi) = A^{-1} \mu$ , wobei  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_d)^T$ .

# Schätzung von $(\bar{V}_0(\Xi), \dots, \bar{V}_d(\Xi))^T$

- $\hat{V}(\Xi) = A^{-1}\hat{\mu}$  ist erwartungstreu für  $\bar{V}(\Xi)$ , falls  $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_d)^T$  erwartungstreuer Schätzer für  $\mu$ .
- Für  $i = 0, \dots, d$  sei  $\hat{\mu}_i = \int_W Y_i(x) w(dx)$ , wobei
  - $Y_i(x)$ ,  $x \in U \subset W$  aus  $\Xi \cap W$  berechenbar und
  - $w(\cdot)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Träger in  $U \subset W$

## Beispiele:

- $w(\cdot) = |\cdot \cap U|/|U|$ ,  $U \subset W$
- $w(\cdot) = \sum_{k=1}^m w_k \delta_{x_k}(\cdot)$  mit  $x_1, \dots, x_m \in U$ ,  $w_1, \dots, w_m > 0$  und  $w_1 + \dots + w_m = 1$

# Schätzung von $(\bar{V}_0(\Xi), \dots, \bar{V}_d(\Xi))^T$

## ● Methode der kleinsten Quadrate

- Betrachte  $n > d + 1$  Felder  $Y_i$  mit den obigen Eigenschaften
- „Löse“ das überbestimmte lineare Gleichungssystem
- Die Lösung ist der KQ–Schätzer für  $(\bar{V}_0(\Xi), \dots, \bar{V}_d(\Xi))^T$

## ● Varianzminimierung

Reduktion von  $Var(\hat{\mu}_i)$  durch geeignete Wahl von  $w$

- Bei diskreter Mittelung  $w$ : optimale Gewichte  $w_1, \dots, w_m$  durch **Kriging des Mittelwertes** (Wackernagel (1998)) bzw.
- Messstellen  $x_1, \dots, x_m \in W$  durch **optimale Versuchsplanung** für Zufallsfelder (Näther (1985), Müller (2001))

# Konsistenz

- Sei  $E 4^{N(\Xi \cap [0,1]^d)} < \infty$  und  $\int_{\mathbb{R}^d} |Cov_{Y_i}(h)| dh < \infty \quad \forall i = 0, \dots, d$

Dann ist

- $\hat{V}(\Xi, W_n) = A^{-1} \hat{\mu}(W_n)$  mit  $W_n = nW$  und

$$\hat{\mu}(W_n) = \left( \int_{W_n} Y_0(x) w(dx), \dots, \int_{W_n} Y_d(x) w(dx) \right)^\top$$

ein  $L_2$ -konsistenter Schätzer für  $\bar{V}(\Xi)$ , d.h.,

$$E|\hat{V}(\Xi, W_n) - \bar{V}(\Xi)|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

# Asymptotische Normalverteilung

Falls  $\Xi$  ein **stationäres Keim–Korn–Modell** mit iid Körnern  $\Xi_i$  ist,  $\Xi_i \stackrel{d}{=} \Xi_0 \in \mathcal{K}$ , die von den Keimen  $\{X_1, X_2, \dots\}$  unabhängig sind, dann gilt **unter zusätzlichen Bedingungen an die Felder  $Y_i$** , dass

$$\sqrt{|W_n|}(\widehat{V}(\Xi, W_n) - \overline{V}(\Xi)) \implies N(0, A^{-1}\Sigma(A^{-1})^\top)$$

für  $n \rightarrow \infty$ , wobei

- $\Sigma = \left( \int_{\mathbb{R}^d} Cov_{Y_i Y_j}(h) dh \right)_{i,j=0}^d$  und
- $Cov_{Y_i Y_j}(h) = E Y_i(x) Y_j(x+h) - \mu_i \mu_j$  ist die **Kreuzkovarianz-funktion** von  $Y_i$  und  $Y_j$

# Asymptotische Normalverteiltheit

- $Y_j(x) = f_j((\Xi - x) \cap K_j)$ , wobei  $f_j$  eine bedingt beschränkte Bewertung auf  $\mathcal{R}$  ist und  $K_j \in \mathcal{K}$ ;  $j = 0, \dots, d$
- $E 2^{pN(\Xi \cap K_j)} < \infty$ , wobei  $N(\Xi \cap K_j) = \#\{i : (M_i + X_i) \cap K_j \neq \emptyset\}$
- $w(\cdot) = |\cdot \cap U_n|/|U_n|$ ,  $U_n \subset W_n$

und **entweder**

- $X = \{X_1, X_2, \dots\}$  schnell  $\beta$ -mischend
- $\Xi_0$  gleichmäßig beschränkt;  $p = 2 + \delta$ ,  $\delta > 0$

oder

- $X = \{X_1, X_2, \dots\}$  mit endlicher Korrelationsreichweite
- $|Cov_{Y_i Y_j}(h)| \leq g_{ij}(\Xi_0, h) \in L_1(\mathbb{R}^d)$  monoton in  $\Xi_0$ ;  $p = 2$

