Prof. Dr. W. Balser
Ole Stenzel

WiSe 2009/10
Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 12

Abgabe: 25. 01. 2010 vor den Übungen

Aufgabe 1 ($6 = 4 + 2$ Punkte)
Die abgeflachten Drehellipsoid-Koordinaten (η, ψ, φ) eines Punktes (x_1, x_2, x_3) sind definiert durch:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(\eta, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta)\sin(\psi)\cos(\varphi) \\ \cosh(\eta)\sin(\psi)\sin(\varphi) \\ \sinh(\eta)\cos(\psi) \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Jacobi-Matrix $J_\Phi := \frac{\partial \Phi}{\partial(\eta,\psi,\varphi)}$ sowie die Determinante $\det(J_\Phi)$.

(b) Sind die Drehellipsoid-Koordinaten orthogonal?

Hinweis: $\sinh(\cdot)$ und $\cosh(\cdot)$ bezeichnen den *Sinus Hyperbolicus* bzw. den *Cosinus Hyperbolicus*.

Aufgabe 2 ($6 = 2 \cdot 3$ Punkte)
Berechne $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U)$ für die folgenden skalaren Felder im $\mathbb{R}^3$:

(a) $U(x_1, x_2, x_3) = x_3 \exp(x_1^2 x_2)$

(b) $U(x_1, x_2, x_3) = \langle p, x \rangle + \|x\|^3$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^T \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 ($4 = 4 \cdot 1$ Punkte)
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, und seien $g, h : G \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder, sowie $f : G \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion. Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll, welche sinnlos? Berechne die sinnvollen Ausdrücke für $g(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 0, -3)^T$, $h(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 x_2, 0)^T$ sowie $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.

(a) $g \cdot \operatorname{rot}(g \times h)$

(b) $x_1 \times \operatorname{grad}(gh)$

(c) $g \times \operatorname{grad}((0,1,0) \cdot h)$

(d) $\operatorname{rot}(h \times \operatorname{grad} f)$

Zusatzaufgabe ($8 = 2 \cdot 4$ Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_1 x_3)^T$, und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine skalare Funktion mit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Überprüfe für diesen Fall, dass

(a) $\operatorname{div}(fg) = \langle \operatorname{grad} f, g \rangle + f \cdot \operatorname{div} g$

(b) $\operatorname{rot}(fg) = f \cdot \operatorname{rot} g + \operatorname{grad} f \times g$.