

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 10

Abgabe: 21. 12. 2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 (9 = 3 · 3 Punkte)

Berechne folgende Integrale:

(a) $\int_{[0,2] \times [3,4]} (2x + 3y) \, dx dy$

(b) $\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin(x + y) \, dx dy$

(c) $\int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} \left(\frac{x^2 z^3}{1 + y^2} \right) \, dx dy dz.$

Aufgabe 2 (4 = 2 · 2 Punkte)

Schreibe für die folgenden Mengen M das Bereichsintegral über M als iteriertes Integral.

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, (x + R)^2 + y^2 \geq 2R^2\}$ ($R > 0$ fest). Skizziere M .

(b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx\}$ ($R > 0$ fest).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Körpers unterhalb des Graphen der Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ für $a, b, c > 0$ fest. Berechne

$$\int_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \, dx dy dz.$$

Hinweis: Benutze verallgemeinerte Kugelkoordinaten

$$x = ar \sin(\psi) \cos(\phi), \quad y = br \sin(\psi) \sin(\phi), \quad z = cr \cos(\psi).$$