

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 9

Abgabe: 14. 12. 2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechne das Volumen der Menge

$$P := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sin(x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \cdot (1 - z), 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

und zeichne eine Skizze von P .

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Berechne das Volumen der Menge

$$P := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^3 \leq 9x^2 \right\}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeige: Jede offene Kugel in \mathbb{R}^n ist messbar.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $K_n(r)$ die n -dimensionale Kugel um 0 mit Radius $r \geq 0$. Zeige, dass für das Volumen folgende Formel gilt:

$$|K_n(r)| = r^n \cdot c_n \text{ mit } c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

wobei $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$, die Gamma-Funktion ist.

Es gilt: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Außerdem ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Um das Integral

$$\int_0^r (r^2 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

auszurechnen, empfiehlt es sich, die Substitution $t = r \cdot \sqrt{u}$ vorzunehmen, und das Resultat

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

anzuwenden, wobei $B(x, y)$ die Eulersche Betafunktion ist.