

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 14

Abgabe: 08. 02. 2010 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Zusatzpunkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$t \sin(x) + x + (t^2 \cos(x) + t \ln(t)) x' = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Zeige, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.
- (b) Berechne einen *integrierenden Faktor* der Form $\mu = \mu(t)$.

Hinweis: Für eine Differentialgleichung der Form

$$p(t, x) + q(t, x)x' = 0 \tag{1}$$

heißt eine nullstellenfreie, stetig differenzierbare Funktion $\mu = \mu(t, x)$ ein *integrierender Faktor*, falls die Differentialgleichung

$$\mu(t, x)p(t, x) + \mu(t, x)q(t, x)x' = 0 \tag{2}$$

exakt ist. Beachte: Die Differentialgleichungen (1) und (2) haben dieselben Lösungen.

Aufgabe 2 (6 Zusatzpunkte)

Seien f, g stetig differenzierbare Funktionen. Zeige, dass die Differentialgleichung

$$g(t)x + h(t) - x' = 0$$

immer einen integrierenden Faktor besitzt und berechne diesen.

Hinweis: Der integrierende Faktor hängt nur von einer Variable ab.

Aufgabe 3 (6 Zusatzpunkte)

Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$x' = t \sin(x^2), \quad x(0) = 1$$

genau eine Lösung auf ganz \mathbb{R} hat.

Aufgabe 4 (6 Zusatzpunkte)

Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$x' = x^s, \quad x(0) = 0, \quad 0 < s < 1,$$

unendlich viele Lösungen besitzt.