# Konsistente Schätzung der Kovarianzmatrix

- Seien  $U_n \subset W_n$  **Mittelungsgebiete** mit  $|U_n|^2/|W_n| \rightarrow 0$  und  $\min_{h \in U_n} |W_n \cap (W_n - h)|/|W_n| \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$
- Dann gilt die  **$L_2$ -Konsistenz**  $E|\hat{\Sigma}_n - \Sigma|^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , wobei  $\hat{\Sigma}_n = (\hat{\sigma}_{nij})_{i,j=0}^d$  mit

$$\hat{\sigma}_{nij} = \frac{1}{|W_n|} \int_{U_n} \widehat{Cov}_{nij}(h) |W_n \cap (W_n - h)| dh ,$$

$$\widehat{Cov}_{nij}(h) = \frac{\int_{W_n \cap (W_n + h)} Y_j(x) Y_i(x - h) dx}{|W_n \cap (W_n + h)|} - \frac{\int_{W_n} Y_i(x) dx}{|W_n|} \frac{\int_{W_n} Y_j(x) dx}{|W_n|}$$

# Bildklassifikation

- Nichtparametrischer Schätzer für  $(\bar{V}_0(\Xi), \dots, \bar{V}_d(\Xi))^T$ ,
  - der erwartungstreu und  $L_2$ -konsistent bzw.
  - asymptotisch normalverteilt ist
- Konsistenter Schätzer der asymptotischen Kovarianzmatrix  $\Sigma$



asymptotischer Signifikanz-Test der spezifischen inneren Volumina



Bildklassifikation

# Beispiele für die Zufallsfelder $Y_i$

## Gewichtetes Volumen von $r$ -Umgebungen

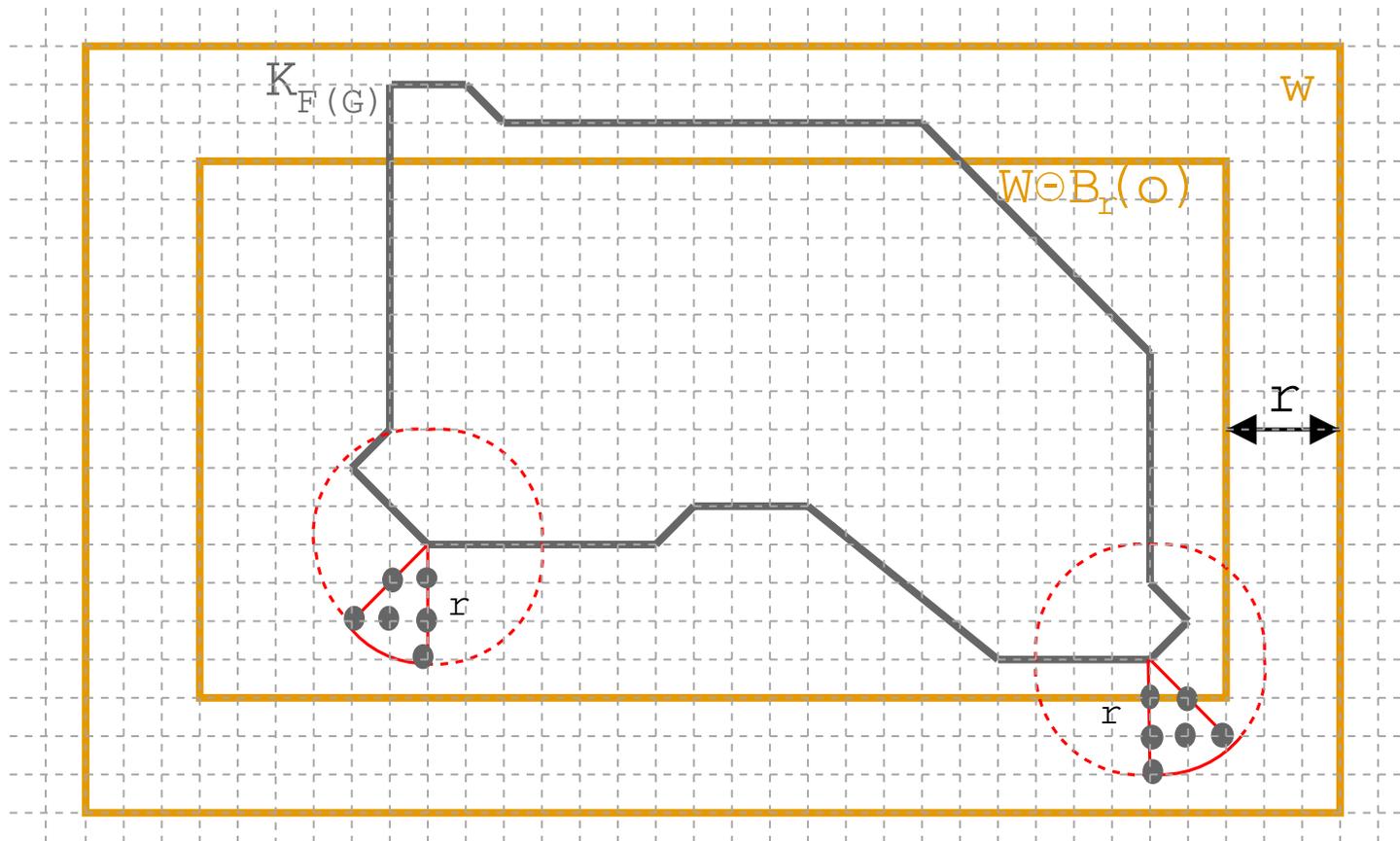
- Seien  $r_0, \dots, r_{d-1} > 0$  mit  $r_i \neq r_j, i \neq j$  und  $|W \ominus B_{r_i}(o)| > 0$
- $Y_i(x) = Z_{r_i}(x) = \sum_{q \in \partial \Xi \cap B_{r_i}(x) \setminus \{x\}} J(\Xi \cap B_{r_i}(x), q, x), \quad i = 0, \dots, d-1$
- $Y_d(x) = \mathbf{1}(x \in \Xi)$
- **Randkorrigierte Schätzer** (minus sampling):  $U = W \ominus B_r(o)$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{|W \ominus B_{r_i}(o)|} \int_{W \ominus B_{r_i}(o)} Z_{r_i}(x) dx, \quad i = 0, \dots, d-1$$

