Prof. Dr. W. Balser
Ole Stenzel

WiSe 2009/10
Gesamt: 24 Punkte

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 6

Abgabe: 23. 11. 2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 ($8 = 4 \cdot 2$ Punkte)

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Prüfe, ob die Matrizen A und B äquivalent sind.

(b) Berechne die charakteristischen Polynome der Matrizen A und B.

(c) Orthogonalisiere die Vektoren $w_1 = (1,1,1)^T,\ w_2 = (1,0,1)^T,\ w_3 = (1,1,0)^T$.

(d) Sei λ ein Eigenwert von A und $Eig(A, \lambda)$ die Menge aller Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ, einschließlich des Nullvektors. Zeige, dass $Eig(A, \lambda)$ ein reller Vektorraum ist.

Aufgabe 2 ($8 = 2 \cdot 4$ Punkte)

(a) Sei V der Vektorraum aller beschränkten Folgen reeller Zahlen, d. h.

$$V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists c \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c\}\,.$$

Zeige, dass durch

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{n^2}$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) Sei $V[a,b]$ der reelle Vektorraum aller Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Prüfe, ob durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei V der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich drei, d. h.

$$V = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_j x^j \mid a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf V. Berechne eine Orthonormalbasis $(p_1, \ldots, p_4)$ von V.