Prof. Dr. W. Balser
Ole Stenzel

WiSe 2009/10
Gesamt: 24 Punkte

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 5

Abgabe: 16. 11. 2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 ($6 = 3 \cdot 2$ Punkte)

(a) Berechne den Rang der Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) Prüfe, ob die folgende Familie ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$ ist:

$$((-1, 2, 1, 2), (1, 5, 8, 7), (2, 0, 1, 2), (1, 1, -1, -1)).$$

(c) Sei U die Menge der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ mit

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \quad \wedge \quad 3x_1 - x_3 = 0.$$

Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und gib eine Basis von U an.

Aufgabe 2 ($5 = 5 \cdot 1$ Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $K : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3 \quad , \quad f(z_1, z_2) := (z_1 + 2z_2, z_1 - z_2, 2z_1)$,

(b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \quad , \quad f(z_1, z_2, z_3) := (z_1 - 1, z_2 + z_3)$,

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) := \mathrm{Im(z)}$,

(d) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z_1, z_2) := z_1 \cdot z_2$,

(e) $f : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b] \quad , \quad f \to g(s) := \int_a^b K(s, t) f(t) dt, \quad a \leq s \leq b$.
Hinweis: Die Abbildung f heißt *Fredholmscher Integraloperator*. Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Funktion g stetig ist.

Aufgabe 3 ($6 = 2 + 1 + 1 + 2$ Punkte)
Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$ der Polynome mit reellwertigen Koeffizienten, d. h.

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_j x^j \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathbb{R}[x]$ unendlich-dimensional ist und gib eine Basis an.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome mit einer Nullstelle im Ursprung. Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$ ist.

(c) Sei $W \subset \mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome, die im Ursprung einen festen Wert $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ annehmen. Ist W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$?

(d) Sind die Familien $(x^{j+1} - x^j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ (i) linear unabhängig und (ii) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}[x]$?

Hinweis: Für einen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ mit Vektoren $v_j \in V,\ j \in \mathbb{N}_0$, heißt die unendliche Familie $(v_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ linear unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_0$ die Familie $(v_j)_{j\in J}$ linear unabhängig ist. Weiter heißt $(v_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von V, wenn jedes $v \in V$ als Reihe $v = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j v_j$ geschrieben werden kann, wo bei die $\alpha_j \in \mathbb{K}$ sind und nur endlich viele $\alpha_j \neq 0$ sind.

Aufgabe 4 ($7 = 1 + 2 + 2 + 2$ Punkte)
Sei $\mathcal{F}[\mathbb{N}_0, \mathbb{C}]$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ und seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $p(x) := x^2 - ax - b \in \mathbb{C}[x]$. Sei

$$U := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n\}.$$

(a) Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathcal{F}[\mathbb{N}_0, \mathbb{C}]$ ist.

(b) Finde eine Basis von U für den Fall $a = b = 0$.

(c) Hat $p(x)$ zwei verschiedene Nullstellen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, so bilden die Folgen $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von U.

(d) Hat $p(x)$ die zweifache Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$, gilt also $a^2 + 4b = 0$, und ist $b \neq 0$, so bilden die Folgen $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von U.