$$\hat{\mu}_d = \frac{|\Xi \cap W|}{|W|}$$

# Beispiele für die Zufallsfelder $Y_i$

Gewichtetes Volumen von  $r$ -Umgebungen; minus sampling



# Beispiele für die Zufallsfelder $Y_i$

## Gewichtetes Volumen von $r$ -Umgebungen

Zur Erinnerung:

$$A = A_{r_0 \dots r_{d-1}} = \begin{pmatrix} r_0^d k_d & r_0^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_0^2 k_2 & r_0 k_1 & 0 \\ r_1^d k_d & r_1^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_1^2 k_2 & r_1 k_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{d-1}^d k_d & r_{d-1}^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_{d-1}^2 k_2 & r_{d-1} k_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiele für die Zufallsfelder $Y_i$

## Lokale Euler-Zahl

- Seien  $r_0, \dots, r_{d-1} > 0$  mit  $r_i \neq r_j, i \neq j$  und  $|W \ominus B_{r_i}(o)| > 0$
- $Y_i(x) = V_0(\Xi \cap B_{r_i}(x))$  für  $i = 0, \dots, d$
- Minus sampling

$$\hat{\mu}_i = \int_{W \ominus B_{r_i}(o)} V_0(\Xi \cap B_{r_i}(x)) w(dx) = \sum_{k=1}^m V_0(\Xi \cap B_{r_i}(x_k)) w_k$$

- Diskretes Maß  $w$ , wobei  $x_1, \dots, x_m \in W \ominus B_{r_i}(o)$  und beispielsweise  $w_k = 1/m, k = 1, \dots, m$ .

