Prof. Dr. W. Balser
Ole Stenzel

WiSe 2009/10
Gesamt: 24 Punkte

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 7

Abgabe: 30. 11. 2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 ($10 = 3 + 3 + 3 + 1$ Punkte)
Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechne die charakteristischen Polynome von A und B.

(b) Berechne die Eigenwerte von A und B.

(c) Berechne zu jedem Eigenwert von A und B so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie möglich (d. h. bestimme eine Basis der Eigenräume).

(d) Welche der Matrizen ist diagonalisierbar?

Hinweise: Es ist zum Teil erforderlich, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch Polynomdivision zu berechnen.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Für welche $\alpha \in [0, \pi]$ besitzt die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

reelle Eigenwerte?

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom

$$P_A(x) := \det(A - x \cdot I) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Zeige, dass $a_0 = \det(A)$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A)$, $a_n = (-1)^n$.
Hinweis: Es dürfen die Ergebnisse von Aufgabe 2.6.10 verwendet werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$P_A(x) = (-1)^n \left(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \right).$$

Hinweis zur Berechnung von $P_A(x) = \det(A - x \cdot I)$: Vertausche die 1. Zeile mit der 2., $\ldots$, n-ten Zeile und mache aus dieser transformierten Matrix eine obere Dreiecksmatrix.