Prof. Dr. W. Balser
Ole Stenzel

WiSe 2009/10
Gesamt: 24 Punkte

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 2

Abgabe: 26. 10. 2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 ($6 = 6 \cdot 1$ Punkte)
Folgende Matrizen sind gegeben:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entscheide, ob die folgenden Rechnungen definiert sind, und berechne ggf. das Ergebnis:

(a) $C \cdot A + C \cdot D$, (b) $B \cdot E$, (c) $A \cdot D$, (d) $G^T \cdot F \cdot B^T$, (e) $C^T \cdot D + F$, (f) $E^T \cdot B$.

Aufgabe 2 ($6 = 2 \cdot 3$ Punkte)
Für $x \in \mathbb{R}$ besitzt $\exp(x)$ die Darstellung $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Für eine $n \times n$ Matrix A definiert man daher $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, wobei $A^0 := I$, und A^n das Produkt von A (n-mal) mit sich selber ist. Sei nun $A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$ eine Diagonalmatrix mit reellwertigen Einträgen.

(a) Zeige per Induktion, dass $A^k = \begin{bmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{bmatrix}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: $\exp(A) = \begin{bmatrix} \exp(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(a_n) \end{bmatrix}$.

Aufgabe 3 ($6 = 4 \cdot 1 + 2$ Punkte) Berechne die Determinanten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei A eine $n \times n$ Matrix mit den Spaltenvektoren $b_1, \ldots, b_n$, d. h. $A = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$. Zeige, dass $\det(A) = 0$, falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind, d. h. falls es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt, welche nicht alle gleich Null sind, mit $\lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n = 0$.