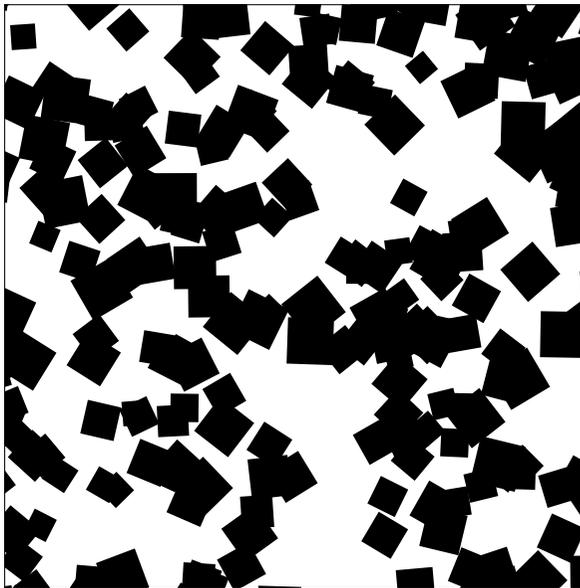
# Beispiele für die Zufallsfelder $Y_i$

## Lokale Euler-Zahl

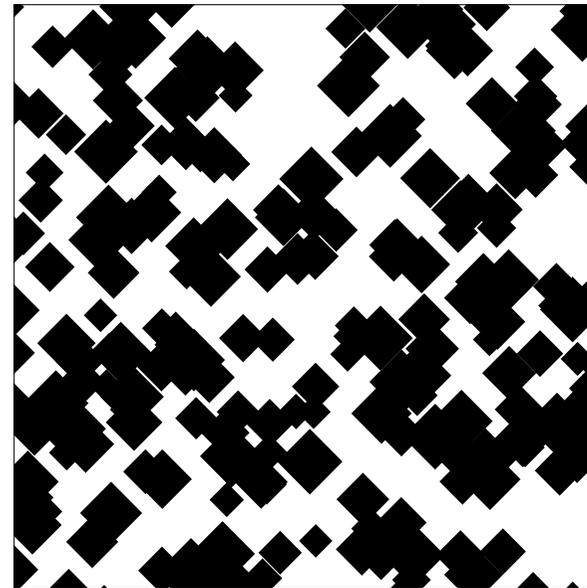
$$A = A_{r_0 \dots r_d} = \begin{pmatrix} r_0^d k_d & r_0^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_0^2 k_2 & r_0 k_1 & 1 \\ r_1^d k_d & r_1^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_1^2 k_2 & r_1 k_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_d^d k_d & r_d^{d-1} k_{d-1} & \dots & r_d^2 k_2 & r_d k_1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Numerisches Beispiel

- Betrachten 200 Realisierungen eines planaren **Booleschen Modells** in  $W = [0, 999]^2$  mit quadratischen Körnern (Seitenlänge  $l \sim U[20, 40]$ , gedreht um  $\alpha$ )



Isotrope Körner:  $\alpha \sim U[0, \pi/2]$



Anisotrope Körner:  $\alpha = \pi/4$

# Numerisches Beispiel

	Isotropes Modell			Anisotropes Modell		
$\bar{V}_2(\Xi)$	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8
$2\bar{V}_1(\Xi)$	0.022888	0.044511	0.041475	0.022888	0.044511	0.041475
$2\bar{V}_1(\Xi_{\mathfrak{F}(G)})$	0.023716	0.047360	0.046472	0.022568	0.045029	0.044114
$2\hat{V}_1(\Xi)$	0.022690	0.044440	0.041903	0.021603	0.042629	0.041438
$\delta_{\hat{V}_1(\Xi), \bar{V}_1(\Xi)}, \%$	-0.87	<b>-0.16</b>	1.03	-5.62	<b>-4.23</b>	-0.09
$\delta_{\hat{V}_1(\Xi), \bar{V}_1(\Xi_{\mathfrak{F}(G)})}, \%$	-4.33	-6.17	-9.83	-4.27	-5.33	-6.07
$\bar{V}_0(\Xi) \times 10^4$	1.386668	0.563821	-3.349056	1.498411	1.238828	-1.888622
$\bar{V}_0(\Xi_{\mathfrak{F}(G)}) \times 10^4$	1.379504	0.432863	-4.017129	1.538032	1.418247	-1.763065
$\hat{V}_0(\Xi) \times 10^4$	1.258333	-0.286120	-4.968132	1.097168	-1.165512	-6.973096
$\delta_{\hat{V}_0(\Xi), \bar{V}_0(\Xi)}, \%$	-9.25	<b>-150.75</b>	48.34	-26.78	<b>-194.08</b>	269.22
$\delta_{\hat{V}_0(\Xi), \bar{V}_0(\Xi_{\mathfrak{F}(G)})}, \%$	-8.78	-166.10	23.67	-28.66	-182.18	295.51

# Ausblick

- Andere Randkorrekturen für  $\hat{\mu}$
- Morphologische Analyse von Graustufenbildern
- 3D–Algorithmen
- Ähnlicher Ansatz zur Schätzung der positiven Fortsetzung (Matheron (1975)) der inneren Volumina auf den Konvexring
- Andere Beispiele für Funktionale  $F_i$

# Literatur

- V. Schmidt, E. Spodarev, [Joint estimators for the specific intrinsic volumes of stationary random sets](#), Stoch. Proc. Appl. 115 (2005), No. 6, 959-981
- S. Klenk, V. Schmidt, E. Spodarev, [A new algorithm for the computation of Minkowski functionals of polyconvex sets](#), erscheint in: Comp. Geom. Th. Appl. (2006)
- U. Pantle, V. Schmidt, E. Spodarev, [A central limit theorem for functionals of germ-grain models](#), erscheint in: Adv. Appl. Prob. 38 (2006), No. 1
- R. Guderlei, S. Klenk, J. Mayer, V. Schmidt, E. Spodarev, [Algorithms for the computation of Minkowski functionals of deterministic and random polyconvex sets](#), erscheint in: Image and Computer Vision (2006), ICMM 2005 Special Issue